Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Карпов, Алгебро-геометрические аспекты S -двойственности, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 2, 163–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1492>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:03:23

УДК 512.723

АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ S -ДВОЙСТВЕННОСТИ

Б. В. Карпов

В работе рассматриваются алгебро-геометрические задачи, связанные с проверкой гипотезы S -двойственности для суперсимметричных янг-миллсовских квантовых теорий поля в четырехмерном случае. Описываются все случаи равенства нулю и отрицательности бета-функции Гелл-Мана–Лоу для рангов 1 и 2 калибровочной группы и указываются некоторые серии таких случаев для произвольного ранга калибровочной группы. При реализации одной из серий на комплексной проективной плоскости обнаруживается связь с исключительными расслоениями.

Библиография: 15 названий.

Введение

Важной и интересной задачей геометрии является проверка гипотезы S -двойственности для суперсимметричных янг-миллсовских квантовых теорий поля в четырехмерном случае (как правило, работают со случаем SYM, $N = 4$ или $N = 2 +$ массивный гипермультиплет в присоединенном представлении с некоторым количеством N_f ароматов частиц). Напомним, что для того, чтобы можно было вычислять квантовые корреляционные функции в квазиклассическом пределе, нужно, чтобы бета-функция Гелл-Мана–Лоу полей этой теории была равна нулю (или в крайнем случае была бы отрицательной). В этом случае корректно определена константа калибровочного взаимодействия (либо электромагнитного – e , либо сильного – g). Кроме того, поскольку бета-функция равна нулю, не существует аномалий $U(1)$ -глобальной симметрии, т.е. физика зависит от вакуумного угла θ , и наша теория, конечно, масштабно инвариантна. Таким образом, как параметр нашей теории возникает константа

$$\tau = \frac{\theta}{\pi} + \frac{8\pi i}{g^2}$$

(принадлежащая верхней полуплоскости) и гипотеза S -двойственности заключается в том, что статсумма нашей теории Z_τ ведет себя как модулярная форма при целочисленных дробно-линейных преобразованиях (предположения об этой симметрии были сделаны Монтаненом и Оливом более двадцати лет назад [1]). Для проверки этого чисто

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96–01–01323.

математического факта Вафа и Виттен [2] предложили метод, который, к сожалению, относится только к частным случаям четырехмерных многообразий (алгебраических поверхностей дель Педро и типа К3), для которых справедливы теоремы зануления гармонических спиноров в каноническом или присоединенном представлении.

Цель настоящей работы – описать все случаи, когда вышеупомянутые методы применимы для небольших рангов (1 и 2) калибровочной группы и указать некоторые серии таких случаев для произвольного ранга калибровочной группы. В частности, мы показываем, что полная программа проверки интересующей физиков S -двойственности при “больших энергиях” для рангов 1 и 2 калибровочной группы сводится к пяти случаям (математические исследования в которых уже ведутся), а для произвольного ранга калибровочной группы представлены три серии, над двумя из которых работают физики (для серии а) см. [2] и для серии б) см. [3]).

Необходимо заметить, что существует параллельная программа проверки S -двойственности при “малых энергиях”, связанная с чисто геометрическим описанием динамики кулоновской ветви вакуума [3], [4]. Этого подхода мы здесь не касаемся.

Автор благодарен А. Н. Тюрину за многочисленные полезные обсуждения, без которых написание этой статьи было бы невозможно, а также всем участникам семинара по алгебре в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН за внимание и интерес к данной работе.

Основной отсеб квантовых теорий поля, годных для тестирования высокоэнергетической S -двойственности, дает условие на бета-функцию. С этого мы и начнем.

§ 1. Бета-функция

Математическое содержание этого параграфа, конечно, хорошо знакомо экспертам по теории представлений, но мы приводим его лишь для удобства перехода к геометрии.

1.1. Пусть γ – неприводимое конечномерное комплексное представление алгебры Ли $\mathfrak{su}(r)$ (алгебры Ли калибровочной группы нашей теории) и b_γ – элемент Казимира этого представления. Обозначим через $c_2(\gamma)$ коэффициент пропорциональности между b_{can} и b_γ :

$$b_{\text{can}} = c_2(\gamma)b_\gamma,$$

где can – каноническое представление $\mathfrak{su}(r)$ в $\mathbb{C}^r$.

Рассмотрим конечный набор представлений $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{N_a}\}$, среди которых есть эквивалентные. Поднабор, состоящий из попарно эквивалентных представлений, соответствует частице, число представлений в нем – число N_f ароматов частицы, а размерность r канонического представления калибровочной группы – число цветов. Таким образом, N_a есть общее число ароматов частиц нашего ансамбля. Бета-функция набора $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{N_a}\}$ имеет вид

$$\beta(\{\gamma_i\}) = -c_2(\text{ad}) + \sum_i c_2(\gamma_i).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Хотя обозначение $c_2(\gamma)$ не совсем традиционно в теории алгебр Ли, оно себя оправдывает при последующем переходе к геометрии. А именно, представление γ можно рассматривать как тензорную операцию на расслоениях ранга r , и $c_2(\gamma)$ есть коэффициент при $c_2(E)$ в выражении $c_2(\gamma(E))$ через классы Чжэня расслоения E .

Цель этого параграфа – описать все случаи, когда $\beta(\{\gamma_i\}) \leq 0$ для алгебр $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$, и указать некоторые серии таких случаев для алгебр $\mathfrak{su}(r)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку мы работаем с алгебрами Ли, у нас остается еще свобода в выборе калибровочной группы. Например, $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$, что соответствует выбору детерминанта расслоения по модулю ранга.

Любое комплексное представление алгебры $\mathfrak{su}(r)$ продолжается по линейности на ее комплексификацию $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$ без изменения c_2 , поэтому мы будем рассматривать неприводимые конечномерные представления $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$. Пусть γ – такое представление и $\{e_i\}$ – базис в $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$. Рассмотрим двойственный базис $\{f_i\}$ относительно билинейной формы

$$B_\gamma(X; Y) = \text{Tr}(\gamma(X)\gamma(Y)),$$

т.е. такой, что $B_\gamma(e_i; f_j) = \delta_{ij}$. По определению

$$b_\gamma = \sum_i e_i f_i.$$

Это центральный элемент универсальной обертывающей алгебры, он не зависит от выбора базиса.

Поскольку для двойственного представления $B_{\gamma^*}(X; Y) = B_\gamma(X; Y)$, то справедливо равенство

$$c_2(\gamma^*) = c_2(\gamma). \quad (1)$$

Мы можем указать два подхода к вычислению коэффициентов пропорциональности между элементами Казимира. В основе первого из них лежит следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Все билинейные формы B_γ для конечномерных представлений алгебры $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$ пропорциональны.*

СЛЕДСТВИЕ. $B_\gamma = c_2(\gamma) B_{\text{can}}$.

Доказательство предложения мы проводим отдельно для $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (ранг 1) и в общем случае. После этого задача сводится к вычислению или оценке ненулевого матричного элемента билинейной формы B_γ в стандартном базисе $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$.

Второй подход приводит к общей формуле, выражающей $c_2(\gamma)$ через старший вес представления γ . Этот подход основывается на двух формулах теории представлений полупростых алгебр Ли. Первая из них – формула Фрейденшталя, примененная к старшему весу (см., например, [5, формула (25.14)]), которая состоит в том, что элемент Казимира b_{can} действует на пространстве Γ представления γ как гомотетия с коэффициентом

$$(\lambda; \lambda + 2\rho) = \|\lambda + \rho\|^2 - \|\rho\|^2. \quad (2)$$

Здесь λ – старший вес представления γ относительно некоторого базиса системы корней, ρ – полусумма положительных корней и $(\cdot; \cdot)$ – форма Киллинга. Из формулы Фрейденшталя вытекает, что

$$\text{Tr}(\gamma(b_{\text{can}})) = c_2(\gamma) \text{Tr}(\gamma(b_\gamma)) = (\lambda; \lambda + 2\rho) \dim \Gamma.$$

С другой стороны, из определения b_γ имеем

$$\mathrm{Tr}(\gamma(b_\gamma)) = \sum_i \mathrm{Tr}(\gamma(e_i)\gamma(f_i)) = \sum_i 1 = \dim \mathfrak{sl}(r, \mathbb{C}) = r^2 - 1.$$

Окончательно получаем

$$c_2(\gamma) = \frac{(\lambda; \lambda + 2\rho)}{r^2 - 1} \dim \Gamma = \frac{(\lambda; \lambda + 2\rho)}{r^2 - 1} \prod_{\alpha \in R_+} \frac{(\lambda + \rho; \alpha)}{(\rho; \alpha)}. \quad (3)$$

Последнее равенство справедливо в силу формулы для размерности пространства представления с данным старшим весом [5, формула (24.6)], и это есть вторая формула теории представлений, на которой основано вычисление $c_2(\gamma)$. В общем случае использование формулы (3) затруднено в силу громоздкости произведения по положительным корням, равного $\dim \Gamma$, однако, для симметрических и внешних степеней канонического представления c_2 легко вычисляется (см. (7)).

В качестве ответа получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. 1. *Для алгебры $\mathfrak{su}(2)$ $\beta(\{\gamma_i\}) = 0$ в следующих случаях:*

- а) $N_a = 1$ и $\gamma_1 = \mathrm{ad}$;
- б) все γ_i — can и $N_a = 4$.

Неравенство $\beta(\{\gamma_i\}) < 0$ может иметь место только в случае б) при $N_a < 4$.

2. *Для алгебры $\mathfrak{su}(3)$ $\beta(\{\gamma_i\}) = 0$ в следующих случаях:*

- а) $N_a = 1$ и $\gamma_1 = \mathrm{ad}$;
- б) все γ_i изоморфны либо can , либо $\mathrm{can}^* \cong \Lambda^2(\mathrm{can})$, и $N_a = 6$;
- в) $N_a = 2$, одно из γ_i изоморфно либо $\mathrm{can} \cong \Lambda^2(\mathrm{can}^*)$, либо $\mathrm{can}^* \cong \Lambda^2(\mathrm{can})$, а другое — либо $S^2(\mathrm{can})$, либо $S^2(\mathrm{can}^*)$.

Неравенство $\beta(\{\gamma_i\}) < 0$ может иметь место или в случае б) при $N_a < 6$, или в случае одного представления, изоморфного либо $S^2(\mathrm{can})$, либо $S^2(\mathrm{can}^)$.*

3. *Для алгебр $\mathfrak{su}(r)$, $r \geq 2$, имеет место по меньшей мере три серии случаев, в которых $\beta(\{\gamma_i\}) = 0$:*

- а) $N_a = 1$ и $\gamma_1 = \mathrm{ad}$;
- б) все γ_i изоморфны либо can , либо $\mathrm{can}^* \cong \Lambda^{r-1}(\mathrm{can})$, и $N_a = 2r$;
- в) $N_a = 2$, одно из γ_i изоморфно либо $\Lambda^2(\mathrm{can})$, либо $\Lambda^2(\mathrm{can}^*)$, а другое — либо $S^2(\mathrm{can})$, либо $S^2(\mathrm{can}^*)$.

Для алгебр $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$ в некоторых из этих случаев алгебро-геометрическая задача угадана заранее, и соответствующие вычисления ведутся с использованием метода Вафа–Виттена (геометрическая ситуация зануления). Например, случай 1а) исследован в [2], случай 1б) — в [6], алгебро-геометрическая задача для случая 2б) рассмотрена в [7]. Случай 2а) геометрически аналогичен случаю 1а) (см. ниже). Наконец, самый интересный случай 2в) является единственной реализацией серии 3в) на поверхностях дель Пеццо, ему посвящен последний параграф этой работы.

1.2. Доказательства утверждений для $\mathfrak{sl}(2)$. Стандартный базис алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ имеет вид

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно [5], что любое конечномерное неприводимое представление $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (отличное от тривиального одномерного) изоморфно $\gamma_n = S^n(\text{can})$ для некоторого $n \geq 1$. При этом в пространстве представления можно выбрать базис $\{\xi_k\}$, $0 \leq k \leq n$, такой, что

$$\gamma_n(H_0)(\xi_k) = (n - 2k)\xi_k, \quad \gamma_n(X_0)(\xi_k) = k(n - k + 1)\xi_{k-1}, \quad \gamma_n(Y_0)(\xi_k) = \xi_{k+1}.$$

Следовательно, в базисе (H_0, X_0, Y_0) ненулевыми элементами матрицы билинейной формы B_{γ_n} являются

$$\text{Tr}(\gamma_n(H_0)^2) = \sum_{k=0}^n (n - 2k)^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

и

$$\text{Tr}(\gamma_n(X_0)\gamma_n(Y_0)) = \sum_{k=0}^n (k+1)(n-k) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3},$$

а сама матрица имеет вид

$$B_n = \binom{n+2}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это доказывает предложение 1.

Для доказательства теоремы 1 заметим, что присоединенное представление $\text{ad} \cong \gamma_2$, последовательность чисел $c_2(\gamma_n) = \binom{n+2}{3}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, возрастает и первые несколько ее членов равны 1, 4, 10, $\dots$.

Отметим, что

$$\text{Tr}(\gamma(H_0)^2) = 2 \text{Tr}(\gamma(X_0)\gamma(Y_0)) \quad (4)$$

для всех представлений $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, поскольку это верно для всех неприводимых представлений.

1.3. Доказательство предложения 1 в общем случае. Пусть $r \geq 3$. Рассмотрим подалгебру Картана $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$, состоящую из диагональных матриц с нулевым следом. Матрицу $H \in \mathfrak{h}$ будем задавать диагональными элементами $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.

Линейные формы $\lambda_i - \lambda_j$, $i \neq j$, образуют систему корней $R \subset \mathfrak{h}^*$. Множество $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}\}$, где $\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$, является базисом в этой системе. Двойственный базис в дуальной системе $R^* \subset \mathfrak{h}$ образуют матрицы H_i , имеющие только два ненулевых элемента: $\lambda_i = 1$ и $\lambda_{i+1} = -1$, $i = 1, \dots, r-1$. Отметим, что α_i отождествляется с H_i при изоморфизме $\mathfrak{h}^* \cong \mathfrak{h}$, который задается формой Киллинга

$$(X; Y) = \text{Tr}(XY) = B_{\text{can}}|_{\mathfrak{h}}(X; Y).$$

Множество R_+ положительных корней относительно S , состоящее из элементов вида $\alpha = \lambda_i - \lambda_j$, $i < j$, отождествляется при этом с множеством матриц вида $H_\alpha = H_i + \dots + H_j$, также имеющих только два ненулевых элемента: $\lambda_i = 1$ и $\lambda_j = -1$.

Рассмотрим стандартный базис в $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$, состоящий из матриц H_i (описанных выше), X_α и Y_α , $\alpha \in R_+$, где для $\alpha = \lambda_i - \lambda_j$, $i < j$, матрица X_α имеет единственный ненулевой элемент 1 на месте (i, j) , и $Y_\alpha = X_\alpha^T$. Матрицы H , X_α и Y_α связаны соотношениями

$$[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha, \quad [H, X_\alpha] = \alpha(H)X_\alpha, \quad [H, Y_\alpha] = -\alpha(H)Y_\alpha \quad \forall H \in \mathfrak{h}. \quad (5)$$

Пусть Γ – конечномерный неприводимый $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$ -модуль, P – множество его весов. Для каждого $\pi \in P$ обозначим через Γ^π соответствующее весовое подпространство, а число $m_\pi = \dim \Gamma^\pi$ назовем *кратностью веса* π . Известно, что P инвариантно относительно действия группы Вейля W , порожденной отражениями относительно корней, и что для любых $\pi \in P$ и $w \in W$ кратности весов π и $w(\pi)$ совпадают. Кроме того,

$$\Gamma = \bigoplus_{\pi \in P} \Gamma^\pi.$$

Покажем, что элементы матрицы билинейной формы $\text{Tr}(XY)$, где X и Y понимаются уже как операторы на Γ , в указанном выше базисе удовлетворяют следующим соотношениям:

- (i) $\text{Tr}(X_\alpha Y_\beta) = 0$, $\alpha \neq \beta$, $\text{Tr}(H_i X_\alpha) = \text{Tr}(H_i Y_\alpha) = 0$;
- (ii) $\text{Tr}(H_i^2) = \text{Tr}(H_j^2) = 2 \text{Tr}(X_\alpha Y_\alpha) \quad \forall i, j, \alpha$;
- (iii) $\text{Tr}(H_i H_j) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \text{Tr}(H_i^2), & \text{если } \alpha_i + \alpha_j \in R, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Это будет означать, что вся матрица задается одним ненулевым элементом, например, $\text{Tr}(H_1^2)$, и, следовательно, для всех неприводимых $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$ -модулей соответствующие матрицы пропорциональны. Справедливость предложения 1 будет следовать из полной приводимости конечномерных $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$ -модулей.

Несложная проверка показывает, что $X_\alpha(\Gamma^\pi) \subset \Gamma^{\pi+\alpha}$, $Y_\alpha(\Gamma^\pi) \subset \Gamma^{\pi-\alpha}$ и $H_i(\Gamma^\pi) \subset \Gamma^\pi$, откуда следует (i).

Оператор H_i действует на подпространстве Γ^π как гомотетия с коэффициентом $\pi(H_i)$, поэтому

$$\text{Tr}((H_i)^2) = \sum_{\pi \in P} \pi(H_i)^2 m_\pi.$$

Поскольку существует $w \in W$, переводящий H_i в H_α , мы имеем

$$\text{Tr}((H_\alpha)^2) = \sum_{\pi \in P} \pi(H_\alpha)^2 m_\pi = \sum_{\pi \in P} \pi(w(H_i))^2 m_{w(\pi)} = \text{Tr}((H_i)^2).$$

Далее, элементы H_α , X_α и Y_α порождают подалгебру $\mathfrak{g}_\alpha$, изоморфную $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, причем соотношения между ними те же, что и между H_0 , X_0 и Y_0 . В силу формулы (4), примененной к $\mathfrak{g}_\alpha$ -модулю Γ , имеем $\text{Tr}(H_\alpha^2) = 2 \text{Tr}(X_\alpha Y_\alpha)$. Это доказывает (ii).

Покажем справедливость (iii). Пусть $\alpha_i + \alpha_j = \alpha \in R$, тогда по свойствам базиса системы корней $\alpha \in R_+$. Имеем $H_i + H_j = H_\alpha$, и из равенства

$$\text{Tr}(H_\alpha^2) = \text{Tr}((H_i + H_j)^2) = \text{Tr}(H_i^2) = \text{Tr}(H_j^2)$$

легко вытекает требуемое. Пусть теперь $\alpha_i + \alpha_j \notin R$, тогда $(H_i, H_j) = 0$, и отражение s_i относительно H_i оставляет H_j неподвижным, а у H_i меняет знак. Оператор $H_i H_j$ действует на Γ^π как гомотетия с коэффициентом $\pi(H_i)\pi(H_j)$, следовательно,

$$\mathrm{Tr}(H_i H_j) = \sum_{\pi \in P} \pi(H_i)\pi(H_j)m_\pi = \sum_{\pi \in P} \pi(s_i(H_i))\pi(s_i(H_j))m_{s_i(\pi)} = -\mathrm{Tr}(H_i H_j),$$

откуда $\mathrm{Tr}(H_i H_j) = 0$. Это завершает доказательство предложения.

1.4. Доказательство теоремы 1 для $\mathrm{su}(3)$. Как известно [5], имеется взаимно однозначное соответствие между неприводимыми $\mathrm{sl}(r, \mathbb{C})$ -модулями и их старшими весами. При этом, если λ – старший вес неприводимого представления γ , то условие конечномерности γ состоит в том, чтобы все значения $\lambda(H_i)$, $i = 1, \dots, r-1$, были целыми неотрицательными числами. Это означает, что $\lambda = k_1\omega_1 + \dots + k_{r-1}\omega_{r-1}$, где $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \geq 0$, и ω_i – фундаментальные веса, определяемые равенствами $\omega_i(H_j) = \delta_{ij}$. По определению $c_2(\mathrm{can}) = 1$ и, очевидно, что для канонического представления $\mathrm{Tr}(H_1^2) = 2$. Следовательно, для представления γ имеем

$$c_2(\gamma) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\gamma(H_1)^2) = \frac{1}{2} \sum_{\pi \in P} \pi(H_1)^2 m_\pi \geq \frac{1}{2} \sum_{\pi \in \lambda^W} \pi(H_1)^2.$$

Здесь λ^W – орбита старшего веса относительно действия группы Вейля, а m_λ всегда равняется 1. Если $\lambda = k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ – старший вес представления γ алгебры $\mathrm{sl}(3, \mathbb{C})$, то последняя сумма может быть легко вычислена. Она равна $4(k_1^2 + k_2^2)$ при $k_1, k_2 > 0$ и $2k^2$, если одно из k_1, k_2 равно 0, а другое равно k . Пусть γ входит в набор представлений, на котором бета-функция неположительна, тогда $c_2(\mathrm{ad}) = 6 \geq c_2(\gamma)$, откуда в первом случае $k_1^2 + k_2^2 \leq 3$, т.е. $k_1 = k_2 = 1$ и $\gamma = \mathrm{ad}$, а во втором – имеется четыре возможности:

(k_1, k_2)	$(1, 0)$	$(2, 0)$	$(0, 1)$	$(0, 2)$
γ	can	$S^2(\mathrm{can})$	can^*	$S^2(\mathrm{can}^*)$
$c_2(\gamma)$	1	5	1	5

Это завершает доказательство.

1.5. Доказательство теоремы 1 для $\mathrm{su}(r)$. Утверждение а) очевидно, докажем б). В силу соотношений (5) имеем $\mathrm{ad} H_1(H_i) = [H_1, H_i] = 0$, $\mathrm{ad} H_1(X_\alpha) = [H_1, X_\alpha] = \alpha(H_1)X_\alpha$ и $\mathrm{ad} H_1(Y_\alpha) = [H_1, Y_\alpha] = -\alpha(H_1)Y_\alpha$. Вычисляя след оператора $(\mathrm{ad} H_1)^2$, получаем требуемое

$$c_2(\mathrm{ad}) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}((\mathrm{ad} H_1)^2) = 2r. \quad (6)$$

Утверждение в) получается применением общей формулы (3). Фундаментальные веса имеют вид $\omega_i = \lambda_1 + \dots + \lambda_i$, $1 \leq i \leq r-1$, причем $(\omega_i; \omega_k) = i(r-k)/r$ при $i \leq k$. Полусумма положительных корней, как нетрудно видеть, равна

$$\rho = \sum_{i=1}^{r-1} \omega_i.$$

Старшие веса представлений $\Lambda^k(\text{can})$ и $S^k(\text{can})$ равны соответственно ω_k и $k\omega_1$. Вычисляя коэффициенты гомотетии по формуле (2), имеем

$$(\omega_k; \omega_k + 2\rho) = \frac{k(r-k)(r+1)}{r} \quad \text{и} \quad (k\omega_1; k\omega_1 + 2\rho) = \frac{k(r+k)(r-1)}{r}.$$

В силу (3), если умножить эти числа соответственно на

$$\dim \Lambda^k(\text{can}) = \binom{r}{k} \quad \text{и} \quad \dim S^k(\text{can}) = \binom{r+k-1}{k},$$

а затем разделить на $r^2 - 1 = \dim \mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$, то получим

$$c_2(\Lambda^k(\text{can})) = \binom{r-2}{k-1} \quad \text{и} \quad c_2(S^k(\text{can})) = \binom{r+k}{k-1}. \quad (7)$$

При $k = 2$ из этих формул имеем $c_2(\Lambda^k(\text{can})) = r-2$ и $c_2(S^k(\text{can})) = r+2$, что ввиду (6) и (1) завершает доказательство.

§ 2. От полевых уравнений к алгебро-геометрическим проблемам

Теорема 1 показывает, что у нас есть три серии – а), б) и в), – имеющие место для любой $\mathfrak{su}(r)$. В этом параграфе мы рассмотрим первые две из них.

2.1. Для серии а) наши поля состоят из мультиплетов в присоединенном представлении. Мы пишем полевые уравнения для специального типа метрик, а именно, кэлеровых метрик, потому что наши вычисления будут относиться только к случаю алгебраических поверхностей, где нужные нам константы будут иметь алгебро-геометрический смысл и поэтому могут быть вычислены в рамках алгебраической геометрии. Для простоты мы будем рассматривать односвязный случай. Итак, пусть S – односвязная кэлерова поверхность и K – ее канонический класс. Конфигурационным пространством будет прямое произведение

$$\mathcal{A}(E) \times \Gamma(\text{ad } E \otimes K),$$

где $\mathcal{A}(E)$ – аффинное пространство $SU(r)$ -связностей в комплексном расслоении E на S ранга r с $c_1 = 0$ и $c_2 = k$, $\Gamma(\text{ad } E \otimes K)$ – пространство полей Хиггса–Хитчина. Тогда для точки $(a, \phi) \in \mathcal{A}(E) \times \Gamma(\text{ad } E \otimes K)$ полевые уравнения имеют вид

$$F_a^{2,0} = F_a^{0,2} = 0, \quad \bar{\partial}(\phi) = 0, \quad \omega \wedge F_a + [\phi, \bar{\phi}] = 0, \quad (8)$$

где $F_a^{i,j}$ – компоненты разложения Ходжа тензора кривизны F_a связности a и ω – кэлерова форма нашей метрики. Используя линеаризацию этих уравнений, легко показать, что для общей метрики пространство решений ориентируемо и конечно, так что для любого $k = c_2(E)$ мы получаем число $\#_k$ этих решений с учетом знака. Наша статсумма в этом случае имеет вид

$$Z_{(a)} = \sum_{k=0}^{\infty} \#_k q^k,$$

где, как обычно, $q = e^{2\pi i k \tau}$ (подробности см. в [8]).

Геометрический смысл уравнений (8) следующий: первое уравнение эквивалентно утверждению, что форма кривизны имеет тип $(1, 1)$, что эквивалентно заданию голоморфной структуры на E ; второе уравнение эквивалентно голоморфности поля Хиггса–Хитчина; и третье уравнение имеет смысл нулевого уровня отображения моментов для действия калибровочной группы, т.е. означает некоторые условия стабильности для голоморфной пары $(E, \phi: E \rightarrow E \otimes K)$.

Теперь предположим, что для нашей кэлеровой структуры на S это условие стабильности влечет зануление голоморфного поля Хиггса–Хитчина ϕ . Так будет, например, если канонический класс $K \leq 0$, т.е. если S – поверхность дель Пеццо или типа КЗ. В этом случае наша кэлерова метрика не является общей, так как система уравнений (8) сводится к уравнению автодуальности на связность a и многообразие модулей решений есть все пространство $\mathcal{M}_k(r)$ $SU(r)$ -инстантонов на S с зарядом k . Например, при $r = 2$ это многообразие имеет размерность $4k - 3$ для поверхностей дель Пеццо и $4k - 6$ для поверхностей типа КЗ. Для регуляризации задачи мы должны применить деформацию к нормальному конусу, как это описано в работе [9, гл. III]. В этом случае расслоение препятствий на $\mathcal{M}_k(r)$ имеет слоем коядро оператора $\bar{\partial}$, т.е. для точки $E \in \mathcal{M}_k(r)$ слой расслоения препятствий есть $H^1(\text{ad } E \otimes K)$ в силу изоморфизма Дольбо. Таким образом, расслоение препятствий для нашей задачи есть кокасательное расслоение $\Omega\mathcal{M}_k(r)$ в силу изоморфизма Кодaira–Спенсера. Согласно конструкции, изложенной в работе [9, гл. III], число решений нашей задачи есть

$$\#_k = c_{\text{top}}(\Omega\mathcal{M}_k(r)), \quad (9)$$

т.е. старший класс Чжэня кокасательного расслоения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Многообразие $\mathcal{M}_k(r)$ может быть некомпактным (например, это имеет место для $r = 2$), и мы должны его рассматривать как многообразие “с концами”. Мы должны оценить, какое число решений уходит на бесконечность по этим “концам” от общего числа решений, задаваемого топологической эйлеровой характеристикой компактификации Фрид–Уленбек многообразия $\mathcal{M}_k(r)$ (см. [10]), рассматриваемой как орбифолд. (К сожалению, этот анализ отсутствует в основополагающей работе [2], и читателю приходится проделывать его самостоятельно, пользуясь, как образцом, аналогичной задачей о выражении спин-полиномов через полиномы Дональдсона, первый шаг решения которой описан в [11].)

Таким образом, (после реализации программы, изложенной в замечании) статсумма для серии а) имеет вид

$$Z_{(a)} = \sum_{k=0}^{\infty} \chi(\overline{\mathcal{M}_k(r)}) q^k, \quad (10)$$

где χ – топологическая эйлерова характеристика $\overline{\mathcal{M}_k(r)}$ как орбифолда.

Тестирование этой суммы на модулярность, проведенное в [2] (для поверхностей типа КЗ и $\mathbb{CP}^2$), основывается на замечательной работе А. Клячко [12], выразившего коэффициенты ряда (10) в терминах арифметической функции Гурвица.

2.2. Перейдем к серии б). К сожалению, этот случай не описан в литературе, и мы рассмотрим его подробно.

Пусть M, g – гладкое, компактное, односвязное риманово многообразие. Рассмотрим связность Леви–Чивита на касательном расслоении. Выбор $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры дает нам пару комплексных эрмитовых расслоений $W^{\pm}$ ранга 2 с классом $c = c_1(\det W^{\pm})$.

Связность Леви–Чивита индуцирует $\text{SO}(3)$ -связности на $W^{\pm}$. Рассмотрим эрмитово расслоение E ранга r с унитарной связностью a , определенной с точностью до гомотетии. Кроме того, рассмотрим $U(1)$ -связность b на линейном расслоении $\det(E \otimes W^+)$.

Конфигурационным пространством наших полевых уравнений будет множество наборов $(a, b, \phi_1, \dots, \phi_{2r})$, где первый элемент – унитарная связность с точностью до гомотетии на E , второй – $U(1)$ -связность b на линейном расслоении $\det(E \otimes W^+)$ и ϕ_i – сечения тензорного произведения $E \otimes W^+$.

Напомним, что оператор Дирака $D_{a,b}$ – дифференциальный оператор на пространствах сечений $E \otimes W^+$, задающийся следующим образом. Ковариантная производная задает отображение

$$d_{a,b}: \Gamma(E \otimes W^+) \rightarrow \Gamma(E \otimes W^+) \otimes \Gamma(T^*M), \quad (11)$$

и последнее тензорное произведение сворачивается как

$$\Gamma(E \otimes W^+ \otimes T^*M) = \Gamma(E \otimes W^+ \otimes \text{Hom}(W^-, W^+)^*) = \Gamma(E \otimes W^-)$$

посредством клиффордова умножения. Композиция ковариантного дифференцирования (11) и свертки дает скрученный оператор Дирака

$$D_{a,b}: \Gamma(E \otimes W^+) \rightarrow \Gamma(E \otimes W^-), \quad (12)$$

и наши полевые уравнения имеют вид

$$D_{a,b}(\phi_i) = 0, \quad F_a^+ = \sum_i i \cdot (\phi_i \otimes \overline{\phi_i})_0, \quad (13)$$

где индекс 0 означает взятие бесследной части в $\text{End}(W^+)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно заметить, что эти уравнения имеют вид нулевого уровня отображения моментов гиперкэлеровой редукции относительно калибровочной группы. В частности, первое уравнение содержит интерпретацию нулевого уровня отображения моментов для голоморфной симплектической структуры.

Теперь мы подбираем расслоение E так, чтобы многообразие модулей $\mathcal{M}_c(E)$ орбит решений (13) было конечным. Пусть $\#(\mathcal{M}_c^g(E))$ – число решений с учетом знака, т.е. ориентации. Зависимость $\#(\mathcal{M}_c^g(E))$ от расслоения E – это зависимость от топологического типа этого расслоения. То есть мы можем записать

$$\#(\mathcal{M}_c^g(E)) = \#(\mathcal{M}_c^g(r, c_1, k)),$$

где, как обычно, $k = c_2(E)$.

Наша статсумма в этом случае имеет вид

$$Z_{(6)} = \sum_{k=0}^{\infty} \#(\mathcal{M}_c^g(r, c_1, k)) q^k,$$

где опять $q = e^{2\pi i k \tau}$ и метрика g является достаточно общей (для необщих метрик наше многообразие модулей может иметь параметры).

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно видеть, что наши уравнения задают мультиплет неабелевых монополей, обобщающих абелев монополь Зайберга–Виттена (см., например, [13]).

Напомним, что при описании серии а) мы сразу исходили из кэлеровой метрики, т.е. сводили задачу к чисто алгебро-геометрической проблеме. Чтобы сделать это же в серии б), мы должны действовать более аккуратно (см. следующий параграф). Здесь мы проиллюстрируем общую ситуацию на примере случая $r = 2$ и $M = \mathbb{CP}^2$ – топологически простейшей алгебраической поверхности.

Рассмотрим в качестве g стандартную метрику g_{FS} Фубини–Штуди. Эта метрика имеет положительную скалярную кривизну. Формула Вейценбока показывает, что в этом случае мультиплет скрученных гармонических спиноров $(\phi_1, \dots, \phi_4)$ должен быть равен $(0, \dots, 0)$, и полевое уравнение сводится к уравнению автодуальности. Многообразие модулей решений $\mathcal{M}_c^{g_{FS}}(2, c_1, k)$ совпадает с многообразием модулей инстантонов этого топологического типа. Арифметические вычисления следующего параграфа показывают, что единственная возможность для c_1 есть -1 и $\dim \mathcal{M}_c^{g_{FS}}(2, -1, k) = 4k - 4$.

Опять для регуляризации задачи мы должны применить деформацию к нормальному конусу, как это описано в работе [9, гл. III]. В этом случае расслоение препятствий на $\mathcal{M}_c^{g_{FS}}(2, -1, k)$ имеет слоем прямую сумму четырех коядер скрученного оператора Дирака (12). Как обычно, мы интерпретируем автодуальную связность как голоморфное стабильное расслоение E и оператор Дирака как прямую сумму $\bar{\partial} \oplus \bar{\partial}^*$ (см., например, [10]), т.е. коядро оператора Дирака есть пространство когерентных когомологий $H^1(E)$.

Таким образом, наше многообразие модулей $\mathcal{M}_c^{g_{FS}}(2, -1, k)$ есть многообразие модулей стабильных пучков без кручения данного топологического типа (следовательно, это многообразие компактно и гладко) и для точки $E \in \mathcal{M}_c^{g_{FS}}(2, -1, k)$ слой расслоения препятствий есть $H^1(E)^{\oplus 4}$. Согласно конструкции, изложенной в работе [9, гл. III], число решений нашей задачи есть

$$\#(\mathcal{M}_c^g(2, -1, k)) = c_{\text{top}}((\mathcal{H}^1)^{\oplus 4}),$$

где $\mathcal{H}^1$ – расслоение на многообразии модулей со слоем $H^1(E)$ и специально выбранной нормировкой (см. [6]).

В отличие от серии а) (см. замечание после формулы (9)) эта абсолютно точно поставленная задача успешно решается А. Л. Городенцевым и М. И. Леенсоном.

§ 3. Арифметика серии б)

Так же, как и в примере в конце предыдущего параграфа, мы интерпретируем многообразие модулей $\mathcal{M}_c^g(r, c_1, k)$ решений полевых уравнений как многообразие модулей стабильных пучков E без кручения данного топологического типа. Расслоение препятствий имеет слоем прямую сумму $2r$ коядер скрученного оператора Дирака (12), т.е. $H^1(E)^{\oplus 2r}$. Следовательно, чтобы наша задача имела конечное число решений, необходимо и достаточно равенство размерностей

$$\dim \mathcal{M}_c^g(r, c_1, k) = 2r \dim H^1(E). \quad (14)$$

Для поверхностей дель Пеццо это условие при помощи теоремы Римана–Роха может быть записано в терминах дискретных инвариантов (r, c_1, k) . Пусть S – поверхность

дель Пещо и K – ее канонический класс. Стабильность пучка E понимается в смысле Мамфорда–Такемото относительно $(-K)$, т.е. E не должен иметь подпучков меньшего ранга и большего или равного наклона $\mu = c_1 \cdot (-K)/r$. Основным нашим ограничением на топологические инварианты пучка является неравенство

$$-K^2 < \mu(E) < 0. \quad (15)$$

Если оно выполнено, то из свойств стабильности и двойственности Серра вытекает, что $H^0(E) = H^2(E) = 0$ и

$$\dim H^1(E) = -\chi(E) = k - \frac{1}{2}c_1 \cdot (c_1 - K) - r.$$

Далее, пространство $\text{Ext}^1(E, E)$ является формальным касательным пространством к $\mathcal{M}_c^g(r, c_1, k)$ в точке E . Из стабильности пучка E следует его простота, что эквивалентно $\dim \text{Hom}(E, E) = 1$. Наконец, $\dim \text{Ext}^2(E, E) < \dim \text{Hom}(E, E)$ в силу двойственности Серра и обильности $(-K)$ (см. [14]), поэтому $\text{Ext}^2(E, E) = 0$. Таким образом,

$$\dim \mathcal{M}_c^g(r, c_1, k) = -\chi(E, E) = -\chi(E^* \otimes E) = 2rk - (r-1)c_1^2 - r^2 + 1. \quad (16)$$

Учитывая два последних равенства, (14) принимает вид

$$c_1^2 - rc_1 \cdot K + r^2 + 1 = 0. \quad (17)$$

Особенно интересные решения этого уравнения получаются на комплексной проективной плоскости.

ТЕОРЕМА 2. *Стабильный пучок E на $\mathbb{P}^2$, дискретные инварианты которого удовлетворяют неравенству $-3 < c_1/r < 0$, обладает свойством (14) тогда и только тогда, когда тройка чисел $(r, -c_1, 1)$ является решением уравнения Маркова*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\mathbb{P}^2$, очевидным образом, $c_1 \cdot K = -3c_1$, откуда легко вытекает требуемое ввиду вышеприведенных рассуждений.

Таким образом, числа r и $-c_1$ являются числами Маркова из “одной ветви дерева Маркова”. Выпишем несколько пар (r, c_1) в предположении, что $r > -c_1$:

$$(2, -1), (5, -2), (13, -5), (34, -13), (89, -34), (233, -89), \dots$$

Пара, следующая за (r, c_1) в этой последовательности, имеет вид $(3r + c_1, -r)$, что согласуется с перестройками решений уравнения (18), состоящими в переходе ко второму корню квадратного уравнения по одной из переменных (в нашем случае $(-c_1)$) при фиксированных двух остальных (см., например, [15]). Как известно [15], ранги исключительных расслоений на $\mathbb{P}^2$, составляющих виток спирали, образуют решение уравнения (18). И наоборот, для любого решения этого уравнения существует бесконечно много (за счет подкрутки) витков с такими рангами расслоений. При этом перестройки спиралей согласуются с перестройками решений уравнения (18). Множество решений с фиксированным значением 1 третьей переменной, полученное в теореме 2, соответствует множеству витков вида $(E, F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Наблюдаемая здесь связь с исключительными расслоениями, с одной стороны, является основным поводом для публикации этой статьи, а, с другой стороны, придает теории исключительных расслоений новый геометрический смысл.

Рассмотрим теперь в качестве нашей поверхности квадрику $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Ее группа Пикара стандартным образом отождествляется с $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, в соответствии с этим мы полагаем $c_1(E) = (a, b)$. Уравнение (17) переписывается в виде

$$r^2 + 2r(a + b) + 2ab + 1 = 0. \quad (19)$$

Отсюда видно, что r обязательно нечетно (отметим, что ранги исключительных расслоений на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ также нечетны). Более того, для любого нечетного $r > 0$ существуют решения вида

$$(r, (a, b)) = (1 - 2a, (a, -1)), \quad \text{где } a = 0, -1, -2, \dots \quad (20)$$

Наклон расслоения E с такими рангом и c_1 равен $2(a - 1)/(1 - 2a)$, он удовлетворяет условию $-2 \leq \mu(E) < -1$, в то время как $K^2 = 8$, т.е. неравенство (15) выполнено. Следовательно, справедливо также и условие на размерности (14).

Приведенное выше множество решений является ни чем иным как подмножеством множества целых точек, лежащих на одной из прямолинейных образующих однополостного гиперboloида. Действительно, уравнение (19) равносильно уравнению $(r + a + b)^2 - a^2 - b^2 + 1 = 0$. Сделав стандартные преобразования

$$(r + a + b)^2 - a^2 = b^2 - 1 \iff (r + b)(r + 2a + b) = (b - 1)(b + 1),$$

получаем уравнения двух семейств образующих гиперboloида

$$\begin{cases} k_1(r + b) = l_1(b - 1), \\ l_1(r + 2a + b) = k_1(b + 1), \end{cases} \quad \begin{cases} k_2(r + b) = l_2(b + 1), \\ l_2(r + 2a + b) = k_2(b - 1). \end{cases}$$

Здесь $[k_i : l_i] \in \mathbb{RP}^1$ – параметры семейств. Зафиксировав один из них (разумеется, с рациональным отношением $[k_i : l_i]$), легко получить все точки с целыми координатами на соответствующей прямой стандартными средствами аналитической геометрии. В частности, решения (20) лежат на прямой из второго семейства, имеющей $[k_2 : l_2] = [0 : 1]$. В качестве примера приведем еще одну серию целочисленных решений уравнения (19), для которых $r > 0$,

$$(r, (a, b)) = (3 + 4t, (-7 - 12t, -4 - 5t)), \quad \text{где } t = 0, 1, 2, \dots,$$

лежащую на прямой первого семейства с $[k_1 : l_1] = [5 : 1]$. Начальной точкой этой серии является $(3, (-7, -4))$. Многообразие модулей полустабильных пучков E на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ с такими инвариантами (r, c_1) и $c_2 \geq 20$ исследовано в работе [7] именно в связи с тем, что для E справедливо (14). Нетрудно убедиться, что и для пучков E , имеющих в качестве ранга и c_1 остальные решения из этой серии, выполняется (15) и, следовательно, и (14).

§ 4. Алгебро-геометрическая модель для серии в)

Здесь мы предполагаем, что E – стабильное расслоение ранга $r \geq 3$ на поверхности дель Пеццо и

$$-\frac{1}{2}K^2 < \mu(E) < 0. \quad (21)$$

Пространства $H^0(S^2E)$ и $H^0(\Lambda^2E)$ естественно отождествляются с пространствами соответственно симметрических и кососимметрических морфизмов расслоений $E^* \rightarrow E$. Но из свойств стабильности и неравенства $\mu(E) < 0 < \mu(E^*)$ следует, что $\text{Hom}(E^*, E) = 0$. Поэтому и $H^0(S^2E) = H^0(\Lambda^2E) = 0$.

В силу двойственности Серра $H^2(S^2E)^* = H^0(S^2E^* \otimes K)$, причем последнее пространство естественно отождествляется с пространством морфизмов расслоений $\varphi: E \rightarrow E^* \otimes K$, обладающих свойством $\varphi^*(K) = \varphi$. Поскольку $0 < \mu(E^*) < K^2/2$, имеем $\mu(E^* \otimes K) < -K^2/2 < \mu(E)$, откуда следует, что $\text{Hom}(E, E^* \otimes K) = 0$, и, таким образом, $H^2(S^2E) = 0$. По аналогичным соображениям и $H^2(\Lambda^2E) = 0$. Следовательно, размерности пространств H^1 от симметрического и внешнего квадрата расслоения E могут быть выражены через дискретные инварианты (r, c_1, k) по теореме Римана–Роха:

$$\begin{aligned} \dim H^1(S^2E) &= -\chi(S^2E) = (r+2)k - \frac{r+3}{2}c_1^2 + \frac{r+1}{2}c_1 \cdot K - \frac{r(r+1)}{2}, \\ \dim H^1(\Lambda^2E) &= -\chi(\Lambda^2E) = (r-2)k - \frac{r-1}{2}c_1^2 + \frac{r-1}{2}c_1 \cdot K - \frac{r(r-1)}{2}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (16), заключаем, что необходимое условие на размерности

$$\dim \mathcal{M}(r, c_1, k) = \dim H^1(S^2E) + \dim H^1(\Lambda^2E) \quad (22)$$

эквивалентно уравнению на r и c_1 :

$$2c_1^2 - rc_1 \cdot K + 1 = 0. \quad (23)$$

Легко убедиться, что на $\mathbb{P}^2$ это уравнение не имеет решений. Действительно, в этом случае $c_1 \cdot K = -3c_1$, и дискриминант (23) относительно c_1 равен $9r^2 - 8$. Это не может быть квадратом целого числа при $r \geq 3$, так как разность между соседними квадратами $9r^2 - (3r-1)^2 = 6r-1 > 16$.

На $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ решений также нет в силу того, что $c_1 \cdot K$ в этом случае четно.

Рассмотрим теперь поверхность X_m – плоскость с m раздутыми точками общего положения, где $1 \leq m \leq 8$. Имеем

$$\text{Pic } X_m = \mathbb{Z}\ell_0 \oplus \mathbb{Z}\ell_1 \oplus \mathbb{Z}\ell_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\ell_m,$$

где ℓ_0 – прообраз прямой, поднятой с $\mathbb{P}^2$, и ℓ_i , $1 \leq i \leq m$, – исключительные кривые, являющиеся прообразами раздуваемых точек. Канонический класс поверхности X_m имеет вид

$$K = -3\ell_0 + \sum_{i=1}^m \ell_i,$$

и форма пересечения задается соотношениями

$$\ell_0^2 = 1, \quad \ell_i^2 = -1, \quad 1 \leq i \leq m; \quad \ell_i \cdot \ell_j = 0, \quad i \neq j.$$

Обозначив

$$c_1 = a\ell_0 + \sum_{i=1}^m b_i \ell_i,$$

имеем

$$c_1 \cdot K = -3a - \sum_{i=1}^m b_i, \quad c_1^2 = a^2 - \sum_{i=1}^m b_i^2.$$

Пусть $c_1 \cdot K = A$, тогда из (23) находим $c_1^2 = (rA - 1)/2$, и вместе с (21) это дает систему условий

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m b_i + 3a + A = 0, \\ \sum_{i=1}^m b_i^2 = a^2 - \frac{1}{2}(rA - 1), \end{cases} \quad 0 < A < \frac{r}{2}(9 - m). \quad (24)$$

Первое уравнение задает гиперплоскость в евклидовом пространстве с координатами $(b_1, \dots, b_m)$, а второе – сферу с центром в начале координат. Покажем, что во всех случаях, кроме одного, расстояние $d = |3a + A|/\sqrt{m}$ от начала координат до гиперплоскости больше радиуса R сферы. Рассмотрим

$$m(d^2 - R^2) = (9 - m)a^2 + 6a + A^2 + \frac{m}{2}(rA - 1).$$

Относительно a это квадратный трехчлен с дискриминантом

$$D = \frac{m}{2}(rA - 1) \left(m - 9 + \frac{2A^2}{rA - 1} \right).$$

При $0 < m < 9 - 2A^2/(rA - 1)$ дискриминант отрицательный, поэтому всегда $d^2 - R^2 > 0$, и система (24) решений не имеет. Следовательно, если решения есть, то число раздутых точек и $c_1 \cdot K$ связаны соотношением $m \geq 9 - 2A^2/(rA - 1)$. С другой стороны, из третьего неравенства системы (24) следует, что $m < 9 - 2A/r$, т.е. m лежит в числовом полуинтервале

$$I = \left[9 - \frac{2A^2}{rA - 1}; 9 - \frac{2A}{r} \right).$$

Поскольку A и r целые, то правые концы I либо целые, либо отстоят от целых чисел не менее, чем на $1/r$, в то время как длина I равна

$$\frac{2A^2}{rA - 1} - \frac{2A}{r} = \frac{2}{r(r - \frac{1}{A})} \leq \frac{2}{r(r - 1)},$$

что не превосходит $2/(3r)$ при $r \geq 4$. Таким образом, при $r \geq 4$ промежуток I не содержит целых чисел, и система (24) решений не имеет. При $r = 3$ непосредственным

подсчетом убеждаемся, что имеется единственное решение: $m = 8$, $A = 1$, $a = -3$, $b_1 = \dots = b_8 = 1$. Итак, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Стабильный пучок E ранга 3 на плоскости с m раздутыми точками удовлетворяет условиям (21) и (22) тогда и только тогда, когда $m = 8$ и $c_1(E) = K$.*

Отметим, что ввиду взаимной простоты $c_1(E) \cdot K$ и $r(E)$ многообразие модулей стабильных пучков с данными инвариантами компактно и гладко, следовательно, мы имеем корректно поставленную алгебро-геометрическую задачу для проверки гипотезы S -двойственности. А именно, пусть $\mathcal{S}_k$ и $\mathcal{L}_k$ – расслоения на $\mathcal{M}(3, K, k)$ со слоем соответственно $H^1(S^2 E)$ и $H^1(\Lambda^2 E)$. Задача состоит в тестировании на модулярность функции

$$\sum_k c_{\text{top}}(\mathcal{S}_k \oplus \mathcal{L}_k) q^k.$$

Московский институт электроники и математики

Поступило

07.10.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Montonen C., Olive D. Magnetic monopoles as gauge particle // Phys. Lett. 72B. 1977. P. 117–132.
- [2] Vafa G., Witten E. A strong coupling test of S -duality // Nuclear Phys. B. 1995. V. 431. P. 3–77.
- [3] Argyres Ph. C., Plesser M. R., Seiberg N. The moduli space of Vacua of $N = 2$ SUSY QCD and duality in $N = 2$ SUSY QCD // Nuclear Phys. B. 1996. V. 471. P. 159–194.
- [4] Donagi R., Witten E. Supersymmetric Yang–Mills theory and integrable systems // Nuclear Phys. B. 1996. V. 460. P. 299–334.
- [5] Fulton W., Harris J. Representation Theory. 1st Course. Berlin: Springer Verlag, 1990.
- [6] Gorodentsev A. L., Leenson M. I. How to calculate the correlation function in twisted SYM $N = 2$, $N_f = 4$ QFT on projective plane. Preprint № 96–49. Bohn: Max-Planck-Institut für Mathematik, 1996.
- [7] Kuleshov S. A. Moduli Space of Bundles on a Quadric. Preprint № 18: Warwick, 1996.
- [8] Witten E. Monopoles and four-manifolds // Math. Res. Letts. 1994. V. 1. P. 769–796.
- [9] Пидстригач В., Тюрин А. Н. Инварианты гладкой структуры алгебраической поверхности, задаваемые оператором Дирака // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 52. №2. С. 279–371.
- [10] Donaldson S., Kronheimer P. The Geometry of Four-Manifolds. Oxford: Clarendon Press, 1990.
- [11] Leung W.-M. R. On Spin^C-Invariants of Four-Manifolds. Thesis Ph. D. Oxford: Magdalen College, 1995.
- [12] Клячко А. А. Модули векторных расслоений и числа классов // Функцион. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. №1. С. 81–83.
- [13] Тюрин Н. А. Необходимое и достаточное условие деформации B -монополя в инстантон // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. №1. С. 211–224.
- [14] Кулешов С. А., Орлов Д. О. Исключительные пучки на поверхностях дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. №3. С. 53–87.
- [15] Gorodentsev A. L., Rudakov A. N. Exceptional vector bundles on projective spaces // Duke Math. J. 1987. V. 54. P. 115–130.