Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Лабутин, Интегральное представление функций и вложение пространств Соболева на областях с нулевыми углами, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 2, 201–219

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1494>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:24:52

УДК 517.51

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ВЛОЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА НА ОБЛАСТЯХ С НУЛЕВЫМИ УГЛАМИ

Д. А. Лабутин

Вводятся некоторые классы областей $\mathbb{R}^n$ с нулевыми углами. Для областей такого типа устанавливаются вложения пространств Соболева $W_p^{(l)}(G) \hookrightarrow L_q(G)$, $l \in \mathbb{N}$. При этом требуются оценки некоторых операторов в пространствах суммируемых функций. Эти операторы не оцениваются через потенциалы Рисса или их анизотропные аналоги.

Библиография: 15 названий.

В [1], [2] С. Л. Соболевым была доказана теорема вложения

$$W_p^{(l)}(G) \hookrightarrow L_q(G), \quad l \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

для области $G \subset \mathbb{R}^n$ с условием конуса при $1 < p \leq q < \infty$, $l - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q}$, и в некоторых случаях при $p = 1$, $q = \infty$. Позднее эти результаты распространялись на области более общего вида разными математиками [3]–[7]. О. В. Бесовым в [7] для более широкого класса областей (областей с условием распадающегося гибкого конуса) получены вложения вида (1), содержащие соответствующие результаты работ [1]–[6]. Область с условием гибкого конуса [6], [7] или с условием распадающегося гибкого конуса может быть устроена достаточно сложно [5, с. 270], однако, она не может иметь нулевых углов. Важно подчеркнуть, что для области с условием распадающегося гибкого конуса соотношения параметров l, p, q в теореме вложения вида (1) те же, что и в случае $G = \mathbb{R}^n$.

Такие соотношения для вложений типа (1) не имеют места, если G имеет нулевые углы. В работе [8] выделен некоторый класс областей с нулевыми углами. Для областей этого класса там сформулирована теорема вложения вида (1), но с “худшим” (меньшим) показателем q , чем для $G = \mathbb{R}^n$. При этом показано, что для рассматриваемого класса областей его нельзя увеличить. Отметим, что в выводе основного интегрального представления в [8] имеется неточность, доказательство же сохраняется лишь для $\lambda > l$ и для целых $\lambda = 1, \dots, l$.

В настоящей статье вводится новый класс областей, более широкий, чем в [8]. Для областей этого класса доказаны вложения вида (1), содержащие соответствующие результаты [8]. Основные результаты работы сформулированы в § 1. В § 3 выводится интегральное представление по гибкому вырожденному конусу, являющееся модификацией представления из [9]. В § 4 оцениваются полученные интегральные операторы.

Следует заметить, что в рассматриваемом случае эти операторы не оцениваются через потенциалы Рисса или их анизотропные аналоги. При этом мы часто опираемся на утверждения геометрического характера, собранные в § 2. Основные результаты доказаны в § 5. Некоторые понятия и утверждения даны не в максимальной общности. Возможные обобщения и некоторые другие вопросы обсуждаются в § 6.

§ 1. Обозначения, определения, описание основных результатов

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n -мерное арифметическое евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$, $\{e^i\}_{i=1}^n$ – стандартный базис в нем. Далее в статье фиксировано $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Для $a > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ через $B(x, a) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < a\}$ обозначим шар с центром в x радиуса a . Для $E \subset \mathbb{R}^n$ $\text{mes } E$ – мера Лебега E , $\chi(E, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$ – индикатор E , $E_h = \{x \in E : \text{dist}(x, \partial E) > h\}$. Для $E, F \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^1$ пусть $E \pm aF = \{z : z = x \pm ay, x \in E, y \in F\}$. Для измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $L_p(E)$, $1 \leq p \leq \infty$, лебегово пространство функций, $L_p = L_p(\mathbb{R}^n)$. Для $f : E \rightarrow \mathbb{R}^1$ пусть

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p(E)} &= \left(\int |f_0(x)|^p dx \right)^{1/p} && \text{при } 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_{L_\infty(E)} &= \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f_0(x)| && \text{при } p = \infty, \end{aligned}$$

где

$$f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad f_0|_E = f, \quad f_0|_{\mathbb{R}^n \setminus E} = 0.$$

Здесь и далее, если не указана область интегрирования, подразумевается интегрирование по $\mathbb{R}^n$. При $t \geq 0$ $\mu(f, t) = \text{mes}\{x \in E : |f(x)| > t\}$ – функция распределения для f . Очевидно, $\mu(f, \cdot) = \mu(f_0, \cdot)$. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Для открытого множества $G \subset \mathbb{R}^n$, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^1$, $1 \leq p \leq \infty$, пусть $D^\alpha f$ – обобщенная по Соболеву производная, $W_p^{(l)}(G)$ – пространство Соболева с нормой

$$\|f\|_{W_p^{(l)}(G)} = \|f\|_{L_p(G)} + \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_{L_p(G)}.$$

Введем еще множества $C(G, \text{loc})$, $C^1(G, \text{loc})$, $C^\infty(G, \text{loc})$. Они состоят соответственно из функций непрерывных, непрерывно и бесконечно дифференцируемых на G . Через $C(G)$ обозначим банахово пространство функций класса $C(G, \text{loc})$ с конечной нормой $\|\cdot\|_{L_\infty(G)}$. Для банаховых пространств X и Y через $\mathcal{L}(X, Y)$ обозначим множество линейных ограниченных операторов, отображающих X в Y .

Спрямолируемую кривую $x = \rho(s) = (\rho_1(s), \dots, \rho_n(s))$, $0 \leq s \leq S$ (здесь и далее параметр s – длина дуги), будем называть $\hat{\delta}$ -допустимой, $\hat{\delta} > 0$, если выполнены условия:

- 1) $\rho_i(s)$ абсолютно непрерывна на $[0, S]$ и $\rho_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$;
- 2) для любых $s_1, s_2 \in [0, S]$ $|\rho(s_1) - \rho(s_2)| \geq \hat{\delta}|s_1 - s_2|$.

Пусть $\lambda \geq 1$, $\delta > 0$, $\rho(s)$, $0 \leq s \leq S$, – некоторая $\hat{\delta}$ -допустимая кривая. Множество $V_\lambda(S, \rho, \delta) = \bigcup_{0 \leq s \leq S} (\rho(s) + \delta s^\lambda B(0, 1))$ будем называть λ -вырожденным (гибким) конусом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Область $G \subset \mathbb{R}^n$ будем называть областью с условием гибкого λ -вырожденного конуса, $\lambda \geq 1$, если существуют положительные $S, \delta, \hat{\delta}$ такие, что для любого $x \in G$ найдется $\hat{\delta}$ -допустимая кривая $\rho(s) = \rho(x, s)$, $0 \leq s \leq S$, для которой $x + V_\lambda(S, \rho, \delta) \subset G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Область $G \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *областью с условием непрерывно гибкого λ -вырожденного конуса*, $\lambda \geq 1$, если она удовлетворяет условию гибкого λ -вырожденного конуса, и при этом существует $\tilde{\delta} > 0$, для которого кривые из определения 1 можно подчинить дополнительному требованию:

$$|\rho(x, s) - \rho(y, s)| \leq \tilde{\delta} |x - y| s^{\lambda-1}, \quad 0 \leq s \leq S, \quad x, y \in G.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Область $G \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *областью с условием изогнутого λ -вырожденного конуса*, $\lambda \geq 1$, если она удовлетворяет условию гибкого λ -вырожденного конуса, причем существует конечное число J открытых множеств G_j и $\hat{\delta}$ -допустимых кривых $\rho^{(j)}$ таких, что $G = \bigcup_{j=1}^J G_j = \bigcup_{j=1}^J (G_j + V_\lambda(S, \rho^{(j)}, \delta))$.

Эти определения обсуждаются в § 6. Основные результаты работы можно сформулировать в виде двух теорем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию гибкого λ -вырожденного конуса, $\lambda \geq 1$, $0 < \frac{1}{p} < \frac{1}{\lambda(n-1)+1}$. Тогда $W_p^{(1)}(G) \hookrightarrow C(G)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию непрерывно гибкого или изогнутого λ -вырожденного конуса, $\lambda \geq 1$, $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Тогда

- 1) если $1 > \frac{1}{p} > \frac{l}{\lambda(n-1)+1}$, то $W_p^{(l)}(G) \hookrightarrow L_q(G)$ при $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{l}{\lambda(n-1)+1}$;
- 2) если $1 = \frac{1}{p} \geq \frac{l}{\lambda(n-1)+1}$ или $1 \geq \frac{1}{p} = \frac{l}{\lambda(n-1)+1}$, то $W_p^{(l)}(G) \hookrightarrow L_q(G)$ при $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{l}{\lambda(n-1)+1}$;
- 3) если $\frac{l}{\lambda(n-1)+1} > \frac{1}{p} > 0$, то $W_p^{(l)}(G) \hookrightarrow C(G)$.

Неулучшаемость этих теорем обсуждается в § 6. Если в определении 3 считать $\rho^{(j)}$, $j = 1, \dots, J$, отрезками, а область G ограниченной, то получается класс областей, для которых в [8] сформулирована теорема вложения вида (1) при соотношениях теоремы 2 в случае $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{l}{\lambda(n-1)+1}$ (случай предельного показателя $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{l}{\lambda(n-1)+1}$ в [8] не рассмотрен). При этом приведенное в [8] доказательство верно лишь при $\lambda > l$ и при целых $\lambda = 1, \dots, l$. При $\lambda = 1$ области из определений 1–3 удовлетворяют условию гибкого конуса [6] и не имеют нулевых углов. В этом случае теоремы 1, 2 содержатся в более полных результатах [5]–[7].

§ 2. Вспомогательные геометрические леммы

На протяжении всего этого параграфа $\rho(s)$, $0 \leq s \leq S$, – некоторая фиксированная $\hat{\delta}$ -допустимая кривая, $\lambda \geq 1$, $\delta > 0$. Положим

$$V_\lambda(t, \rho, \delta) = \bigcup_{0 < s \leq t} (\rho(s) + \delta s^\lambda B(0, 1)), \quad 0 < t \leq S. \quad (2.1)$$

Очевидно,

$$V_\lambda(t, \rho, \delta_1) \subset V_\lambda(t, \rho, \delta_2), \quad 0 < \delta_1 < \delta_2, \quad 0 < t \leq S. \quad (2.2)$$

ЛЕММА 1. Для λ -вырожденного конуса $V_\lambda(S, \rho, \delta)$, $\lambda \geq 1$, существует $\delta^* \in (0, \delta]$ такое, что

$$(V_\lambda(S, \rho, \delta^*) \cap B(0, \hat{\delta}t/2)) \subset V_\lambda(t, \rho, \delta^*) \quad \text{при } 0 < t \leq S.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$0 < \delta^* < \min \left\{ \delta, \frac{\widehat{\delta}}{2S^{\lambda-1}} \right\}.$$

Тогда при любом $s \in (0, S]$ выполнено

$$\delta^* s^\lambda = \delta^* S^\lambda \left(\frac{s}{S} \right)^\lambda < \frac{\widehat{\delta}}{2S^{\lambda-1}} S^\lambda \left(\frac{s}{S} \right)^\lambda = \frac{\widehat{\delta}s}{2}.$$

Отсюда следует, что для любого $x \in B(0, 1)$ при $s \in (0, S]$

$$|\rho(s) + \delta^* s^\lambda x| > |\rho(s)| - \delta^* s^\lambda > \widehat{\delta}s - \frac{\widehat{\delta}s}{2} = \frac{\widehat{\delta}s}{2}.$$

Выясним теперь, какая часть $V_\lambda(S, \rho, \delta^*)$ лежит в $B(0, r)$, $r \in (0, \widehat{\delta}S/2]$. При $s \in (2r/\widehat{\delta}, S]$, $x \in B(0, 1)$ имеем $|\rho(s) + \delta^* s^\lambda x| > \widehat{\delta}s/2 > r$. Следовательно,

$$(V_\lambda(S, \rho, \delta^*) \cap B(0, r)) \subset V_\lambda(2r/\widehat{\delta}, \rho, \delta^*).$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Уменьшив при необходимости δ до δ^* из леммы 1, будем до конца статьи считать в определении вырожденного конуса $V_\lambda(S, \rho, \delta)$ δ таким, что при некотором $\varkappa \in (0, 1)$

$$(V_\lambda(S, \rho, \delta) \cap B(0, \varkappa t)) \subset V_\lambda(t, \rho, \delta) \quad \text{при } 0 < t \leq S. \quad (2.3)$$

Благодаря (2.2), этим мы не усилим требования определений 1–3.

Лемма 2 нам потребуется для доказательства леммы 3.

ЛЕММА 2. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_m \leq S$, $e \in \mathbb{R}^n$, $|e| = 1$, $\delta > 0$. Тогда $\text{mes} \bigcup_{k=1}^m B(\rho(s_k), \delta s_k) \leq \text{mes} \bigcup_{k=1}^m B(s_k e, \delta s_k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Так как $|\rho(s_1) - \rho(s_2)| \leq |s_1 - s_2| = |s_1 e - s_2 e|$, то при $m = 2$ утверждение очевидно.

Пусть утверждение верно для $m - 1$ вместо m , $m - 1 \in \mathbb{N}$, $m - 1 \geq 2$. Положим

$$A_m = \bigcup_{k=2}^m B(s_k e, \delta s_k), \quad \widetilde{A}_m = \bigcup_{k=2}^m B(\rho(s_k), \delta s_k).$$

Учитывая, что по предположению индукции $\text{mes} \widetilde{A}_m \leq \text{mes} A_m$, имеем

$$\begin{aligned} \text{mes} \bigcup_{k=1}^m B(\rho(s_k), \delta s_k) &= \text{mes} (B(\rho(s_1), \delta s_1) \setminus \widetilde{A}_m) + \text{mes} \widetilde{A}_m \\ &\leq \text{mes} (B(\rho(s_1), \delta s_1) \setminus B(s_2 e, \delta s_2)) + \text{mes} A_m \\ &\leq \text{mes} (B(s_1 e, \delta s_1) \setminus B(s_2 e, \delta s_2)) + \text{mes} A_m. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Мы покажем, что

$$B(s_1 e, \delta s_1) \setminus B(s_2 e, \delta s_2) = B(s_1 e, \delta s_1) \setminus A_m. \quad (2.5)$$

Тогда из (2.4), (2.5) будем иметь

$$\text{mes} \bigcup_{k=1}^m B(\rho(s_k), \delta s_k) \leq \text{mes}(B(s_1 e, \delta s_1) \setminus A_m) + \text{mes} A_m = \text{mes} \bigcup_{k=1}^m B(s_k e, \delta s_k),$$

что и требовалось доказать. Таким образом, осталось лишь установить (2.5). Для этого достаточно показать, что

$$(B(t_1 e, \delta t_1) \cap B(t_2 e, \delta t_2)) \subset B(te, \delta t), \quad (2.5')$$

если $t_1 \leq t_2$, $t = \alpha t_1 + \beta t_2$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Покажем, что (2.5') имеет место. Действительно, пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi - t_i e| < \delta t_i$, $i = 1, 2$. Тогда $|\xi - te| = |\xi(\alpha + \beta) - (\alpha t_1 + \beta t_2)e| \leq \alpha|\xi - t_1 e| + \beta|\xi - t_2 e| < \delta(\alpha t_1 + \beta t_2) = \delta t$, следовательно, $\xi \in B(te, \delta t)$. Лемма доказана.

Определим при $\lambda \geq 1$, $\delta > 0$ множество

$$V_\lambda^*(t, \rho, \delta) = \bigcup_{t/2 \leq s \leq t} (\rho(s) + \delta s^\lambda B(0, 1)), \quad 0 < t \leq S. \quad (2.6)$$

Будем до конца этого параграфа через C обозначать положительные постоянные (не обязательно одинаковые в различных случаях), зависящие лишь от размерности пространства, λ , δ и характеристик кривой ρ (т.е. от S и δ).

ЛЕММА 3. Пусть $\delta S^{\lambda-1} < 1$. Тогда для вырожденного конуса $V_\lambda(S, \rho, \delta)$ и множества $V_\lambda^*(t, \rho, \delta)$ из (2.6) справедливы оценки:

- (i) $\text{mes}(V_\lambda(S, \rho, \delta) \cap B(0, t)) \leq C(\min\{t, S\})^{\lambda(n-1)+1}$, $t > 0$;
- (ii) $\text{mes}(V_\lambda(S, \rho, \delta) \cap B(0, t)) \geq C(\min\{t, S\})^{\lambda(n-1)+1}$, $t > 0$;
- (iii) $\text{mes} V_\lambda^*(t, \rho, \delta) \leq C t^{\lambda(n-1)+1}$, $0 < t \leq S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим (i). В силу (2.3) для этого достаточно установить, что

$$\text{mes} V_\lambda(t, \rho, \delta) \leq C t^{\lambda(n-1)+1}, \quad 0 < t \leq S. \quad (2.7)$$

Попутно заметим, что из (2.6), (2.1), (2.7) сразу следует и (iii). Докажем (2.7). Очевидно, что $V_\lambda(t, \rho, \delta) \subset V_1(t, \rho, t^{\lambda-1}\delta)$, так что

$$\text{mes} V_\lambda(t, \rho, \delta) \leq \text{mes} V_1(t, \rho, t^{\lambda-1}\delta). \quad (2.8)$$

Для $e = e^1$, $\delta, t > 0$ положим

$$V_1(t, e, \delta) = \bigcup_{0 < s \leq t} (se + \delta s B(0, 1)).$$

Покажем, что

$$\text{mes} V_1(t, \rho, t^{\lambda-1}\delta) \leq \text{mes} V_1(t, e, t^{\lambda-1}\delta). \quad (2.9)$$

Составим последовательность $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ всех рациональных чисел из $(0, t]$. Легко видеть, что

$$V_1(t, \rho, t^{\lambda-1}\delta) = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(\rho(r_k), r_k \delta t^{\lambda-1}), \quad V_1(t, e, t^{\lambda-1}\delta) = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(r_k e, r_k \delta t^{\lambda-1}).$$

Обозначим

$$M_k = \bigcup_{j=1}^k B(r_j e, r_j \delta t^{\lambda-1}), \quad \widetilde{M}_k = \bigcup_{j=1}^k B(\rho(r_j), r_j \delta t^{\lambda-1}),$$

где $k \in \mathbb{N}$. Согласно лемме 2 $\text{mes } \widetilde{M}_k \leq \text{mes } M_k \leq \text{mes } V_1(t, e, t^{\lambda-1} \delta)$, следовательно,

$$\text{mes } V_1(t, \rho, t^{\lambda-1} \delta) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\text{mes } \widetilde{M}_k) \leq \text{mes } V_1(t, e, t^{\lambda-1} \delta),$$

и неравенство (2.9) доказано.

Оценим теперь $\text{mes } V_1(t, e, t^{\lambda-1} \delta)$. Так как $\delta S^{\lambda-1} < 1$, то $V_1(t, e, t^{\lambda-1} \delta) \subset H(t)$, $0 < t \leq S$, где положено $H(t) = \{x = (x_1, \bar{x}) \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 < 2t, |\bar{x}| < \delta t^\lambda\}$. Поэтому

$$\text{mes } V_1(t, e, t^{\lambda-1} \delta) \leq \text{mes } H(t) \leq C t^{\lambda(n-1)+1}. \quad (2.10)$$

Из (2.8)–(2.10) следует (2.7).

Установим (ii). По условию леммы $|\rho(s)| + \delta s^\lambda \leq (1 + \delta S^{\lambda-1})s \leq 2s$ при $0 < s \leq S$, следовательно, $(\rho(s) + B(0, \delta s^\lambda)) \subset B(0, 2s) \subset B(0, t)$ при $0 < s \leq t/2$, $0 < t \leq S$. Поэтому $V_\lambda(t/2, \rho, \delta) \subset (V_\lambda(S, \rho, \delta) \cap B(0, t))$ при $0 < t \leq S$. Следовательно, для доказательства (ii) достаточно показать, что

$$\text{mes } V_\lambda(t, \rho, \delta) \geq C t^{\lambda(n-1)+1} \quad \text{при } 0 < t \leq S. \quad (2.11)$$

В случае $\lambda = 1$ (2.11) тривиально: $\text{mes } V_1(t, \rho, \delta) \geq \text{mes } B(\rho(t), \delta t) = C t^n$. Аналогично устанавливается (2.11) в случае $\lambda > 1$, $t > 1$.

Далее предполагаем, что $\lambda > 1$, $0 < t \leq \min\{1, S\}$. Положим $a_0 = t/2$, $d = 3\delta a_0^\lambda / \widehat{\delta}$, и пусть $N \in \mathbb{N}$ таково, что

$$\frac{a_0}{d} \geq N \geq \frac{a_0}{d} - 1. \quad (2.12)$$

При $\delta \leq \widehat{\delta}/3$ такое N существует, так как $a_0/d = \widehat{\delta} a_0^{1-\lambda} / 3\delta \geq a_0^{1-\lambda} > 1$. Пусть $a_k = a_0 + dk$, $k = 0, \dots, N$. Из левой оценки (2.12) получаем, что $a_N \leq 2a_0 = t$. Отсюда $B_k = B(\rho(a_k), \delta a_k^\lambda) \subset V_\lambda(t, \rho, \delta)$, $k = 0, \dots, N$. При этом $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, так как $|\rho(a_i) - \rho(a_j)| \geq \widehat{\delta} |a_i - a_j| \geq \widehat{\delta} d > 2\delta a_0^\lambda$. Следовательно, из правой оценки (2.12) имеем

$$\begin{aligned} \text{mes } V_\lambda(t, \rho, \delta) &\geq \sum_{k=0}^N \text{mes } B_k = (N+1) a_0^\lambda \delta^n \text{mes } B(0, 1) \\ &\geq C a_0^{\lambda(n-1)+1} = C t^{\lambda(n-1)+1}. \end{aligned}$$

Так как левая часть (2.11) растет с ростом δ , то (2.11) доказано.

§ 3. Интегральное представление гладких функций

Интегральное представление выведем способом, похожим на предложенный для невырожденного конуса в [4], [7]. Оно является новым в случае $\lambda > 1$. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию гибкого λ -вырожденного конуса, $\lambda \geq 1$. На протяжении всего этого параграфа через C будут обозначаться постоянные (не обязательно одинаковые в различных случаях), зависящие лишь от характеристик G и размерности пространства n .

Пусть $x \in G$, $\widehat{\delta}$ -допустимая кривая $\rho(s) = \rho(x, s)$, $0 \leq s \leq S$, и число δ взяты из определения 1. Как уже отмечалось в § 2, без ограничения общности можно считать, что для ρ справедливы все утверждения § 2.

Зададим функцию $\Omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ такую, что выполнены следующие условия: $\Omega \geq 0$, $\Omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \text{loc})$, $\text{supp } \Omega \subset B(0, \delta)$, $\int \Omega(y) dy = 2$. При фиксированном x введем функцию

$$K(y, \rho(s), s) = \int_{1/2}^1 \frac{1}{(us)^{\lambda n}} \Omega\left(\frac{y - \rho(us)}{(us)^\lambda}\right) du, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad s \in (0, S]. \quad (3.1)$$

Она обладает, очевидно, следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \int K(y, \rho(s), s) dy &= 1, \quad K \geq 0, \quad K(\cdot, \rho(s), s) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \text{loc}), \\ \text{supp } K(\cdot, \rho(s), s) &\subset V_\lambda^*(s, \rho, \delta) \end{aligned}$$

(последнее множество определено в (2.6)). Покажем, что для K выполнена оценка:

$$K(y, \rho(s), s) \leq C \frac{\chi(V_\lambda^*(s, \rho, \delta), y)}{s^{\lambda(n-1)+1}}, \quad 0 < s \leq S. \quad (3.2)$$

Согласно (3.1) для этого достаточно показать, что

$$\text{diam } I(y, s) \leq C s^{\lambda-1}, \quad (3.3)$$

где $I(y, s) = \{u : \Omega((y - \rho(us))/(us)^\lambda) > 0\} \subset \{u : |y - \rho(us)| < \delta s^\lambda\}$. Пусть $u_1, u_2 \in I(y, s)$. Тогда $|\rho(u_1 s) - \rho(u_2 s)| < 2\delta s^\lambda$. С другой стороны, $|\rho(u_1 s) - \rho(u_2 s)| \geq \widehat{\delta} s |u_1 - u_2|$. Следовательно, $|u_1 - u_2| \leq 2\delta s^{\lambda-1}/\widehat{\delta}$, откуда следует (3.3).

Для $f \in C(G, \text{loc})$, $s \in (0, S]$ рассмотрим усреднение

$$f_s(x) = \int f(x + y) K(y, \rho(s), s) dy.$$

Покажем, что

$$f_s(x) \rightarrow f(x) \quad \text{при } s \rightarrow 0, \quad x \in G. \quad (3.4)$$

Из свойств K вытекает, что

$$\begin{aligned} |f(x) - f_s(x)| &= \left| \int [f(x) - f(x + y)] K(y, \rho(s), s) dy \right| \\ &\leq \int |f(x) - f(x + y)| K(y, \rho(s), s) dy \leq \sup_{y \in V_\lambda^*(s, \rho, \delta)} |f(x) - f(x + y)|. \end{aligned}$$

Отсюда в силу непрерывности f следует (3.4).

Перейдем непосредственно к выводу представления функции $f \in C^1(G, \text{loc})$. При фиксированных $x \in G$, $y \in B(0, \delta)$, $u \in [1/2, 1]$ функция $f(x + \rho(us) + (us)^\lambda y)$ переменной $s \in [0, S]$ абсолютно непрерывна и

$$\frac{d}{ds} f(x + \rho(us) + (us)^\lambda y) = \sum_{i=1}^n D_i f(x + \rho(us) + (us)^\lambda y) (u \rho'_i(us) + u^\lambda \lambda s^{\lambda-1} y_i).$$

По формуле Лейбница–Ньютона при $\varepsilon \in (0, S]$ имеем

$$\begin{aligned} f(x + \rho(u\varepsilon) + (u\varepsilon)^\lambda y) &= f(x + \rho(uS) + (uS)^\lambda y) \\ &\quad - \int_\varepsilon^S \sum_{i=1}^n D_i f(x + \rho(us) + (us)^\lambda y) (u \rho'_i(us) + u^\lambda \lambda s^{\lambda-1} y_i) ds. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Домножим обе части (3.5) на $\Omega(y)$ и проинтегрируем сначала по $y \in \mathbb{R}^n$, затем по $u \in [1/2, 1]$. Перейдя от интегрирования по y к интегрированию по $z = \rho(u\varepsilon) + (u\varepsilon)^\lambda y$, получим в левой части

$$\begin{aligned} &\int_{1/2}^1 \int \Omega(y) f(x + \rho(u\varepsilon) + (u\varepsilon)^\lambda y) dy du \\ &= \int f(x + z) \int_{1/2}^1 \frac{1}{(u\varepsilon)^{\lambda n}} \Omega\left(\frac{z - \rho(u\varepsilon)}{(u\varepsilon)^\lambda}\right) du dz = f_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Аналогично первое слагаемое правой части превратится в $f_S(x)$. Выясним вид второго слагаемого правой части (3.5) в результате такого преобразования:

$$\begin{aligned} &\int_{1/2}^1 \int \Omega(y) \int_\varepsilon^S \sum_{i=1}^n D_i f(x + \rho(us) + (us)^\lambda y) (u \rho'_i(us) + \lambda u^\lambda s^{\lambda-1} y_i) ds dy du \\ &= \sum_{i=1}^n \int_\varepsilon^S \int_{1/2}^1 \int \Omega(y) D_i f(x + \rho(us) + (us)^\lambda y) (u \rho'_i(us) + \lambda u^\lambda s^{\lambda-1} y_i) dy du ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_\varepsilon^S \int D_i f(x + y) \int_{1/2}^1 \frac{1}{(us)^{\lambda n}} \Omega\left(\frac{y - \rho(us)}{(us)^\lambda}\right) \\ &\quad \times \left[u \rho'_i(us) + \lambda u^\lambda s^{\lambda-1} \left(\frac{y_i - \rho_i(us)}{(us)^\lambda} \right) \right] du dy ds. \end{aligned}$$

Таким образом, из (3.5) имеем

$$f_\varepsilon(x) = f_S(x) - \sum_{i=1}^n \int_\varepsilon^S \int D_i f(x + y) M_i(y, \rho(s), s) dy ds, \quad (3.6)$$

где

$$M_i(y, \rho(s), s) = \int_{1/2}^1 \frac{1}{(us)^{\lambda n}} \Omega\left(\frac{y - \rho(us)}{(us)^\lambda}\right) \left[u \rho'_i(us) + \lambda s^{\lambda-1} \left(\frac{y_i - \rho_i(us)}{(us)^\lambda} \right) \right] du.$$

Очевидно, $M_i(\cdot, \rho(s), s) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \text{loc})$, $\text{supp } M_i(\cdot, \rho(s), s) \subset V_\lambda^*(s, \rho, \delta)$. Согласно (3.2) имеем оценку

$$|M_i(y, \rho(s), s)| \leq (1 + \lambda S^{\lambda-1} \delta) K(y, \rho(s), s) \leq C \frac{\chi(V_\lambda^*(s, \rho, \delta), y)}{s^{\lambda(n-1)+1}}. \quad (3.7)$$

Из (3.7) и леммы 3 (iii) получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \left| \int D_i f(x+y) M_i(y, \rho(s), s) dy \right| &\leq C \frac{1}{\text{mes } V_\lambda^*(s, \rho, \delta)} \int |D_i f(x+y)| \chi(V_\lambda^*(s, \rho, \delta), y) dy \\ &\leq C \sup_{y \in V_\lambda(S, \rho, \delta)} |D_i f(x+y)| \quad \text{при } s \in (0, S]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Последнее выражение можно (уменьшив при необходимости δ , например, в 2 раза) считать конечным.

Перейдем теперь в (3.6) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ при фиксированном x . Согласно (3.8) при фиксированном x к правой части (3.6) применима теорема Лебега об ограниченной сходимости. С учетом (3.4) получим, поменяв порядок интегрирования,

$$f(x) = f_S(x) - \sum_{i=1}^n \int D_i f(x+y) \int_0^S M_i(y, \rho(s), s) ds dy. \quad (3.9)$$

Это и есть искомое представление, справедливое для любого $x \in G$. Его носителем, т.е. множеством, в точках которого используются значения функции f и ее производных, является $x + V_\lambda(S, \rho, \delta) \subset G$.

В заключение получим одну оценку, которая и будет использоваться при доказательстве теорем вложения. Оценим прежде всего внутренние интегралы в правой части (3.9). При $0 < s \leq S$ имеем $V_\lambda^*(s, \rho, \delta) \subset B(0, Cs)$, в данном случае $C = 1 + \delta S^{\lambda-1}$. Поэтому, учитывая (3.7), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^S |M_i(y, \rho(s), s)| ds &\leq C \chi(V_\lambda(S, \rho, \delta), y) \int_{|y|/C}^S \frac{1}{s^{\lambda(n-1)+1}} ds \\ &\leq C \frac{\chi(V_\lambda(S, \rho, \delta), y)}{|y|^{\lambda(n-1)}}, \quad |y| \neq 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Введем функцию $\Psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$,

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} \frac{\chi(V_\lambda(S, \rho, \delta), y)}{|y|^{\lambda(n-1)}} & \text{при } x \in G \text{ и } y \neq 0, \\ 0 & \text{при } x \notin G \text{ или } y = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

напомним, что $\rho(s) = \rho(x, s)$. Об измеримости Ψ см. § 6. Из (3.9)–(3.11) получаем искомую оценку:

$$|f(x)| \leq |f_S(x)| + C \sum_{i=1}^n \int \Psi(x, y) |D_i f(x+y)| dy, \quad x \in G, \quad (3.12)$$

C не зависит от x и f .

§ 4. Оценки интегральных операторов

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – область с условием гибкого λ -вырожденного конуса, $\lambda \geq 1$, Ψ – функция, определенная в (3.11). Для измеримых $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ определим оператор T , $Tf: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$,

$$(Tf)(x) = \int \Psi(x, y) f(x + y) dy. \quad (4.1)$$

Данный параграф посвящен выводу достаточных условий ограниченности оператора T в пространствах суммируемых функций. При доказательстве теорем вложения будут использоваться леммы 5, 7 и 8.

Предварительно докажем вспомогательное утверждение. Пусть $\rho(s)$, $0 \leq s \leq S$, – некоторая $\hat{\delta}$ -допустимая кривая, $\delta > 0$, $\lambda \geq 1$. При $d > 0$ рассмотрим функцию $\Phi_d(\rho, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$,

$$\Phi_d(\rho, y) = \frac{\chi(V_\lambda(S, \rho, \delta), y) \chi(B(0, d), y)}{|y|^{\lambda(n-1)}}. \quad (4.2)$$

Для нее справедлива следующая

ЛЕММА 4. Пусть $\delta S^{\lambda-1} < 1$. Тогда

$$\mu(\Phi_d(\rho, \cdot), t) \leq C \begin{cases} (\min\{d, S\})^{\lambda(n-1)+1} & \text{при } 0 < t \leq (\min\{d, S\})^{-\lambda(n-1)}, \\ t^{-\frac{\lambda(n-1)+1}{\lambda(n-1)}} & \text{при } t > (\min\{d, S\})^{-\lambda(n-1)}, \end{cases} \quad (4.3)$$

где C не зависит от d и t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $t > 0$ из (4.2) имеем

$$\begin{aligned} \mu(\Phi_d(\rho, \cdot), t) &= \text{mes} \left\{ y \in (V_\lambda(S, \rho, \delta) \cap B(0, d)) : \frac{1}{|y|^{\lambda(n-1)}} > t \right\} \\ &= \text{mes} \left(V_\lambda(S, \rho, \delta) \cap B(0, d) \cap B\left(0, t^{-\frac{1}{\lambda(n-1)}}\right) \right). \end{aligned}$$

Так как $\delta S^{\lambda-1} < 1$, то можно применить лемму 3(i). Получим

$$\mu(\Phi_d(\rho, \cdot), t) \leq C \begin{cases} (\min\{d, S\})^{\lambda(n-1)+1}, & 0 < t \leq d^{-\lambda(n-1)}, \\ \left(\min\left\{t^{-\frac{1}{\lambda(n-1)}}, S\right\}\right)^{\lambda(n-1)+1}, & t > d^{-\lambda(n-1)}, \end{cases}$$

C не зависит от d и t , откуда легко следует (4.3). Лемма доказана.

Перейдем к основной задаче параграфа. До его конца через C будут обозначаться положительные постоянные (не обязательно одинаковые в разных случаях), зависящие лишь от характеристик рассматриваемых областей и размерности пространства n .

ЛЕММА 5. Пусть T – оператор, определенный в (4.1), $\lambda(n-1) + 1 < p \leq \infty$. Тогда $T \in \mathcal{L}(L_p, L_\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p взято из условия леммы, $f \in L_p$. Из (4.1) в силу неравенства Гёльдера получаем $|(Tf)(x)| \leq \|\Psi(x, \cdot) \mid L_{p'}\| \cdot \|f \mid L_p\|$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, так что $1 \leq p' < \frac{\lambda(n-1)+1}{\lambda(n-1)}$. Для доказательства леммы достаточно установить, что

$$\|\Psi(x, \cdot) \mid L_{p'}\| \leq C. \quad (4.4)$$

Согласно (3.11) выражение в левой части (4.4) отлично от нуля только при $x \in G$. Можно считать (уменьшив при необходимости δ), что для нашей области G числа δ и S в определении 1 таковы, что $\delta S^{\lambda-1} < 1$. Ясно, что при достаточно больших $d > 0$ $\Psi(x, \cdot) = \Phi_d(\rho, \cdot)$, где последняя функция определена в (4.2) для $\rho(s) = \rho(x, s)$. Но тогда в силу леммы 4 при $d \geq S$ в (4.3) и свойства функции распределения получаем

$$\begin{aligned} \|\Psi(x, \cdot) \mid L_{p'}\| &= p' \int_0^\infty t^{p'-1} \mu(\Psi(x, \cdot), t) dt \leq C \int_1^\infty t^{p'-1} t^{-\frac{\lambda(n-1)+1}{\lambda(n-1)}} dt \\ &\leq C \int_1^\infty t^{-1-\varepsilon} dt \leq C, \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ определено условием $p' = \frac{\lambda(n-1)+1}{\lambda(n-1)} - \varepsilon$. Следовательно, (4.4) имеет место и лемма доказана.

Далее до конца параграфа будем обозначать через $V_\lambda(t, x, \delta)$, $0 < t \leq S$, $x \in G$, множество, определенное в (2.1) для кривой $\rho = \rho(x, s)$. Теперь будем накладывать на G более сильные ограничения.

ЛЕММА 6. Пусть G — область с условием непрерывно гибкого λ -вырожденного конуса, $\lambda \geq 1$, $0 < t \leq S$. Тогда при $y \in G$

$$\{x \in B(y, \widehat{\delta}t/2) : \Psi(x, y-x) \neq 0\} \subset y - V_\lambda(t, y, \delta + 2\widetilde{\delta}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $t \in (0, S]$, $y \in G$. Пусть x взято из левой части доказываемого включения. Тогда $y \in x + V_\lambda(S, x, \delta)$, откуда следует (пояснения ниже), что

$$y \in \bigcup_{|x-y|/2 \leq s \leq 2|x-y|/\widehat{\delta}} (\rho(x, s) + \delta s^\lambda B(0, 1)). \quad (4.5)$$

Действительно, при $s \in (0, S]$, $z \in B(0, 1)$ имеем $|\rho(x, s) + \delta s^\lambda z| \geq \widehat{\delta}s - \delta s^\lambda \geq (\widehat{\delta} - \delta S^{\lambda-1})s$. Следовательно, уменьшив при необходимости δ , можно считать, что при $s \in (2|x-y|/\widehat{\delta}, S)$ $y \notin (\rho(x, s) + \delta s^\lambda B(0, 1))$. С другой стороны, $|\rho(x, s) + \delta s^\lambda z| \leq s + \delta s^\lambda \leq (1 + \delta S^{\lambda-1})s$, следовательно, можно считать, что и при $s \in (0, |x-y|/2)$ $y \notin (\rho(x, s) + \delta s^\lambda B(0, 1))$. Тем самым, (4.5) доказано.

Покажем теперь, что из (4.5) следует

$$y \in x + V_\lambda(t, y, \delta + 2\widetilde{\delta}), \quad (4.6)$$

где $\widetilde{\delta}$ — число из определения 2. Действительно, из (4.5) следует, что при некотором $s \in [|x-y|/2, 2|x-y|/\widehat{\delta}]$ $y \in x + B(\rho(x, s), \delta s^\lambda)$. В то же время из определения 2 для этого s справедливо $|\rho(x, s) - \rho(y, s)| \leq \widetilde{\delta}|x-y|s^{\lambda-1} \leq 2\widetilde{\delta}s^\lambda$. Следовательно,

$y \in x + B(\rho(y, s), (\delta + 2\tilde{\delta})s^\lambda)$, причем согласно (4.5) $s \leq 2|x - y|/\hat{\delta} \leq t$. Отсюда следует (4.6), и лемма доказана.

Для областей из определения 3 будем рассматривать не T , а несколько видоизмененный оператор $\tilde{T}$. Определим его. Пусть G – область из определения 3. Введем (в обозначениях определения 3) функции $\Psi_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, $j = 1, \dots, J$,

$$\Psi_j(y) = \frac{\chi(-V_\lambda(S, \rho^{(j)}, \delta), y)}{|y|^{\lambda(n-1)}}. \quad (4.7)$$

Положим для $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$

$$\tilde{T} = \sum_{j=1}^J T_j f, \quad T_j f = \Psi_j * f, \quad (4.8)$$

здесь и далее $*$ обозначает свертку.

Напомним определения некоторых функциональных пространств. Они нам потребуются для доказательства заключительных результатов параграфа. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ измерима; $f \in M_p$, $1 < p \leq \infty$, если конечна $\|f\|_{M_p}$, где

$$\|f\|_{M_p} = \begin{cases} \sup_{t \geq 0} t(\mu(f, t))^{1/p}, & 1 < p < \infty, \\ \|f\|_{L_\infty}, & p = \infty. \end{cases} \quad (4.9)$$

Норма

$$\|f\|_{M_p}^* = \sup_{E \subset \mathbb{R}^n: \text{mes } E < (0, \infty)} \frac{1}{(\text{mes } E)^{1-1/p}} \int_E |f|^p dx, \quad 1 < p < \infty, \quad (4.10)$$

эквивалентна $\|f\|_{M_p}$; M_p называют *пространством Марцинкевича*; $f \in L_{(p,1)}$, $1 < p < \infty$, если конечна

$$\|f\|_{L_{(p,1)}} = \int_0^\infty t^{1/p} f^*(t) \frac{dt}{t}.$$

Здесь $f^*(t)$, $t \in [0, \infty)$, – перестановка f , $f^*(t) = \inf\{s \in [0, \infty) : \mu(f, s) \leq t\}$. $L_{(p,1)}$ – одно из пространств Лоренца. Подробное изложение теории пространств Лоренца и Марцинкевича есть в [10, с. 153–157], [11, с. 212–230].

Теперь мы в состоянии доказать заключительные результаты параграфа.

ЛЕММА 7. Пусть G – область с условием изогнутого λ -вырожденного конуса, $\lambda \geq 1$, числа $1 \leq p, q \leq \infty$ удовлетворяют одному из следующих условий:

- 1) $1 > \frac{1}{p} > \frac{1}{\lambda(n-1)+1}$, $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda(n-1)+1}$;
- 2) $1 = \frac{1}{p}$ или $\frac{1}{\lambda(n-1)+1} = \frac{1}{p}$, $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda(n-1)+1}$;
- 3) $\frac{1}{\lambda(n-1)+1} > \frac{1}{p} \geq 0$, $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} \geq 0$.

Тогда $\tilde{T} \in \mathcal{L}(L_p, L_q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что для G в определении 3 δ и S таковы, что $\delta S^{\lambda-1} < 1$, и условия леммы 4 выполнены. Ввиду (4.8) достаточно доказать лемму для T_j . Сначала докажем, что для соответствующей функции Ψ_j , определенной в (4.7), справедливо

$$\Psi_j \in L_r, \quad 1 \leq r < \frac{\lambda(n-1)+1}{\lambda(n-1)}, \quad (4.11)$$

$$\Psi_j \in M_{\frac{\lambda(n-1)+1}{\lambda(n-1)}}. \quad (4.12)$$

Так как $-V_\lambda(S, \rho^{(j)}, \delta) = V_\lambda(S, -\rho^{(j)}, \delta)$ и кривая $-\rho^{(j)}$ $\widehat{\delta}$ -допустимая, то в силу (4.7) $\mu(\Psi_j, t)$ можно оценить по лемме 4, положив в (4.3) $d = S$. Тогда (4.11) получается так же, как и (4.4) в доказательстве леммы 5. Для доказательства (4.12) воспользуемся (4.9). Имеем

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq 0} t(\mu(\Psi_j, t))^{\frac{\lambda(n-1)}{\lambda(n-1)+1}} \\ & \leq C \max \left\{ \sup_{0 \leq t \leq S^{-\lambda(n-1)}} t(\mu(\Psi_j, t))^{\frac{\lambda(n-1)}{\lambda(n-1)+1}}, \sup_{t > S^{-\lambda(n-1)}} t(\mu(\Psi_j, t))^{\frac{\lambda(n-1)}{\lambda(n-1)+1}} \right\} \\ & \leq C \max \left\{ S^{-\lambda(n-1)} S^{\lambda(n-1)}, \sup_{t > S^{-\lambda(n-1)}} t t^{-1} \right\} \leq C, \end{aligned}$$

и (4.12) доказано.

Теперь из (4.11), применяя к $\Psi_j * f$ неравенство Юнга для сверток [10, с. 162–163], получаем, что $T_j \in \mathcal{L}(L_1, L_q)$ при $1 \leq q < \frac{\lambda(n-1)+1}{\lambda(n-1)}$ и $T_j \in \mathcal{L}(L_p, L_\infty)$ при $\frac{\lambda(n-1)+1}{\lambda(n-1)} < p \leq \infty$. Отсюда, применив теорему Рисса–Торина [11, с. 202], получим утверждение леммы за исключением равенства $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda(n-1)+1}$ в условии 1). В этом случае лемма доказывается применением к $\Psi_j * f$ неравенства О’Нейла для сверток [10, с. 162–163], что возможно благодаря (4.12). Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть G – область с условием непрерывно гибкого λ -вырожденного конуса, $\lambda \geq 1$, p и q такие же, как и в лемме 7. Тогда $T \in \mathcal{L}(L_p, L_q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве леммы 7, можно считать $\delta S^{\lambda-1} < 1$. Прежде всего заметим, что так как определение 1 шире, чем определение 2, то из леммы 5 имеем

$$T \in \mathcal{L}(L_p, L_\infty) \quad \text{при} \quad \lambda(n-1) + 1 < p \leq \infty. \quad (4.13)$$

Если мы докажем, что верны следующие утверждения:

$$T \in \mathcal{L}(L_{(\lambda(n-1)+1, 1)}, L_\infty), \quad (4.14)$$

$$T \in \mathcal{L}(L_1, L_1), \quad (4.15)$$

$$T \in \mathcal{L}\left(L_1, M_{\frac{\lambda(n-1)+1}{\lambda(n-1)}}\right), \quad (4.16)$$

то мы докажем и лемму. Действительно, из (4.15), (4.16) по интерполяционной теореме Марцинкевича [11, с. 208] получаем, что лемма верна при $p = 1$, $\frac{\lambda(n-1)+1}{\lambda(n-1)} < q \leq 1$.

Отсюда из (4.13) по интерполяционной теореме Рисса–Торина следует, что лемма верна за исключением случая $1 < p < \lambda(n-1) + 1$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda(n-1)+1}$. В этом случае справедливость леммы следует из (4.14), (4.16) и интерполяционной теоремы Стейна–Вейса [11, с. 222]. Эти рассуждения становятся нагляднее, если рассмотреть в квадрате $\{(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) : 0 \leq \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \leq 1\}$ множество пар $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$, для которых $T \in \mathcal{L}(L_p, L_q)$. Отметим, что по такой схеме в [12] доказана ограниченность потенциалов Рисса.

Для доказательства (4.14) достаточно доказать [11, с. 220], что

$$\int \Psi(x, y-x) \chi(E, y) dy \leq C(\text{mes } E)^{\frac{1}{\lambda(n-1)+1}}, \quad x \in G, \quad 0 < \text{mes } E < \infty. \quad (4.14')$$

Установим (4.14'). Рассмотрим 2 случая. Пусть сначала $\text{mes } E \geq \text{mes } V_\lambda(S, x, \delta)$. Тогда в силу леммы 3(ii) $(\text{mes } E)^{\frac{1}{\lambda(n-1)+1}} \geq CS$. С другой стороны,

$$\int \Psi(x, y-x) \chi(E, y) dy \leq \|\Psi(x, \cdot) \mid L_1\|.$$

Используя функцию распределения и лемму 4 (положив в (4.3) $d = S$), получаем

$$\|\Psi(x, \cdot) \mid L_1\| \leq C \left(\int_0^{S^{-\lambda(n-1)}} S^{\lambda(n-1)+1} dt + \int_{S^{-\lambda(n-1)}}^\infty t^{-\frac{\lambda(n-1)+1}{\lambda(n-1)}} dt \right) \leq CS, \quad (4.17)$$

и (4.14') в этом случае доказано. Пусть теперь $0 < \text{mes } E < \text{mes } V_\lambda(S, x, \delta)$. В этом случае элементарными рассуждениями легко установить существование и единственность числа $R = R(E) \in (0, CS)$ такого, что $\text{mes } E = \text{mes}(B(0, R) \cap V_\lambda(S, x, \delta))$. Следовательно, по лемме 3(ii) $(\text{mes } E)^{\frac{1}{\lambda(n-1)+1}} \geq CR$. В силу (3.11)

$$\begin{aligned} \int \Psi(x, y-x) \chi(E, y) dy &\leq \int \Psi(x, y) \chi(B(0, R) \cap V_\lambda(S, x, \delta), y) dy \\ &= \int \Psi(x, y) \chi(B(0, R), y) dy. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Согласно (4.2) подынтегральное выражение в последнем члене в (4.18) есть $\Phi_R(\rho, y)$, где $\rho = \rho(x, s)$. Используя лемму 4, аналогично (4.17) получаем

$$\|\Phi_R(\rho, \cdot) \mid L_1\| \leq CR \leq C(\text{mes } E)^{\frac{1}{\lambda(n-1)+1}}. \quad (4.19)$$

Из (4.18), (4.19) следует (4.14') и во втором случае.

Прежде чем непосредственно доказывать (4.15), (4.16), преобразуем оператор T . Пусть $\delta, \hat{\delta}, \tilde{\delta}$ – характеристики нашей области G из определения 2. Выберем $R \in (0, S]$ такое, что

$$(\delta + 2\tilde{\delta})R^{\lambda-1} < 1. \quad (4.20)$$

До конца доказательства R фиксировано. Из равенства

$$(Tf)(x) = \int_{|y| < \hat{\delta}R/2} \Psi(x, y) f(x+y) dy + \int_{|y| \geq \hat{\delta}R/2} \Psi(x, y) f(x+y) dy \quad (4.21)$$

получаем, что

$$(Tf)(x) = (A_1f)(x) + (A_2f)(x), \quad (4.22)$$

где A_i – оператор, соответствующий i -му слагаемому правой части (4.21), $i = 1, 2$. Очевидна оценка

$$|(A_2f)(x)| \leq C(\chi(B(0, C), \cdot) * |f|)(x). \quad (4.23)$$

Так как $\chi(B(0, C), \cdot) \in L_r$ при любом $r \in [1, \infty]$, то (4.15), (4.16) для A_2 легко доказываются применением к (4.23) неравенства Юнга для свертки. Следовательно, осталось установить (4.15), (4.16) для A_1 вместо T .

Докажем (4.15) для A_1 . В силу обобщенного неравенства Минковского

$$\|A_1f\|_{L_1} \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \|\Psi(\cdot, y - \cdot)\chi(B(0, \hat{\delta}R/2), y - \cdot)\|_{L_1} \|f\|_{L_1},$$

следовательно, достаточно показать, что

$$\|\Psi(\cdot, y - \cdot)\chi(B(0, \hat{\delta}R/2), y - \cdot)\|_{L_1} \leq C, \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (4.24)$$

Из (3.11) и леммы 6 следует, что

$$\begin{aligned} \|\Psi(\cdot, y - \cdot)\chi(B(0, \hat{\delta}R/2), y - \cdot)\|_{L_1} &\leq \int \frac{\chi(-V_\lambda(R, y, \delta + 2\tilde{\delta}), x - y)}{|x - y|^{\lambda(n-1)}} dx \\ &= \int \frac{\chi(-V_\lambda(R, y, \delta + 2\tilde{\delta}), x)}{|x|^{\lambda(n-1)}} dx. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Заметим, что кривая $\rho = \rho(y, s)$, $0 \leq s \leq R$, $\hat{\delta}$ -допустима. Положим в (4.2) $\rho = \rho(y, s)$, $0 \leq s \leq R$, и заменим в (4.2), (4.3) S на R , δ на $\delta + 2\tilde{\delta}$. В силу (4.20) можно оценить последний интеграл в (4.25), используя функцию распределения и лемму 4. Аналогично (4.4) имеем

$$\begin{aligned} &\int \frac{\chi(-V_\lambda(R, y, \delta + 2\tilde{\delta}), x)}{|x|^{\lambda(n-1)}} dx \\ &\leq C \left(\int_0^{R^{-\lambda(n-1)}} R^{\lambda(n-1)+1} dt + \int_{R^{-\lambda(n-1)}}^\infty t^{-\frac{\lambda(n-1)+1}{\lambda(n-1)}} dt \right) \leq C. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.25) следует (4.24), и (4.15) доказано.

Докажем (4.16) для A_1 . Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $0 < \text{mes } E < \infty$. Тогда

$$\int |A_1(f)(x)|\chi(E, x) dx \leq \int |f(y)| \int \Psi(x, y - x)\chi(B(0, \hat{\delta}R/2), y - x)\chi(E, x) dx dy. \quad (4.26)$$

Если мы покажем, что

$$\int \Psi(x, y - x)\chi(B(0, \hat{\delta}R/2), y - x)\chi(E, x) dx \leq C(\text{mes } E)^{\frac{1}{\lambda(n-1)+1}}, \quad (4.27)$$

то из (4.26) в силу (4.10) следует (4.16). Докажем (4.27). Аналогично (4.25) из леммы 6 следует, что левая часть (4.27) не превосходит

$$\begin{aligned} &\int \frac{\chi(-V_\lambda(R, y, \delta + 2\tilde{\delta}), x - y)}{|x - y|^{\lambda(n-1)}} \chi(E, x) dx = \int \frac{\chi(V_\lambda(R, y, \delta + 2\tilde{\delta}), z - y)}{|z - y|^{\lambda(n-1)}} \chi(2y - E, z) dz \\ &\leq C(\text{mes}(2y - E))^{\frac{1}{\lambda(n-1)+1}} = C(\text{mes } E)^{\frac{1}{\lambda(n-1)+1}}. \end{aligned}$$

В этой цепи неравенство получается аналогично (4.14') в силу справедливости (4.20). Следовательно, (4.27) и лемма доказаны.

§ 5. Доказательства теорем

Через C в этом параграфе будут обозначаться постоянные (не обязательно одинаковые в различных случаях), зависящие лишь от характеристик областей, n и параметров l, p, q из условий теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Согласно результатам Дени–Лионса [13], [14, с. 16–17] множество $C^\infty(G, \text{loc}) \cap W_p^{(l)}(G)$ плотно в $W_p^{(l)}(G)$, $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Поэтому достаточно доказать, что в условиях теоремы

$$\|f\|_{L_\infty(G)} \leq \|f\|_{W_p^{(1)}(G)}, \quad (5.1)$$

где $f \in C^\infty(G, \text{loc})$. Для таких функций, заданных в нашей области G , справедливы интегральное представление (3.9) и оценка (3.12). Из (3.12), учитывая (3.2) и (4.1), получаем

$$|f(x)| \leq C(\chi(B(0, C), \cdot) * |f|)(x) + C \sum_{i=1}^n (T|D_i f|)(x) \quad (5.2)$$

(f и ее производные доопределены нулем вне G). Согласно лемме 5

$$\left\| \sum_{i=1}^n T(|D_i f|) \right\|_{L_\infty(G)} \leq C \sum_{i=1}^n \|D_i f\|_{L_p(G)}, \quad (5.3)$$

где p то же, что и в условиях теоремы. Аналогичная оценка для первого слагаемого правой части (5.2) следует из неравенства Юнга для сверток. Отсюда из (5.3), (5.2) следует (5.1). Теорема 1 доказана.

Доказательству теоремы 2 предположим лемму, представляющую и самостоятельный интерес. Обозначим через $\widetilde{W}_p^{(l)}(G)$, $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, пространство, определяемое так же, как и $W_p^{(l)}(G)$ с заменой $\|f\|_{W_p^{(l)}(G)}$ на

$$\|f\|_{\widetilde{W}_p^{(l)}(G)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \|D^\alpha f\|_{L_p(G)}. \quad (5.4)$$

ЛЕММА 9. Пусть область $G \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию непрерывно гибкого или изогнутого λ -вырожденного конуса, $\lambda \geq 1$, $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Тогда $\widetilde{W}_p^{(l)}(G) = W_p^{(l)}(G)$ с точностью до эквивалентности норм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что

$$\|f\|_{\widetilde{W}_p^{(l)}(G)} \leq C \|f\|_{W_p^{(l)}(G)}$$

для $f \in C^\infty(G, \text{loc}) \cap W_p^{(l)}(G)$. Докажем индукцией по $l \in \mathbb{N}$ более сильное утверждение: если при достаточно малом $h > 0$ (выбор h см. ниже) $f \in C^\infty(G, \text{loc}) \cap L_p(G_h)$ и $D^\alpha f \in L_p(G)$, $|\alpha| = l$, то

$$\|f\|_{\widetilde{W}_p^{(l)}(G)} \leq C \|f\|_{L_p(G_h)} + C \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_{L_p(G)}. \quad (5.5)$$

Пусть $l = 1$. Из (3.12) для области из определения 2 следует (5.2), а для области из определения 3 оценка

$$|f(x)| \leq C \sum_j |f_{S,j}(x)| + \sum_{i=1}^n (\tilde{T}|D_i f|)(x), \quad (5.6)$$

где через $f_{S,j}(x)$ обозначено усреднение $f_s(x)$ (см. § 3), построенное по кривой $\rho^{(j)}$ из определения 3, а суммирование происходит по всем $j \in \{1, \dots, J\}$ таким, что $x \in G_j$. Уменьшив при необходимости δ , можно считать, что первые слагаемые в правых частях (5.2), (5.6) построены по сужению $f|_{G_h}$ для достаточно малого $h > 0$. Далее h фиксировано. L_p -норма этих слагаемых оценивается через $\|f|_{L_p(G_h)}\|$ по неравенству Юнга для сверток. Из лемм 7 и 8 следует, что $T, \tilde{T} \in \mathcal{L}(L_p, L_p)$, $1 \leq p < \infty$. Следовательно, (5.5) доказано при $l = 1$.

Индукционный переход легко провести, заметив, что $\tilde{G} = G_h + B(0, h/2)$ является множеством с (слабым) условием конуса [9, с. 118]. Отсюда с помощью классических теорем вложения [9, с. 138] устанавливается конечность $\|D_i f|_{L_p(G_h)}\|$. Применяя предположение индукции сначала к $D_i f$, затем к f , заключаем, что (5.5) верно. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $f \in C^\infty(G, \text{loc}) \cap W_p^{(l)}(G)$. Рассмотрим сначала случай $l = 1$. Утверждение 3 теоремы следует в этом случае из теоремы 1. Если область G из определения 2, то верно (5.2), если из определения 3, то верно (5.6). Оценка L_q -нормы первых слагаемых правых частей обеих формул через $\|f|_{W_p^{(1)}(G)}\|$ устанавливается при помощи неравенства Юнга для сверток. Аналогичные оценки для вторых слагаемых следуют из лемм 7 и 8. Отсюда имеем оценку L_q -нормы f через $\|f|_{W_p^{(1)}(G)}\|$, где p и q связаны соотношениями теоремы.

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, будем рассуждать по индукции. Согласно лемме 9 можно вести индуктивные рассуждения для пространств $\widetilde{W}_P^{(l)}(G)$. Рассмотрим, например, первое из утверждений теоремы. Из предположения о том, что $f \in \widetilde{W}_P^{(l)}(G)$, очевидно, следует, что $f, D_i f \in \widetilde{W}_P^{(l-1)}(G)$. Следовательно, из справедливости теоремы при $l-1$ следует, что $f, D_i f \in L_r(G)$, где $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{r} \geq \frac{1}{p} - \frac{l-1}{\lambda(n-1)+1}$. Тогда согласно утверждению теоремы при $l = 1$ получаем, что $f \in L_q(G)$, где $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{r} - \frac{1}{\lambda(n-1)+1}$, что равносильно $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{l}{\lambda(n-1)+1}$. Соответствующие операторы вложения непрерывны. Второе и третье утверждения доказываются аналогично. Теорема доказана.

§ 6. Замечания

1. Неулучшаемость теорем (см. [14, с. 207]). Рассмотрим при $\lambda > 1$ область

$$E(\lambda) = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : |x'| \leq Cx_n^\lambda, 0 < x_n < 1\}.$$

Из теоремы 2 $W_p^{(l)}(E(\lambda)) \hookrightarrow L_q(E(\lambda))$ при $1 > \frac{1}{p} > \frac{l}{\lambda(n-1)+1}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{l}{\lambda(n-1)+1}$. Пример функции $f: E(\lambda) \rightarrow \mathbb{R}^1$,

$$f(x) = x_n^{-\left[\frac{\lambda(n-1)+1}{p} - l - \varepsilon\right]}, \quad \varepsilon > 0,$$

показывает, что $W_p^{(l)}(E(\lambda))$ не вложено в $L_r(E(\lambda))$ ни при каком $r > q$.

2. Кроме норм $\|\cdot\|_{W_p^{(l)}(G)}$ и $\|\cdot\|_{\widetilde{W}_p^{(l)}(G)}$ рассматривают также

$$\|f\|_{W_p^{l,\dots,l}(G)} = \|f\|_{L_p(G)} + \sum_{i=1}^n \|D_i^l f\|_{L_p(G)}.$$

В лемме 9 показано, что при $\lambda > 1$ для областей из определений 2, 3 $\|\cdot\|_{W_p^{(l)}(G)}$ эквивалентна $\|\cdot\|_{\widetilde{W}_p^{(l)}(G)}$, $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. В [8] приведены примеры областей из этих классов, показывающие, что даже при $1 < p < \infty$ $\|\cdot\|_{W_p^{l,\dots,l}(G)}$ не эквивалентна $\|\cdot\|_{W_p^{(l)}(G)}$. (При $p = 1, \infty$ эквивалентность не имеет места даже для куба.)

3. Из доказательства леммы 9 легко следует, что в $W_p^{(l)}(G)$ можно ввести норму

$$\|\cdot\|_{L_p(G_h)} + \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha \cdot\|_{L_p(G)}$$

при достаточно малом $h > 0$. Более того, при таком h эта норма будет эквивалентна исходной. Такая нормировка использовалась в [6].

4. Все результаты работы останутся верными, если определение 2 заменить на несколько более общее, но и более громоздкое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2'. Область $G \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию непрерывно гибкого λ -вырожденного конуса, $\lambda \geq 1$, если она удовлетворяет условию гибкого λ -вырожденного конуса, и при этом существуют $\varepsilon > 0$, $\tilde{\delta} > 0$ и конечное число J открытых множеств G_j такие, что

- 1) $G = \bigcup_{j=1}^J G_j = \bigcup_{j=1}^J G_j^{(\varepsilon)}$, где $G_j^{(\varepsilon)} = \{x \in G_j : \text{dist}(x, G \setminus G_j) > \varepsilon\}$;
- 2) кривые из определения 1 можно выбрать так, что $|\rho(x, s) - \rho(y, s)| \leq \tilde{\delta}|x - y|s^{\lambda-1}$, $0 \leq s \leq 2|x - y|/\hat{\delta}$, $x, y \in G_j$.

5. Можно показать, что функция $\Psi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^1$, определенная в (3.11), измерима, установив, что множество $E_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : \Psi(x, y) > t\}$, $t \in \mathbb{R}^1$, открыто. Для области из определения 1 это следует из существования последовательности замкнутых кубов $\{\overline{Q}_j\}_{j=1}^\infty$ со свойствами

- 1) $\bigcup_{j=1}^\infty \overline{Q}_j = G$, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$, $i \neq j$;
- 2) $\forall j \in \mathbb{N} \exists \rho_j - \hat{\delta}$ -допустимая кривая такая, что $(Q_j + V_\lambda(S, \rho_j, \delta)) \subset G$.

Для области из определения 2 это следует из того, что если $\xi \in B(\rho(x, s_0), \delta)$, $x \in G$, $s_0 \in (0, S]$, то $\xi \in B(\rho(y, s_0), \delta)$ для всех y из достаточно малой окрестности x .

6. В связи с оценками § 4 для оператора T , определенного в (4.1), возникает следующий вопрос. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ взята из определения 1. Верно ли, что $T \in \mathcal{L}(L_p, L_q)$, если p и q связаны соотношениями лемм 7 и 8? В случае $\lambda = 1$ положительный ответ следует из оценки $|\Psi(x, y)| \leq 1/|y|^{n-1}$ и свойств потенциалов Рисса. Используя равенство

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L_1, L_q)} = \text{ess sup}_{y \in \mathbb{R}^n} \|\Psi(\cdot, y - \cdot)\|_{L_q}$$

(см. [15, с. 36]), можно показать, что в случае $\lambda > 1$ каждой точке $\mathbb{R}^2$ можно поставить в соответствие некоторую $\hat{\delta}$ -допустимую кривую $\rho(x, s)$ таким образом, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathbb{R}^2} \|\Psi(\cdot, y - \cdot) \mid L_q\| = \infty \quad \text{при} \quad \max\left\{1, \frac{n}{\lambda(n-1)}\right\} < q < \frac{\lambda(n-1)+1}{\lambda(n-1)}.$$

При этом остается открытым вопрос, можно ли для G из определения 1 так выбрать кривые $\rho(x, s)$, $x \in G$, чтобы T обладал такими свойствами.

Московский физико-технический институт

Поступило

25.05.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Соболев С. Л. Об одной теореме функционального анализа // Матем. сб. 1938. Т. 4(46). № 3. С. 471–497.
- [2] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
- [3] Adams R. A., Fournier J. Cone conditions and properties of Sobolev spaces // J. Math. Anal. Appl. 1977. V. 61. № 3. P. 713–734.
- [4] Решетняк Ю. Г. Интегральные представления функций в областях с негладкой границей // Сиб. матем. ж. 1980. Т. 21. № 6. С. 108–116.
- [5] Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
- [6] Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения для области с условием гибкого рога // Тр. МИАН. 1985. Т. 170. С. 12–30.
- [7] Бесов О. В. Вложение пространств Соболева на областях с условием распадающегося гибкого конуса // Тр. МИАН. 1986. Т. 173. С. 14–31.
- [8] Глобенко И. Г. Некоторые вопросы теории вложения для областей с особенностями на границе // Матем. сб. 1962. Т. 57. № 2. С. 201–224.
- [9] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
- [10] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
- [11] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [12] Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
- [13] Deny J., Lions J. L. Les espaces dy type de Beppo Levi // Ann. Inst. Fourier. 1953, 1954. V. 5. P. 305–370.
- [14] Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
- [15] Буренков В. И. Функциональные пространства. Основные интегральные неравенства, связанные с пространствами L_p . М.: Изд-во УДН, 1989.