Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Лычагина, Нормальные формы пуассоновых структур, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 2, 220–235

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1495>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 16:35:28

УДК 514.763.85

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПУАССОНОВЫХ СТРУКТУР

О. В. Лычагина

В работе найдены формальные нормальные формы пуассоновых структур. Как следствие получены препятствия к формальной линеаризации пуассоновых структур, что дает обобщение теоремы Вейнштейна о линеаризуемости. В работе также введены и исследованы алгебры Ли–Склянина, отвечающие пуассоновым структурам с тривиальной линеаризацией.

Библиография: 8 названий.

Введение. В этой работе мы рассматриваем приложение пуассоновых когомологий к задаче формальной классификации вырожденных пуассоновых структур. Выбор таких структур основан на “теореме о расщеплении” А. Вейнштейна [1], которая сводит локальное изучение пуассоновых структур к изучению структур, обращающихся в нуль в фиксированной точке.

Мы показываем, что препятствия к линеаризации такой пуассоновой структуры лежат в группе вторых когомологий алгебры Ли, определяемой линейной частью этой пуассоновой структуры.

В случае, когда когомологии тривиальны (например, алгебра Ли является полупростой или редуктивной с одномерным центром) соответствующая пуассонова структура формально эквивалентна линейной.

Если алгебра Ли коммутативна, то следующий по порядку малости член пуассоновой структуры определяет на касательном пространстве структуру некоторой алгебры, которую мы называем алгеброй Ли–Склянина. Препятствия для эквивалентности данной пуассоновой структуры квадратичной лежат в группе когомологий этой алгебры.

Для нахождения нормальных форм вырожденных пуассоновых структур мы используем метод спектральных последовательностей, предложенный в [1] для нахождения нормальных форм особенностей функций и в [2] для нахождения нормальных форм алгебр Ли векторных полей.

Мы рассматриваем комплекс для нахождения пуассоновых когомологий и в терминах спектральной последовательности, ассоциированной с некоторой фильтрацией этого комплекса, приводим нормальные формы вырожденных пуассоновых структур.

§ 1. Скобка Схоутена на алгебре поливекторных полей

Пусть $M = M^n$ – гладкое n -мерное многообразие, $\mathcal{D} = \mathcal{D}(M)$ – модуль векторных полей на M . Обозначим через

$$\mathcal{D}_j = \Lambda^j(\mathcal{D}) = \underbrace{\mathcal{D} \wedge \cdots \wedge \mathcal{D}}_{j \text{ раз}}$$

модуль j -векторных полей на M , $\mathcal{D}_0 = A = C^\infty(M)$, и через i_f – внутреннее дифференцирование на дифференциал df гладкой функции $f \in A$.

Пусть $[\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_j] \subset \mathcal{D}_{i+j-1}$ – *скобка Схоутена* на алгебре поливекторных полей. Напомним ее основные свойства:

- 1) $[f, X] = [X, f] = i_f X$, $f \in A$, $X \in \mathcal{D}_i$;
- 2) $i_f[X, Y] = [i_f X, Y] + (-1)^i [X, i_f Y]$, где $X \in \mathcal{D}_i$, $Y \in \mathcal{D}_j$;
- 3) $[X, Y] = (-1)^{ij} [Y, X]$, $X \in \mathcal{D}_i$, $Y \in \mathcal{D}_j$;
- 4) $[X, Y \wedge Z] = (-1)^k [X, Y] \wedge Z + (-1)^{ij} Y \wedge [X, Z]$, $X \in \mathcal{D}_i$, $Y \in \mathcal{D}_j$, $Z \in \mathcal{D}_k$;
- 5) $[X, [Y, Z]] = (-1)^{k+1} [[X, Y], Z] + (-1)^{ij+1} [Y, [X, Z]]$, $X \in \mathcal{D}_i$, $Y \in \mathcal{D}_j$, $Z \in \mathcal{D}_k$;
- 6) любой диффеоморфизм $\varphi: M \rightarrow M$ индуцирует отображения

$$\varphi_*^{(i)}: \mathcal{D}_i \rightarrow \mathcal{D}_i,$$

где отображение $\varphi_*^{(0)} = \varphi_*: \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0$ задается формулой

$$\varphi_*(f) = f \circ \varphi^{-1}, \quad f \in A.$$

Отображение $\varphi_*^{(1)}: \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$ таково, что

$$\varphi_*^{(1)}(X) = (\varphi^*)^{-1} \circ X \circ \varphi^*,$$

где $X \in \mathcal{D}_1$, а $\varphi_*^{(i)} = \Lambda^i(\varphi_*^{(1)})$, $i \geq 1$, – внешние степени $\varphi_*^{(1)}$.

В этом случае $\varphi_*^{(i)}(fX) = \varphi_*(f)\varphi_*^{(i)}(X)$, $f \in \mathcal{D}$, $X \in \mathcal{D}_i$, и отображения $\varphi_*^{(i)}$, $i \geq 1$, согласованы со скобкой Схоутена:

$$[[\varphi_*^{(i)}(X), \varphi_*^{(j)}(Y)]] = \varphi_*^{(i+j-1)}([X, Y]), \quad X \in \mathcal{D}_i, \quad Y \in \mathcal{D}_j.$$

§ 2. Пуассонова структура на многообразии

2.1. Каждое бивекторное поле $\nabla \in \mathcal{D}_2$ определяет скобку на алгебре функций:

$$[f, g]_\nabla := \langle \nabla, df \wedge dg \rangle = i_g i_f(\nabla).$$

ТЕОРЕМА. *Алгебра $C^\infty(M)$ является алгеброй Ли относительно $[\cdot, \cdot]_\nabla$ в том и только том случае, когда выполнено следующее условие:*

$$[[\nabla, \nabla]] = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем, что на многообразии M определена *пуассонова структура*, если задано такое бивекторное поле $\nabla \in \mathcal{D}_2$, что $[[\nabla, \nabla]] = 0$. Гладкое многообразие с заданной пуассоновой структурой называется *пуассоновым*.

Укажем явный вид скобки Схоутена $[[\nabla, \nabla]]$ в локальных координатах.

Если $x_1, \dots, x_n$ – система локальных координат на M и

$$\nabla = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j},$$

где $a_{ij}(x)$ – гладкие функции на рассматриваемой координатной окрестности, то

$$[[\nabla, \nabla]] = \sum_{s < t < r} \sum_k \left(a_{sk}(x) \frac{\partial a_{tr}(x)}{\partial x_k} - a_{kr}(x) \frac{\partial a_{st}(x)}{\partial x_k} - a_{kt}(x) \frac{\partial a_{sr}(x)}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_s} \wedge \frac{\partial}{\partial x_t} \wedge \frac{\partial}{\partial x_r}.$$

2.2. Каждое бивекторное поле $\nabla \in \mathcal{D}_2$ определяет последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_0 = A \xrightarrow{\partial_\nabla} \mathcal{D}_1 \xrightarrow{\partial_\nabla} \cdots \xrightarrow{\partial_\nabla} \mathcal{D}_i \xrightarrow{\partial_\nabla} \mathcal{D}_{i+1} \xrightarrow{\partial_\nabla} \cdots \xrightarrow{\partial_\nabla} \mathcal{D}_n \longrightarrow 0, \quad (1)$$

где $\partial_\nabla(X) := (-1)^i \llbracket X, \nabla \rrbracket$ для $X \in \mathcal{D}_i$.

Из свойства 4) следует, что оператор ∂_∇ является дифференцированием степени 1 алгебры $\mathcal{D}_* = \sum_{i \geq 0} \mathcal{D}_i$, т.е.

$$\partial_\nabla(X \wedge Y) = \partial_\nabla(X) \wedge Y + (-1)^i X \wedge \partial_\nabla(Y)$$

для $X \in \mathcal{D}_i, Y \in \mathcal{D}_j$.

Кроме того, оператор ∂_∇ является также дифференцированием относительно скобки Схоутена, т.е.

$$\partial_\nabla(\llbracket X, Y \rrbracket) = \llbracket \partial_\nabla(X), Y \rrbracket + (-1)^i \llbracket X, \partial_\nabla(Y) \rrbracket$$

для $X \in \mathcal{D}_i, Y \in \mathcal{D}_j$.

Последовательность (1) является комплексом в том и только том случае, когда ∇ – пуассонова структура.

Когомологии комплекса (1) в члене $\mathcal{D}_i$ называются *пуассоновыми когомологиями многообразия M* [3] и обозначаются

$$H_\nabla^i(M) = \frac{\text{Ker}(\partial_\nabla: \mathcal{D}_i \rightarrow \mathcal{D}_{i+1})}{\text{Im}(\partial_\nabla: \mathcal{D}_{i-1} \rightarrow \mathcal{D}_i)}.$$

2.3. Пусть $\nabla \in \mathcal{D}_2$ определяет пуассонову структуру на M . Рассмотрим оператор $\Gamma_1: \Omega_1(M) \rightarrow \mathcal{D}_1(M)$, действующий следующим образом: $\Gamma_1(\omega) = i_\omega(\nabla)$, где $\omega \in \Omega_1(M)$.

Положим $\Gamma_i = \Lambda^i(\Gamma_1), i \geq 1$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{d} & \Omega_1(M) & \xrightarrow{d} & \cdots \xrightarrow{d} \Omega_n(M) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \Gamma_1 \downarrow & & \Gamma_n \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\partial_\nabla} & \mathcal{D}_1(M) & \xrightarrow{\partial_\nabla} & \cdots \xrightarrow{\partial_\nabla} \mathcal{D}_n(M) \longrightarrow 0 \end{array}$$

коммутативна (ср. [4], [5]).

2.4. Пуассонова структура $\nabla \in \mathcal{D}_2$ называется *симплектической*, если отображение $\Gamma_1: \Omega_1(M) \rightarrow \mathcal{D}_1(M)$ является изоморфизмом.

В этом случае задание бивекторного поля ∇ эквивалентно выбору 2-формы $\omega_\nabla \in \Omega_2(M)$, где $\omega_\nabla = \Gamma_2^{-1}(\nabla)$.

Из приведенной коммутативной диаграммы следует, что невырожденное бивекторное поле ∇ определяет симплектическую структуру в том и только том случае, когда $d\omega_\nabla = 0$.

Для симплектических многообразий пуассоновы когомологии совпадают с когомологиями де Рама [5].

2.5. Опишем пуассоновы кохомологии в малых размерностях (ср. [4]).

Для 0-мерных кохомологий имеем

$$H_{\nabla}^0(M) = \{f \in A \mid \partial_{\nabla}(f) = [f, \nabla] = 0\}$$

или

$$H_{\nabla}^0(M) = \{f \in A \mid [f, g]_{\nabla} = 0 \forall g \in A\}.$$

Таким образом, H_{∇}^0 совпадает с центром алгебры Ли $C^{\infty}(M)$, т.е. является подалгеброй функций Казимира.

Для описания 1-мерных пуассоновых кохомологий заметим, что ядро

$$\text{Ker}(\partial_{\nabla}: \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2) = \{X \in \mathcal{D}_1 \mid L_X(\nabla) = 0\}$$

совпадает с алгеброй Ли всех пуассоновых векторных полей на M (т.е. с алгеброй Ли инфинитезимальных симметрий пуассоновой структуры), а образ $\text{Im}(\partial_{\nabla}: \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}_1)$ совпадает с алгеброй Ли гамильтоновых полей $\{X_f = i_f(\nabla) \mid f \in A\}$. Отметим, что множество гамильтоновых векторных полей – идеал в алгебре Ли всех пуассоновых полей, следовательно, H_{∇}^1 является фактор-алгеброй Ли всех пуассоновых векторных полей по идеалу гамильтоновых векторных полей.

Для интерпретации H_{∇}^2 рассмотрим два вида путей на множестве всех пуассоновых структур:

- пути общего вида: $\nabla_t \in \mathcal{D}_2$, $t \in \mathbb{R}$, такие, что $[\nabla_t, \nabla_t] = 0$, $\nabla_0 = \nabla$;
- тривиальные пути, т.е. пути вида $\nabla_t = (\varphi_t^{(2)})_*(\nabla)$, где φ_t – некоторый путь в группе диффеоморфизмов M , и $\varphi_0 = \text{id}$.

Опишем теперь два вида инфинитезимальных деформаций, отвечающих выбранным пуассоновым путям.

Рассматривая касательные к указанным путям, введем следующие инфинитезимальные деформации:

- общие: $\nabla_t = \nabla_0 + t\nabla' + o(t)$;
- тривиальные: $\nabla_t = \nabla_0 + tL_Y(\nabla_0) + o(t)$ для некоторого векторного поля $Y \in \mathcal{D}_1$.

Заметим, что условие пуассоновости ∇_t для общей деформации, рассматриваемое по модулю структур порядка малости t^2 , имеет вид $[\nabla_0, \nabla'] = 0$. Таким образом, совокупность всех общих инфинитезимальных деформаций совпадает с $\text{Ker } \partial_{\nabla} \subset \mathcal{D}_2$.

Аналогично, совокупность всех тривиальных инфинитезимальных деформаций есть $\text{Im } \partial_{\nabla} \subset \mathcal{D}_2$.

Следовательно, H_{∇}^2 можно рассматривать как фактор-пространство касательных к общим деформациям по касательным к тривиальным деформациям или, другими словами, H_{∇}^2 можно представлять себе как пространство модулей инфинитезимальных деформаций.

2.6. Операция внешнего умножения $\wedge: \mathcal{D}_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_j \rightarrow \mathcal{D}_{i+j}$ индуцирует умножение в пуассоновых кохомологиях:

$$H_{\nabla}^i \otimes_{\mathbb{R}} H_{\nabla}^j \rightarrow H_{\nabla}^{i+j},$$

где

$$\overline{X} \wedge \overline{Y} = \overline{X \wedge Y}, \quad (2)$$

и через $\overline{X} \in H_{\nabla}^i$ мы обозначили класс когомологий коцикла $X \in \mathcal{D}_i$.

Относительно введенного умножения $H_{\nabla}^* = \bigoplus_{i \geq 0} H_{\nabla}^i$ является грассмановой алгеброй, т.е.

$$\overline{X} \wedge \overline{Y} = (-1)^{ij} \overline{Y} \wedge \overline{X}$$

для $\overline{X} \in H_{\nabla}^i, \overline{Y} \in H_{\nabla}^j$.

Аналогично, скобка Схоутена $[\cdot, \cdot]: \mathcal{D}_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_j \rightarrow \mathcal{D}_{i+j-1}$ индуцирует скобку в пуассоновых когомологиях:

$$[\cdot, \cdot]: H_{\nabla}^i \otimes_{\mathbb{R}} H_{\nabla}^j \rightarrow H_{\nabla}^{i+j-1},$$

где

$$[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X, Y]}, \quad (3)$$

удовлетворяющую следующим свойствам:

- b1) $[\overline{X}, \overline{Y}] = (-1)^{ij} [\overline{Y}, \overline{X}]$;
- b2) $[\overline{X}, \overline{Y} \wedge \overline{Z}] = (-1)^k [\overline{X}, \overline{Y}] \wedge \overline{Z} + (-1)^{ij} \overline{Y} \wedge [\overline{X}, \overline{Z}]$;
- b3) $[\overline{X}, [\overline{Y}, \overline{Z}]] = (-1)^{k+1} [[\overline{X}, \overline{Y}], \overline{Z}] + (-1)^{ij+1} [\overline{Y}, [\overline{X}, \overline{Z}]]$

для $\overline{X} \in H_{\nabla}^i, \overline{Y} \in H_{\nabla}^j, \overline{Z} \in H_{\nabla}^k$.

В частности, пуассоновы когомологии $H_{\nabla}^i, i \geq 0$, являются модулями над алгеброй функций Казимира H_{∇}^0 относительно умножения (2), а также модулями относительно скобки (3) над алгеброй Ли H_{∇}^1 .

§ 3. Формальная классификация пуассоновых структур

3.1. Рассмотрим действие псевдогруппы локальных диффеоморфизмов, сохраняющих фиксированную точку $m \in M$, на множестве всех пуассоновых структур.

Обозначим через $\mu \subset A$ максимальный идеал, отвечающий точке m :

$$\mu = \{f \in A \mid f(m) = 0\},$$

а через $\mu^k, k \geq 1$, – идеал функций порядка малости k в точке m . Соответственно через $\mu^k \mathcal{D}_j$ обозначим подмодуль j -векторных полей, имеющих в точке m порядок малости k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что две пуассоновы структуры ∇ и ∇_1 *локально эквивалентны* в точке $m \in M$, если существует локальный диффеоморфизм φ некоторой окрестности точки m , сохраняющий эту точку и такой, что $\varphi_*^{(2)}(\nabla) = \nabla_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что пуассоновы структуры ∇ и ∇_1 *формально эквивалентны* в точке m , если найдется такой локальный диффеоморфизм φ , что $\varphi(m) = m$ и $\varphi_*^{(2)}(\nabla) - \nabla_1 \in \mu^\infty \mathcal{D}_2$.

Известно, что теорема С. Ли дает локальную классификацию пуассоновых структур локально постоянного ранга. А именно, любые две такие пуассоновы структуры данного ранга $2k$ -локально эквивалентны.

Это означает, что в окрестности точки m можно выбрать такие координаты (q, p, z) , что

$$\nabla = \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p^i}.$$

3.2. Мы будем рассматривать формальную классификацию пуассоновых структур в том случае, когда ранг ∇ не является локально постоянным. Более того, в силу “теоремы о расщеплении” А. Вейнштейна [6] мы будем предполагать, что $\nabla_m = 0$.

Для таких структур $\theta = \nabla \bmod \mu^2 \mathcal{D}_2$ определяет структуру алгебры Ли на T_m^* , поэтому задача локальной классификации этих структур содержит в качестве подзадачи задачу классификации всех структур алгебр Ли на T_m^* относительно группы линейных преобразований $\mathrm{GL}(T_m^*)$.

В силу этого замечания мы ограничимся классификацией пуассоновых структур по модулю классификации алгебр Ли на T_m^* , т.е. мы будем рассматривать классификацию пуассоновых структур относительно группы таких локальных диффеоморфизмов $\varphi: M \rightarrow M$, что $\varphi(m) = m$ и $\varphi_{*,m} = \mathrm{id}: T_m \rightarrow T_m$.

Мы применим гомотопический метод (или метод накрывающего пути) для вычисления препятствий к эквивалентности. Рассмотрим две пуассоновы структуры ∇ и ∇_1 , и пусть ∇_t – путь в пуассоновых структурах, соединяющий ∇ и $\nabla_1 \bmod \mu^\infty \mathcal{D}_2$.

Будем искать такой путь φ_t в локальных диффеоморфизмах, что

- 1) $\varphi_0 = \mathrm{id}$;
- 2) $\varphi_t(m) = m, 0 \leq t \leq 1$;
- 3) $(\varphi_t)_*^{(2)}(\nabla_t) = \nabla \bmod \mu^\infty \mathcal{D}_2, 0 \leq t \leq 1$.

Дифференцируя соотношение 3) по t , получим эквивалентное условие:

$$\frac{d}{dt}((\varphi_t)_*^{(2)}(\nabla_t)) = 0 \bmod \mu^\infty \mathcal{D}_2.$$

Затем, вычисляя эту производную, получаем следующее гомологическое уравнение на однопараметрическое семейство векторных полей X_t :

$$[\nabla, X_t] = (\dot{\sigma}_t - [\sigma_t, X_t]) \bmod \mu^\infty \mathcal{D}_2$$

или

$$\partial_\nabla(X_t) = (\dot{\sigma}_t - [\sigma_t, X_t]) \bmod \mu^\infty \mathcal{D}_2,$$

где $X_{t,m} = 0, \sigma_t = \nabla_t - \nabla \in \mu^{p+1} \mathcal{D}_2, p \geq 1$.

Заметим, что $\partial_\nabla(\mu^p \mathcal{D}_j) \subset \mu^p \mathcal{D}_{j+1}, p \geq 0, j \geq 0$, и $[\sigma_t, X_t] \in \mu^{p+q+1} \mathcal{D}_2$, если $\sigma_t \in \mu^{p+1} \mathcal{D}_2, X_t \in \mu^{q+1} \mathcal{D}$.

Поэтому $[\sigma_t, X_t]$ имеет больший порядок малости, чем $\dot{\sigma}_t$, если $q \geq 1$.

Будем искать решение гомологического уравнения в классе векторных полей X_t , имеющих в точке m нуль порядка $p+1$. Тогда $\partial_\nabla(X_t)$ также имеет нуль порядка $p+1$, а гомологическое уравнение, рассматриваемое с точностью до малых $p+2$ -го порядка, примет вид

$$\partial_\nabla(X_t) = \dot{\sigma}_t \bmod \mu^{p+2} \mathcal{D}_2. \quad (4)$$

Обозначим через $[X_t]_{p+1} := X_t \bmod \mu^{p+2} \mathcal{D}_1$ и $[\dot{\sigma}_t]_{p+1} := \dot{\sigma}_t \bmod \mu^{p+2} \mathcal{D}_2$ соответствующие классы смежности. Тогда, используя изоморфизмы

$$\mu^{p+1} \mathcal{D}_j / \mu^{p+2} \mathcal{D}_j \simeq S^{p+1} T_m^* \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^j T_m,$$

получаем следующие включения: $[\dot{\sigma}_t]_{p+1} \in S^{p+1} T_m^* \otimes \Lambda^2 T_m$ и $[X_t]_{p+1} \in S^{p+1} T_m^* \otimes T_m$.

3.3. Для решения уравнения (4) воспользуемся тем, что дифференциал $\partial_\nabla : \mathcal{D}_j \rightarrow \mathcal{D}_{j+1}$, где $j \geq 0$, сохраняет порядок малости, и рассмотрим фактор-комплекс

$$0 \rightarrow S^p T_m^* \xrightarrow{\delta} S^p T_m^* \otimes T_m \xrightarrow{\delta} S^p T_m^* \otimes \Lambda^2 T_m \xrightarrow{\delta} \dots,$$

где $\delta([X]_p) := [\partial_\nabla(X)]_p$ для всех $X \in \mu^p \mathcal{D}_j$, $j = 0, 1, \dots$. Тогда гомологическое уравнение (4) примет вид $\delta([X_t]_{p+1}) = [\dot{\sigma}_t]_{p+1}$. Отметим также, что оператор δ определяется классом $\theta := [\nabla]_1$, поскольку для всех $\varepsilon \in \mu^2 \mathcal{D}_2$

$$[\nabla + \varepsilon, X] = [[\nabla, X]] + [[\varepsilon, X]] = [\nabla, X] \bmod \mu^{p+1} \mathcal{D}_{j+1}$$

при условии, что $X \in \mu^{p+1} \mathcal{D}_j$.

Элемент $\theta \in T_m^* \otimes \Lambda^2 T_m$ можно рассматривать как кососимметрическое отображение $\theta : \Lambda^2 T_m^* \rightarrow T_m^*$, где $\theta(a \wedge b) = \langle \theta, a \wedge b \rangle$, $a, b \in T_m^*$.

Иначе говоря, если $a = d_m f$, $b = d_m g$, где функции f и g таковы, что $f(m) = g(m) = 0$, то $\theta(d_m f \wedge d_m g) = d_m \langle \nabla, df \wedge dg \rangle$. Обозначим через $[a, b]_\theta$ образ $\theta(a \wedge b) \in T_m^*$.

ТЕОРЕМА [6]. Пусть $\nabla \in \mathcal{D}_2$ – такая пуассонова структура, что $\nabla_m = 0$. Тогда отображение $\theta = [\nabla]_1 : \Lambda^2 T_m^* \rightarrow T_m^*$ определяет структуру алгебры Ли на кокасательном пространстве.

3.4. Обозначим через $\mathcal{G} = (T_m^*, \theta)$ алгебру Ли предыдущей теоремы.

Рассмотрим $S^p \mathcal{G} = S^p T_m^*$ как $\mathcal{G}$ -модуль относительно следующего действия:

$$b(a_1 \circ \dots \circ a_p) = \sum_{i=1}^p a_1 \circ \dots \circ a_{i-1} \circ b(a_i) \circ a_{i+1} \circ \dots \circ a_p,$$

где $a_i \in T_m^*$, $i = 1, \dots, p$, $b \in T_m^*$, а $b(a_i) = ad_b(a_i) = [a_i, b]_\theta$ – присоединенное действие алгебры Ли $\mathcal{G}$.

Рассматривая элементы из $S^p \mathcal{G} \otimes \Lambda^j \mathcal{G}^*$ как внешние j -формы на алгебре Ли $\mathcal{G}$ со значениями в $\mathcal{G}$ -модуле $S^p \mathcal{G}$, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Оператор $\delta : S^p \mathcal{G} \otimes \Lambda^j \mathcal{G}^* \rightarrow S^p \mathcal{G} \otimes \Lambda^{j+1} \mathcal{G}^*$, $j \geq 0$, совпадает с дифференциалом в стандартном комплексе для когомологий алгебры Ли $\mathcal{G}$ с коэффициентами в $\mathcal{G}$ -модуле $S^p \mathcal{G}$:

$$0 \rightarrow S^p \mathcal{G} \xrightarrow{\delta} S^p \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}^* \xrightarrow{\delta} S^p \mathcal{G} \otimes \Lambda^2 \mathcal{G}^* \xrightarrow{\delta} \dots \quad (5)$$

3.5. Воспользуемся приведенным описанием комплекса (5) для исследования гомологического уравнения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть бивекторное поле $\sigma \in \mu^{p+1} \mathcal{D}_2$, $p \geq 1$, таково, что $\nabla + \sigma$ является пуассоновой структурой. Тогда $[\sigma]_{p+1}$ – δ -коцикл.

Обратно, если $\sigma \in \mu^{p+1}$, $p \geq 1$, является δ -коциклом, то

$$[\nabla + \sigma, \nabla + \sigma] = 0 \bmod \mu^{p+2} \mathcal{D}_3(M).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Класс $[\sigma]_{p+1}$, $\sigma \in \mu^{p+1}\mathcal{D}_2$, $p \geq 1$, является δ -коциклом тогда и только тогда, когда

$$[\nabla + \sigma, \nabla + \sigma] = 0 \bmod \mu^{p+2}\mathcal{D}_3(M).$$

Таким образом, разрешимость гомологического уравнения $\delta([X_t]_{p+1}) = [\dot{\sigma}_t]_{p+1}$ означает, что $[\dot{\sigma}_t]_{p+1}$ является кограницей, и препятствия к решению гомологического уравнения в $\mu^{p+1}\mathcal{D}_1$, $p \geq 1$, лежат в группе когомологий $H^2(\mathcal{G}, S^{p+1}\mathcal{G})$.

Суммируя сказанное, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. 1) Если $H^2(\mathcal{G}, S^{p+1}\mathcal{G}) = 0$, $p \geq 1$, то любая пюассонова структура ∇_1 такая, что $\nabla - \nabla_1 \in \mu^2\mathcal{D}_2$, формально эквивалентна ∇ .

2) Если класс $[\nabla]_1$ таков, что когомологии $H^2(\mathcal{G}, S^{p+1}\mathcal{G}) = 0$, $p \geq 1$, то пюассонова структура ∇ формально эквивалентна линейной пюассоновой структуре, т.е.

$$\nabla = \sum_{i < j} (c_{ij}^k x_k) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

в некоторой системе локальных координат $x_1, \dots, x_n$, $x_i(t) = 0$, $i = 1, \dots, n$, где c_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли $\mathcal{G}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\nabla \in \mathcal{D}_2$, $\nabla_m = 0$, – такая пюассонова структура, что (T_m^*, θ) является полупростой алгеброй Ли, то ∇ формально эквивалентна линейной пюассоновой структуре.

Тем самым, мы получаем теорему А. Вейнштейна о формальной линеаризации пюассоновой структуры в случае полупростой алгебры Ли [6].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Д. Конн в статье [7] доказал, что для полупростой алгебры $\mathcal{G}$ компактного типа существует в окрестности нуля такая система локальных координат $(y_1, \dots, y_n)$ класса C^∞ , что пюассонова структура ∇ может быть записана в следующем виде:

$$\nabla = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j, k \leq n} c_{ij}^k y_k \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Аналогичный результат получен им для аналитической пюассоновой структуры ∇ с полупростой алгеброй Ли $\mathcal{G}$ и сформулирован в работе [8].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть (T_m^*, θ) является редуктивной алгеброй Ли с одномерным центром. Тогда пюассонова структура ∇ формально эквивалентна линейной.

В частности, если (T_m^*, θ) – одна из следующих алгебр: $\mathfrak{gl}(n)$, $\mathfrak{csp}(n)$, $\mathfrak{cso}(n)$, то ∇ формально линеаризуема.

Пусть пюассонова структура ∇' такова, что $\nabla - \nabla' \in \mu^2\mathcal{D}_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Класс когомологий $h \in H^2(\mathcal{G}, S^{p+1}\mathcal{G})$ назовем допустимым относительно ∇' , если существует бивекторное поле $\sigma \in \mu^{p+1}\mathcal{D}_2$ такое, что класс когомологий $[\sigma]_{p+1}$ совпадает с h , а $\nabla' + \sigma$ является (формальной) пюассоновой структурой.

Определим дерево пюассоновых структур.

Вершина – линейная пуассонова структура $\nabla^1 = [\nabla]_1$.

Уровень 1 – пуассоновы структуры вида $\nabla^1 + \sigma_2$, где $\sigma_2 \in \mu^2\mathcal{D}_2$, а класс $[\sigma_2]_2$ в $H^2(\mathcal{G}, S^2\mathcal{G})$ пробегает все ∇^1 -допустимые структуры. Для каждого ∇^1 -допустимого класса $\lambda_1 \in H^2(\mathcal{G}, S^2\mathcal{G})$ зафиксируем одну из таких структур и обозначим ее через $\nabla_{\lambda_1}^2$.

Уровень 2 – пуассоновы структуры вида $\nabla_{\lambda_1}^2 + \sigma_3$, где $\sigma_3 \in \mu^3\mathcal{D}_2$, а класс $[\sigma_3]_3$ в $H^2(\mathcal{G}, S^3\mathcal{G})$ пробегает все $\nabla_{\lambda_1}^2$ -допустимые структуры. Для каждого $\nabla_{\lambda_1}^2$ -допустимого класса $\lambda_2 \in H^2(\mathcal{G}, S^3\mathcal{G})$ зафиксируем одну из таких структур и обозначим ее через $\nabla_{\lambda_1, \lambda_2}^3$.

Уровень p – пуассоновы структуры вида $\nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}}^p + \sigma_{p+1}$, где $\sigma_{p+1} \in \mu^{p+1}\mathcal{D}_2$, а класс $[\sigma_{p+1}]_{p+1}$ в $H^2(\mathcal{G}, S^{p+1}\mathcal{G})$ пробегает все $\nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}}^p$ -допустимые структуры. Для каждого $\nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}}^p$ -допустимого класса $\lambda_p \in H^2(\mathcal{G}, S^{p+1}\mathcal{G})$ зафиксируем одну из таких структур и обозначим ее через $\nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}^{p+1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любой пуассоновой структуры ∇' такой, что $\nabla - \nabla' \in \mu^2\mathcal{D}_2$, и любого числа $p \geq 2$ существуют последовательность диффеоморфизмов φ_j , где $2 \leq j \leq p$ и $\varphi_j^* = \text{id mod } \mu^j$, и пуассонова структура $\nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}}^p$ такие, что $\varphi_*^{(2)}(\nabla') = \nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}}^p \text{ mod } \mu^{p+1}\mathcal{D}_2$ и $\varphi = \varphi_p \circ \dots \circ \varphi_2$.

Рассмотрим два случая.

А) Дерево пуассоновых структур обрывается на некотором уровне p_0 , если выполнено $H^2(\mathcal{G}, S^{p+1}\mathcal{G}) = 0$ при $p \geq p_0 \geq 1$.

ТЕОРЕМА 3. Если $H^2(\mathcal{G}, S^{p+1}\mathcal{G}) = 0$, $p \geq p_0 \geq 1$, то ∇ формально эквивалентна структуре вида

$$\nabla = \sum_{\substack{1 \leq |\sigma| \leq p_0 \\ i < j}} a_{ij}^{\sigma} x^{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Здесь

$$\nabla' = \sum_{\substack{|\sigma| = p+1 \\ i < j}} a_{ij}^{\sigma} x^{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad p \geq 1,$$

– представители допустимого относительно пуассоновой структуры

$$\nabla'' = \sum_{\substack{|\sigma| \leq p \\ i < j}} a_{ij}^{\sigma} x^{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

класса когомологий в $H^2(\mathcal{G}, S^{p+1}\mathcal{G})$.

В) В общем случае получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\gamma_i^p \in \mu^{p+1}\mathcal{D}_2$, $i = 1, \dots, n_p$, – такие бивекторные поля, что образы классов $[\gamma_i^p]_{p+1}$ образуют базис в группе когомологий $H^2(\mathcal{G}, S^{p+1}\mathcal{G})$, $p \geq 1$.

Тогда любая пуассонова структура ∇ такая, что $\nabla_m = 0$ и $[\nabla]_1 = \theta$ определяет алгебру Ли $\mathcal{G}$, формально эквивалентна следующей пуассоновой структуре:

$$\nabla_1 = \sum_{i < j} (c_{ij}^k x_k) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{s, p} c_s^p \gamma_s^p,$$

где c_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли $\mathcal{G}$, а $c_s^p \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Здесь, как и в предыдущей теореме, $\sum_s c_s^p \gamma_s^p$ – представители допустимых относительно пуассоновых структур

$$\sum_{i < j} (c_{ij}^k x_k) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{s, j < p} c_s^j \gamma_s^j$$

классов когомологий в $H^2(\mathcal{G}, S^{p+1}\mathcal{G})$.

§ 4. Спектральная последовательность

В этом параграфе мы построим спектральную последовательность, которая дает более подробное описание нормальных форм пуассоновых структур.

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Две пуассоновы структуры ∇ и ∇_1 называются k -эквивалентными в точке m , $k = 0, 1, 2, \dots$, если существует диффеоморфизм φ некоторой окрестности этой точки, сохраняющий m и такой, что $\varphi(m) = m$ и $\varphi_*^{(2)}(\nabla) - \nabla_1 \in \mu^{k+1}\mathcal{D}_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пуассонова структура ∇ называется k -достаточной, $k = 0, 1, 2, \dots$, если любая k -эквивалентная ей пуассонова структура $\nabla_1 \in \mathcal{D}_2$ является (формально) эквивалентной ∇ .

Введем фильтрацию в комплекс (1), положив

$$F_{p,q} = \mu^p \mathcal{D}_{p+q}. \quad (6)$$

Из условия $\nabla \in \mu \mathcal{D}_2$ следует, что $\partial_\nabla(\mu^p \mathcal{D}_j) \subset \mu^p \mathcal{D}_{j+1}$. Тем самым, дифференциал ∂_∇ сохраняет фильтрацию: $\partial_\nabla(F_{p,q}) \subset F_{p,q+1}$. Эта фильтрация также согласована со скобкой Схоутена в следующем смысле: $\llbracket F_{a,b}, F_{c,d} \rrbracket \subset F_{a+c-1, b+d}$. Пусть

$$Z_r^{p,q} = \{ \omega \in F_{p,q} \mid \partial_\nabla(\omega) \in F_{p+r, q-r+1} \}$$

– (p, q) -коциклы порядка r и

$$B_r^{p,q} = \{ \omega \in F_{p,q} \mid \exists \theta \in F_{p-r, q+r-1} : \partial_\nabla(\theta) = \omega \}$$

– (p, q) -кограницы порядка r , $B_r^{p,q} = \partial_\nabla(Z_r^{p-r, q+r-1})$. Напомним, что спектральная последовательность $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$ когомологий комплекса (1), построенная по фильтрации (6), имеет вид

$$E_r^{p,q} = Z_r^{p,q} / (Z_{r-1}^{p+1, q-1} + B_{r-1}^{p,q}), \quad (7)$$

а дифференциалы $d_r = (\partial_\nabla)_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$ порождены ∂_∇ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Справедливы следующие включения:*

- $\llbracket Z_r^{p,q}, Z_r^{p',q'} \rrbracket \subset Z_r^{p+p'-1, q+q'};$
- $\llbracket B_{r-1}^{p,q}, Z_r^{p',q'} \rrbracket \subset B_{r-1}^{p+p'-1, q+q'} + Z_{r-1}^{p+p', q+q'-1};$
- $\llbracket Z_{r-1}^{p+1, q-1}, Z_r^{p',q'} \rrbracket \subset Z_{r-1}^{p+p', q+q'-1}.$

Это предложение показывает, что скобка Схоутена может быть перенесена на спектральную последовательность.

Действительно, определим спаривание

$$E_r^{p,q} \times E_r^{p',q'} \rightarrow E_r^{p+p'-1, q+q'},$$

положив $[[x_r^{p,q}, y_r^{p',q'}]] = [x, y] \bmod (Z_{r-1}^{p+p', q+q'-1} + B_{r-1}^{p+p'-1, q+q'})$ для классов смежности

$$x_r^{p,q} = x \bmod (Z_{r-1}^{p+1, q-1} + B_{r-1}^{p,q}), \quad y_r^{p',q'} = y \bmod (Z_{r-1}^{p'+1, q'-1} + B_{r-1}^{p',q'}),$$

где $x \in Z_r^{p,q}, y \in Z_r^{p',q'}$.

Свойства скобки Схоутена на алгебре поливекторных полей индуцируют соответствующие свойства скобки в спектральной последовательности:

$$[[x_r^{p,q}, y_r^{p',q'}]] = (-1)^{st} [[y_r^{p',q'}, x_r^{p,q}]], \quad (8)$$

$$[[x_r^{p,q}, [y_r^{p',q'}, z_r^{p'',q''}]]] = (-1)^{k+1} [[[x_r^{p,q}, y_r^{p',q'}], z_r^{p'',q''}] + (-1)^{st+1} [[y_r^{p',q'}, [x_r^{p,q}, z_r^{p'',q''}]]], \quad (9)$$

где $s = p + q, t = p' + q', k = p'' + q''$.

Кроме того,

$$d_r([x_r^{p,q}, y_r^{p',q'}]) = [d_r(x_r^{p,q}), y_r^{p',q'}] + (-1)^{p+q} [x_r^{p,q}, d_r(y_r^{p',q'})]. \quad (10)$$

4.2. Опишем начальные члены полученной спектральной последовательности.

В случае $r = 0$ имеем

$$E_0^{p,q} = F_{p,q}/F_{p+1,q-1} = \mu^p \mathcal{D}_{p+q}/\mu^{p+1} \mathcal{D}_{p+q} = S^p T_m^* \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^{p+q} T_m.$$

Из теоремы п. 3.3 следует, что дифференциал $d_0: E_0^{p,q} \rightarrow E_0^{p,q+1}$ совпадает с дифференциалом δ в стандартном комплексе для когомологий алгебры Ли $\mathcal{G} = (T_m^*, \theta)$ с коэффициентами в $\mathcal{G}$ -модуле $S^p \mathcal{G}$.

Поэтому $E_1^{p,q} = H^{p+q}(\mathcal{G}, S^p \mathcal{G})$. В частности, при $p + q = 0$ имеем $E_1^{p,-p} = (S^p \mathcal{G})^{\mathcal{G}}$, где через $L^{\mathcal{G}}$ для $\mathcal{G}$ -модуля L обозначено подпространство $\mathcal{G}$ -инвариантных элементов L :

$$L^{\mathcal{G}} = \{x \in L \mid g(x) = 0 \forall g \in \mathcal{G}\}.$$

ТЕОРЕМА. *Фильтрация $F_{p,q}$ определяет спектральную последовательность $(E_r^{p,q}, d_r)$, в которой*

- $E_0^{p,q} = S^p T_m^* \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^{p+q} T_m$;
- $E_1^{p,q} = H^{p+q}(\mathcal{G}, S^p \mathcal{G})$;
- члены $E_r^{p,q}$ несут структуру биградуированной алгебры Ли относительно скобки Схоутена, т.е. на $\bigoplus_{p,q} E_r^{p,q}$ определено билинейное спаривание

$$E_r^{p,q} \times E_r^{p',q'} \rightarrow E_r^{p+p'-1, q+q'},$$

получаемое редукцией скобки Схоутена, которое удовлетворяет соотношениям (8), (9), а дифференциал d_r является дифференцированием этой алгебры (10);

- спектральная последовательность стабилизируется в следующем смысле: для каждой пары чисел (p, q) найдется такое число $r_0 = r_0(p, q)$, что

$$E_{r_0}^{p,q} = E_{r_0+1}^{p,q} = \dots = E_{\infty}^{p,q},$$

где $d_r = 0, r \geq r_0$.

4.3. Рассмотрим такие пуассоновы структуры $\nabla \in \mu\mathcal{D}_2$, для которых

$$\mathcal{G} = (T_m^*, \theta = \nabla \bmod \mu^2 \mathcal{D}_2)$$

является редуктивной алгеброй Ли.

Обозначим через $\mathcal{G}_0 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ полупростую часть и через C – центр алгебры $\mathcal{G}$. Тогда из теоремы п. 4.2 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Для указанной выше пуассоновой структуры ∇ член $E_1^{p,q}$ в спектральной последовательности (7) имеет вид*

$$E_1^{p,q} = \sum_{i+j=p+q} H^i(\mathcal{G}_0, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^j(C^*) \otimes_{\mathbb{R}} (S^p \mathcal{G})^{\mathcal{G}}.$$

§ 5. Нормальные формы пуассоновых структур

5.1. Использование спектральной последовательности для получения нормальных форм пуассоновых структур основано на следующих замечаниях.

Во-первых, как и выше, мы будем рассматривать классификацию пуассоновых структур относительно группы таких локальных диффеоморфизмов $\varphi: M \rightarrow M$, что $\varphi(m) = m$ и $\varphi_{*,m} = \text{id}: T_m \rightarrow T_m$.

Во-вторых, если $\nabla \in \mathcal{D}_2$ и $\nabla + \sigma \in \mathcal{D}_2$ являются пуассоновыми структурами, то σ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\partial_{\nabla}(\sigma) + \frac{1}{2}[\sigma, \sigma] = 0.$$

Поэтому $\partial_{\nabla}(\sigma) = -\frac{1}{2}[\sigma, \sigma] \in F_{2p-1, 4-2p}$, если $\sigma \in F_{p, 2-p}$ и, следовательно, $\sigma \in Z_r^{p, 2-p}$ для всех $r \leq p-1$.

В-третьих, обозначив через φ_t однопараметрическую группу локальных диффеоморфизмов, отвечающую векторному полю $X \in \mu\mathcal{D}$, мы будем использовать следующую формулу:

$$(\varphi_t)_*^{(2)}(\nabla) = \nabla + t[\nabla, X] + \frac{1}{2}t^2[[\nabla, X], X] + \dots,$$

откуда вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $X \in Z_r^{p, 1-p}$. Тогда для локального диффеоморфизма $\varphi = \varphi_1$ имеем

$$\varphi_*^{(2)}(\nabla) - \nabla - \partial_{\nabla}(X) \in F_{2p+r-1, 3-2p-r}.$$

5.2. Учитывая эти замечания, получаем следующую теорему, описывающую нормальную форму p -го приближения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть бивекторные поля $v_1, \dots, v_r$, $v_i \in \mu^p \mathcal{D}_2$, $p \geq 2$, таковы, что их образы порождают $E_{p-s+1}^{p, 2-p}$, где $2 \leq s \leq p+1$.

Тогда для каждой пуассоновой структуры вида $\nabla + \varepsilon$, где $\varepsilon \in \mu^p \mathcal{D}_2$, $p \geq 2$, существует такой локальный диффеоморфизм φ , что $\varphi^* = \text{id} \bmod \mu^s$ и

$$\varphi_*^{(2)}(\nabla) - \nabla - \varepsilon \equiv \sum_{i=1}^r c_i v_i \bmod F_{p+1, 1-p},$$

где $c_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq r$.

ТЕОРЕМА 2. В условиях теоремы 1 существует такой диффеоморфизм φ , что $\varphi^* = \text{id} \bmod \mu^s$ и

$$\varphi_*^{(2)} \left(\nabla - \sum_{i=1}^r c_i v_i \right) = (\nabla + \varepsilon) \bmod F_{p+1,1-p}.$$

5.3. Последовательное применение теоремы 1 п. 5.2 приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 1. Зафиксируем последовательность чисел

$$2 \leq s(2) \leq s(3) \leq \dots \leq s(p) \leq \dots,$$

в которой имеется конечное число равенств и для которой $s(p) \leq p+1$. Пусть элементы $v_1, \dots, v_{r_p} \in \mu^p \mathcal{D}_2$, $1 \leq r_p \leq \infty$, таковы, что их образы порождают все $E_{p-s(p)+1}^{p,2-p}$, $p \geq 2$.

Тогда для каждой пуассоновой структуры вида $\nabla + \varepsilon$, где $\varepsilon \in \mu^q \mathcal{D}_2$, $q \geq 2$, найдется такой локальный диффеоморфизм φ , что

$$\varphi_*^{(2)}(\nabla) - \nabla - \varepsilon \equiv \sum_i c_i v_i \bmod \mu^\infty \mathcal{D}_2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Выбор представителей v_i и, что более важно, представителей $\sum_i c_i v_i$ для классов из $E_{p-s(p)+1}^{p,2-p}$ не произволен, а специален: классы должны быть допустимыми относительно соответствующих пуассоновых структур.

По аналогии с рассуждениями, приведенными в п. 3.5, построим редуцированное дерево пуассоновых структур.

Для этого фиксируем последовательность $s(p)$ и рассмотрим следующую конструкцию.

Вершина – линейная пуассонова структура $\nabla^1 = [\nabla]_1$.

Уровень 1 совпадает с первым уровнем дерева пуассоновых структур (п. 3.5), т.е. это пуассоновы структуры $\nabla_{\lambda_1}^2$, где λ_1 – допустимый относительно ∇^1 класс когомологий в $H^2(\mathcal{G}, S^2 \mathcal{G})$.

Уровень 2 – пуассоновы структуры вида $\nabla_{\lambda_1}^2 + \sigma_3$, где $\sigma_3 \in \mu^3 \mathcal{D}_2$ – представитель $\nabla_{\lambda_1}^2$ -допустимых классов когомологий λ_2 в $E_{4-s(3)}^{3,-1}$. Здесь $E_{4-s(3)}^{3,-1}$ – член спектральной последовательности, построенной по пуассоновой структуре $\nabla_{\lambda_1}^2$. Обозначим эти структуры $\nabla_{\lambda_1, \lambda_2}^3$.

Уровень p – пуассоновы структуры вида $\nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}}^p + \sigma_{p+1}$, где $\sigma_{p+1} \in \mu^{p+1} \mathcal{D}_2$ – представитель $\nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}}^p$ -допустимых классов когомологий λ_p в $E_{p-s(p)+2}^{p+1,1-p}$. Здесь $E_{p-s(p)+2}^{p+1,1-p}$ – член спектральной последовательности, построенной по пуассоновой структуре $\nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}}^p$. Обозначим эти структуры $\nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}^{p+1}$.

Введем также понятие *ветви* дерева (формальных) пуассоновых структур. Рассмотрим возникающие в дереве последовательности пуассоновых структур вида

$$\nabla^1, \nabla_{\lambda_1}^2, \nabla_{\lambda_1, \lambda_2}^3, \dots, \nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}}^p, \dots$$

Каждую такую последовательность назовем ветвью дерева. Для каждой ветви существует (формальная) пуассонова структура $\tilde{\nabla}$, p -эквивалентная p -й точке ветвления ветви ($(p-1)$ -му уровню ветви) – пуассоновой структуре $\nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}}^p$.

Фиксируем структуру такого вида и обозначим ее через $\nabla_{\{\lambda_i\}_1^\infty}$. Будем отождествлять ветви и задающие их пуассоновы структуры.

ТЕОРЕМА 2. 1) Любая пуассонова структура вида $\nabla + \varepsilon$, где $\varepsilon \in \mu^2 \mathcal{D}_2$, формально эквивалентна одной из ветвей приведенного дерева, т.е. существует диффеоморфизм φ такой, что

$$\varphi_*^{(2)}(\nabla + \varepsilon) = \nabla_{\{\lambda_i\}_1^\infty} \bmod \mu^\infty \mathcal{D}_2$$

для некоторой последовательности $\{\lambda_i\}_1^\infty$.

В частности, $\nabla + \varepsilon$ p -эквивалентна пуассоновой структуре $\nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}}^p$ из $(p-1)$ -го уровня дерева.

2) Две пуассоновы структуры, формально эквивалентные одной ветви дерева, формально эквивалентны.

§ 6. Алгебры Ли–Склянина

6.1. В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда алгебра Ли $\mathcal{G} = (T_m^*, \theta)$ коммутативна. Тогда $\nabla \in \mu^2 \mathcal{D}_2$.

Имеем $E_0^{p,q} = S^p \mathcal{G} \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^{p+q} \mathcal{G}^*$, $d_0^{p,q} = 0$. Поэтому $E_1^{p,q} = E_0^{p,q} = S^p \mathcal{G} \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^{p+q} \mathcal{G}^*$. Рассмотрим дифференциал

$$d_{a,b}^1 = d_{a,b}: S^a \mathcal{G} \otimes \Lambda^b \mathcal{G}^* \rightarrow S^{a+1} \mathcal{G} \otimes \Lambda^{b+1} \mathcal{G}^*.$$

Заметим, что $d_{a,b}^1$ определяется классом $\nabla \bmod \mu^3 \mathcal{D}_2$. Действительно, пусть

$$[X]_a = X \bmod \mu^{a+1} \mathcal{D}_b \in S^a \mathcal{G} \otimes \Lambda^b \mathcal{G}^*$$

для некоторого $X \in \mu^a \mathcal{D}_b$.

Тогда $d_{a,b}^1([X]_a) = [X, \nabla] \bmod \mu^{a+2} \mathcal{D}_{b+1}$, так как $[X, \varepsilon] \in \mu^{a+2} \mathcal{D}_{b+1}$, если $\varepsilon \in \mu^3 \mathcal{D}_2$. Обозначим $\theta = [\nabla]_2 \in S^2 T_m^* \otimes \Lambda^2 T_m$.

Этот элемент можно рассматривать как оператор $\theta: T_m^* \wedge T_m^* \rightarrow S^2 T_m^*$, где

$$p \wedge q \mapsto [p, q]_\theta := \langle \theta, p \wedge q \rangle = \langle \nabla, df \wedge dg \rangle \bmod \mu^3$$

для $p = d_m f$, $q = d_m g$ и $f(m) = g(m) = 0$.

6.2. Как и в случае пары $(T_m^*, [\nabla]_1)$, определяющей алгебру Ли на T_m^* , рассмотренная выше пара $(T_m^*, [\nabla]_2)$ не произвольна, а определяет некоторую структуру на T_m^* , которую мы называем алгеброй Ли–Склянина.

Для того чтобы сформулировать условия для $\theta = [\nabla]_2$, заметим, что скобка Схоутена $[\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_j] \subset \mathcal{D}_{i+j-1}$ обладает следующим свойством:

$$[\mu^p \mathcal{D}_i, \mu^q \mathcal{D}_j] \in \mu^{p+q-1} \mathcal{D}_{i+j-1}.$$

Поэтому мы можем определить новую скобку

$$[S^p T_m^* \otimes \Lambda^i T_m, S^q T_m^* \otimes \Lambda^j T_m]' \subset S^{p+q-1} T_m^* \otimes \Lambda^{i+j-1} T_m.$$

Заметим, что в действительности скобку $[[\cdot, \cdot]']$:

$$[[S^p E^* \otimes \Lambda^i E, S^q E^* \otimes \Lambda^j E]'] \subset S^{p+q-1} E^* \otimes \Lambda^{i+j-1} E$$

можно определить для любого векторного пространства E .

Для этого воспользуемся индукцией по $i + j$.

1) Для $i = 0$ положим

$$\begin{aligned} [[\theta, \Phi \otimes X_1 \wedge \cdots \wedge X_j]'] &= [[\Phi \otimes X_1 \wedge \cdots \wedge X_j, \theta]'] \\ &= \Phi \circ \sum_i (-1)^i X_i(\theta) \otimes X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_j \\ &:= i_\theta(\Phi \otimes X_1 \wedge \cdots \wedge X_j), \end{aligned}$$

где $\theta \in S^p E^*$, $\Phi \in S^q E^*$, $X_i \in E$, $1 \leq i \leq j$.

Определим действие E на пространстве $S^p E^*$: $E \otimes S^p E^* \rightarrow S^{p-1} E^*$ следующим образом:

$$X \otimes \theta_1 \circ \cdots \circ \theta_p \mapsto (X, \theta_1)\theta_2 \circ \cdots \circ \theta_p + \cdots + \theta_1 \circ \cdots \circ \theta_{p-1}(X, \theta_p).$$

Продолжим определение скобки $[[\cdot, \cdot]']$.

2) Если $i = 1$, $j = 1$, то положим

$$[\theta \otimes X, \Phi \otimes Y]' = \theta \circ X(\Phi) \otimes Y - \Phi \circ Y(\theta) \otimes X,$$

где $\theta \in S^p E^*$, $X, Y \in E$, $\Phi \in S^q E^*$.

3) Если $X \in S^q E^* \otimes \Lambda^i E$, $Y \in S^{q'} E^* \otimes \Lambda^j E$, то элемент

$$[[X, Y]'] \in S^{q+q'-1} E^* \otimes \Lambda^{i+j-1} E$$

таков, что $i_\theta([X, Y]') = [i_\theta(X), Y]' + (-1)^i [X, i_\theta(Y)]'$ для всех $\theta \in S^p E^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Скобка $[[\cdot, \cdot]']$ удовлетворяет следующим свойствам:

- а) $[[X, Y]'] = (-1)^{ij} [[Y, X]']$;
- б) $[[X, Y \wedge Z]'] = (-1)^k [[X, Y]'] \wedge Z + (-1)^{ij} Y \wedge [[X, Z]']$;
- в) $[[X, [Y, Z]']'] = (-1)^{k+1} [[[X, Y]'], Z]' + (-1)^{ij+1} [Y, [X, Z]']'$,

где $X \in S^p E^* \otimes \Lambda^i E$, $Y \in S^q E^* \otimes \Lambda^j E$, $Z \in S^r E^* \otimes \Lambda^k E$.

6.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем, что элемент $\theta \in S^2 E^* \otimes \Lambda^2 E$ определяет структуру алгебры Ли–Склянина на пространстве E , если $[[\theta, \theta]'] = 0$.

ПРИМЕР. Пусть $E = \mathbb{R}^4$, а x_1, x_2, x_3, x_4 – базис в E^* .

Тогда элемент $\theta \in S^2 E^* \otimes \Lambda^2 E$:

$$\begin{aligned} \theta = & -x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} - 2x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_4} \\ & - x_2 x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_4} - x_3 x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_4} \end{aligned}$$

определяет структуру алгебры Ли–Склянина на $\mathbb{R}^4$ [4].

Используем построенную выше спектральную последовательность для определения когомологий Ли–Склянина.

Для этого рассмотрим последовательность

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow S^k E^* \xrightarrow{\partial_\theta} S^{k+1} E^* \otimes E \xrightarrow{\partial_\theta} \dots \xrightarrow{\partial_\theta} S^{k+i} E^* \otimes \Lambda^i E \\ \xrightarrow{\partial_\theta} S^{k+i+1} E^* \otimes \Lambda^{i+1} E \xrightarrow{\partial_\theta} \dots \end{aligned} \quad (11)$$

с дифференциалом $\partial_\theta: S^{k+i} E^* \otimes \Lambda^i E \rightarrow S^{k+i+1} E^* \otimes \Lambda^{i+1} E$, действующим следующим образом: $\partial_\theta(X) = (-1)^i [X, \theta]'$, где $X \in S^{k+i} E^* \otimes \Lambda^i E$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пара (T_m^*, θ) определяет структуру алгебры Ли–Склянина тогда и только тогда, когда $\partial_\theta^2 = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Когомологии комплекса (11) в члене $S^{k+i} E^* \otimes \Lambda^i E$ обозначим через $H^{k+i, i}(E, \theta)$ и назовем $(k+i, i)$ -когомологиями алгебры Ли–Склянина.

Суммируя сказанное выше, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА. Пусть $\nabla \in \mu^2 \mathcal{D}_2$ – пуассонова структура. Тогда пара (T_m^*, θ) , где $\theta = \nabla \bmod \mu^3 \mathcal{D}_2$, определяет структуру алгебры Ли–Склянина на T_m^* , а второй член спектральной последовательности $(E_2^{p, q}, d_2^{p, q})$ совпадает с группой $(p+q, p)$ -когомологий алгебры Ли–Склянина $E_2^{p, q} = H^{p+q, p}(T_m^*, \theta)$.

Московский институт радиоэлектроники и автоматики

E-mail: lychagin@glas.apc.org

Поступило

22.01.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В. И. Спектральные последовательности для приведения функций к нормальным формам // Задачи механики и матем. физики. М.: Наука, 1976. С. 7–20.
- [2] Лычагин В. В. Особенности решений, спектральные последовательности и нормальные формы алгебр Ли векторных полей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 3. С. 584–612.
- [3] Lichnerowicz A. Les varietes de Poisson et leurs algebres de Lie associees // J. Diff. Geom. 1977. V. 12. P. 253–300.
- [4] Карасев М. В., Маслов В. П. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [5] Brylinski J. L. A differential complex for Poisson manifolds // J. Diff. Geom. 1988. V. 28. P. 93–114.
- [6] Weinstein A. The local structures of Poisson manifolds // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. P. 523–557.
- [7] Conn J. F. Normal forms for smooth Poisson structures // Ann. of Math. 1985. V. 121. P. 565–593.
- [8] Conn J. F. Normal forms for analytic Poisson structures // Ann. of Math. 1984. V. 119. P. 577–601.