Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Мильман, Продолжение функций, сохраняющее модуль непрерывности, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 2, 236–245

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1496>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 15:38:29

УДК 517.5

ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ, СОХРАНЯЮЩЕЕ МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ

В. А. Мильман

Рассмотрена задача продолжения действительнзначной функции с подмножества метрического пространства на все пространство. Предложен оператор продолжения, обеспечивающий сохранение модуля непрерывности функции, и исследованы его свойства. Приведено приложение к задаче о следе локально липшицевой функции на компактном подмножестве метрического пространства.

Библиография: 6 названий.

Рассматривается задача продолжения действительнзначной функции с подмножества метрического пространства на все пространство с сохранением модуля непрерывности функции. Подобные задачи возникают в ряде вопросов математического анализа и геометрии [1, с. 220], [2], [3].

1. Используемые обозначения и понятия. Будем придерживаться следующих обозначений:

$\mathbb{R}_+$ – множество неотрицательных действительных чисел,

(X, d) – метрическое пространство,

D – ограниченное подмножество множества X ,

$\overline{D}$ – замыкание подмножества D ,

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченная функция,

$\omega: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – неубывающая функция.

Функция ω называется *полуаддитивной*, если

$$\omega(a + b) \leq \omega(a) + \omega(b) \quad \forall a, b \geq 0.$$

Функция ω называется *модулем непрерывности* [4], если она неубывающая, полуаддитивная и

$$\omega(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0.$$

Определим функциональные классы

$$m * \text{Lip}(D) = \{f: D \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x, y \in D \mid f(x) - f(y) \mid \leq m \cdot d(x, y)\},$$
$$H(D, \omega) = \{f: D \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x, y \in D \mid f(x) - f(y) \mid \leq \omega(d(x, y))\}.$$

Первый из классов состоит из функций с константой Липшица, не превосходящей m , второй – из функций, модуль непрерывности которых имеет заданную мажоранту ω . Функция ω не обязана быть модулем непрерывности.

Относительной константой Липшица функции $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x будем называть величину

$$k(h, x) = \sup \left\{ \frac{|h(x) - h(z)|}{d(x, z)} \mid z \in X, z \neq x \right\}.$$

2. Постановка задачи. Пусть заданы неубывающая функция ω и ограниченная функция $f \in H(D, \omega)$. Требуется продолжить f на множество X , т.е. найти такую функцию $g: D \rightarrow \mathbb{R}$, чтобы $g(x) = f(x) \ \forall x \in D$ и $g \in H(X, \omega)$.

Если функция ω является модулем непрерывности, известны [3], [5] операторы продолжения $E_1, E_2: H(D, \omega) \rightarrow H(X, \omega)$, то

$$E_1(f)(x) = \sup \{ f(y) - \omega(d(y, x)) \mid y \in D \}, \quad (1)$$

$$E_2(f)(x) = \inf \{ f(y) + \omega(d(y, x)) \mid y \in D \}. \quad (2)$$

В настоящей работе строится иной оператор продолжения и исследуются его свойства.

3. Вспомогательные функции. Определим функции $u_f, v_f: (X \setminus \overline{D}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$u_f(x, c) = \sup \left\{ \frac{c - f(y)}{d(x, y)} \mid y \in D \right\}, \quad v_f(x, c) = \sup \left\{ \frac{f(y) - c}{d(x, y)} \mid y \in D \right\}, \quad x \in X \setminus \overline{D}.$$

ЛЕММА 1. Если $x \in X \setminus \overline{D}$, то уравнение

$$u_f(x, c) = v_f(x, c) \quad (3)$$

имеет единственное решение $c_0 = c_0(x)$. При этом для $c \neq c_0$

$$\sup \left\{ \frac{|c_0 - f(y)|}{d(x, y)} \mid y \in D \right\} < \sup \left\{ \frac{|c - f(y)|}{d(x, y)} \mid y \in D \right\}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из ограниченности множества D и того, что $x \notin \overline{D}$ следует, что

$$b_1 = \sup \{ d(x, y) \mid y \in D \} < +\infty, \quad b_2 = \inf \{ d(x, y) \mid y \in D \} > 0.$$

Из определения функции u_f легко получаются неравенства

$$\begin{aligned} u_f(x, c) + \frac{a}{b_1} &\leq u_f(x, c + a) \leq u_f(x, c) + \frac{a}{b_2}, \\ u_f(x, c) - \frac{a}{b_2} &\leq u_f(x, c - a) \leq u_f(x, c) - \frac{a}{b_1}, \end{aligned} \quad \text{где } a > 0.$$

Из них следует непрерывность и строгое возрастание функции u_f по c , а также равенства

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} u_f(x, c) = +\infty, \quad \lim_{c \rightarrow -\infty} u_f(x, c) = -\infty.$$

Аналогично доказывается непрерывность и убывание функции v_f по c , а также аналогичные равенства. Следовательно, функция $u_f(x, c) - v_f(x, c)$ непрерывна и строго возрастает по c и

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} (u_f(x, c) - v_f(x, c)) = +\infty, \quad \lim_{c \rightarrow -\infty} (u_f(x, c) - v_f(x, c)) = -\infty.$$

Отсюда следует существование и единственность решения c_0 уравнения (3).

Обозначим

$$p(x, c) = \sup \left\{ \frac{|c - f(y)|}{d(x, y)} \mid y \in D \right\}.$$

Так как $p(x, c) = \max\{u_f(x, c), v_f(x, c)\}$, то при $c > c_0$

$$p(x, c) = u_f(x, c) > u_f(x, c_0) = p(x, c_0),$$

а при $c < c_0$

$$p(x, c) = v_f(x, c) > v_f(x, c_0) = p(x, c_0).$$

Неравенство (4) доказано. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть f, f_1 – ограниченные на D функции, $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

- 1) если $f \leq f_1$, то $u_f \geq u_{f_1}$ и $v_f \leq v_{f_1}$;
- 2) $u_{f+b}(x, c) = u_f(x, c - b)$, $v_{f+b}(x, c) = v_f(x, c - b)$;
- 3) при $a \geq 0$ $u_{af}(x, ac) = a \cdot u_f(x, c)$, $v_{af}(x, ac) = a \cdot v_f(x, c)$;
- 4) при $a < 0$ $u_{af}(x, ac) = -a \cdot v_f(x, c)$, $v_{af}(x, ac) = -a \cdot u_f(x, c)$.

Все утверждения непосредственно следуют из определений u_f и v_f .

3. Оператор продолжения. Определим функцию $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, которая является продолжением функции f на множество X :

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in D, \\ \frac{1}{2} \left(\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in D}} f(y) + \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in D}} f(y) \right), & \text{если } x \notin \overline{D} \setminus D, \\ c_0(x), & \text{если } x \in X \setminus \overline{D}, \end{cases} \quad (5)$$

где $c_0(x)$ – определено в лемме 1. Равенство $E(f) = g$ определяет оператор продолжения E .

ПРИМЕР. Пусть $X = [0, 2]$, $d(x, y) = |x - y|$, $D = \{0, 1, 2\}$ и на D заданы две функции f и f_1 : $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f_1(0) = 1$, $f_1(1) = 0$, $f_1(2) = 0$. Тогда

$$E(f) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1-x}{3-2x}, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases} \quad E(f_1) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{x-1}{2x-1}, & 1 \leq x < \frac{3}{2}, \\ 1-\frac{x}{2}, & \frac{3}{2} \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Отметим, что $E(f + f_1) \neq E(f) + E(f_1)$, т.е. оператор E не является линейным.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f, f_1 – ограниченные на D функции, $a, b \in \mathbb{R}$, $g = E(f)$, $g_1 = E(f_1)$. Оператор E обладает следующими свойствами:

- 1) оператор сохраняет верхнюю и нижнюю грани значений функции:

$$\inf\{f(y) \mid y \in D\} \leq g(x) \leq \sup\{f(y) \mid y \in D\} \quad \forall x \in D;$$

- 2) относительная константа Липшица функции g в любой точке $x \in X \setminus \overline{D}$ не превосходит такой же константы для любого другого продолжения функции f на множество X ;
- 3) $E(af + b) = aE(f) + b$;
- 4) если $f(x) \leq f_1(x) \quad \forall x \in D$, то $g(x) \leq g_1(x) \quad \forall x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1), 2) непосредственно следуют из леммы 1, свойства 3), 4) – из леммы 2.

4. Вспомогательные свойства оператора продолжения. Для $x \in X \setminus \overline{D}$ определим величину

$$L(x) = \sup \left\{ \frac{|g(x) - f(z)|}{d(x, z)} \mid z \in D \right\},$$

которая будет использоваться при исследовании свойств функции $g = E(f)$.

ЛЕММА 3. Если $x \in X \setminus \overline{D}$, то

$$L(x) = \sup \left\{ \frac{f(z) - f(y)}{d(x, y) + d(x, z)} \mid y, z \in D \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что

$$L(x) = \sup \left\{ \frac{g(x) - f(y)}{d(x, y)} \mid y \in D \right\} = \sup \left\{ \frac{f(z) - g(x)}{d(x, z)} \mid z \in D \right\}. \quad (6)$$

Следовательно, $\forall y, z \in D$

$$L(x)d(x, y) \geq g(x) - f(y), \quad L(x)d(x, z) \geq f(z) - g(x).$$

Отсюда

$$L(x) \geq \frac{f(z) - f(y)}{d(x, y) + d(x, z)}.$$

Из (6) следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists y, z \in D$ такие, что

$$\frac{g(x) - f(y)}{d(x, y)} \geq L(x) - \varepsilon, \quad \frac{f(z) - g(x)}{d(x, z)} \geq L(x) - \varepsilon.$$

Получаем

$$\frac{f(z) - f(y)}{d(x, y) + d(x, z)} \geq L(x) - \varepsilon.$$

Так как ε может быть выбрано произвольно малым, то

$$\sup \left\{ \frac{f(z) - f(y)}{d(x, y) + d(x, z)} \mid y, z \in D \right\} \geq L(x).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $x, y \in \overline{D}$, тогда

$$\frac{|g(x) - g(y)|}{d(x, y)} \leq \min\{L(x), L(y)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $L(x) \leq L(y)$ и $g(x) \geq g(y)$. Из определения $L(y)$ следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists z \in D$ такое, что

$$g(y) - f(z) \geq (L(y) - \varepsilon)d(y, z). \quad (7)$$

Из неравенства

$$g(x) - f(z) \leq L(x)d(x, z)$$

вычтем (7). Получаем

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) &\leq L(x)d(x, z) - L(y)d(y, z) + \varepsilon d(y, z) \\ &\leq L(x)(d(x, z) - d(y, z)) + \varepsilon d(y, z) \\ &\leq L(x)d(x, y) + \varepsilon \sup\{d(y, z) \mid z \in D\}. \end{aligned}$$

Так как ε может быть выбрано произвольно малым, получаем

$$\frac{|g(x) - g(y)|}{d(x, y)} \leq L(x).$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $x \in X \setminus \overline{D}$ и $g = E(f)$, то $k(g, x) = L(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений $k(g, x)$ и $L(x)$ следует

$$k(g, x) = \max\{L(x), k_1(x), k_2(x)\},$$

где

$$\begin{aligned} k_1(x) &= \sup\left\{\frac{|g(x) - g(y)|}{d(x, y)} \mid y \in X \setminus \overline{D}\right\}, \\ k_2(x) &= \sup\left\{\frac{|g(x) - g(y)|}{d(x, y)} \mid y \in \overline{D} \setminus D\right\}. \end{aligned}$$

Из леммы 3 следует, что $k_1(x) \leq L(x)$. Поэтому достаточно показать, что $k_2(x) \leq L(x)$.

Пусть $y \in \overline{D} \setminus D$ и для определенности $g(x) \geq g(y)$. Тогда

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) &= g(x) - \frac{1}{2} \left(\overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow y \\ z \in D}} f(z) + \lim_{\substack{z \rightarrow y \\ z \in D}} f(z) \right) \\ &\leq g(x) - \lim_{\substack{z \rightarrow y \\ z \in D}} f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow y \\ z \in D}} (g(x) - f(z)) \\ &\leq \lim_{\substack{z \rightarrow y \\ z \in D}} L(x)d(x, z) = L(x)d(x, y). \end{aligned}$$

5. Основной результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\omega: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывная, неубывающая функция такая, что функция $\omega(t)/t$ не возрастает. Если $f \in H(D, \omega)$, то $g = E(f) \in H(X, \omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что при $x \in X \setminus \overline{D}$ и $y \in D$

$$|f(y) - g(x)| \leq \omega(d(x, y)). \quad (8)$$

Пусть для определенности $g(x) \leq f(y)$. Из определения $L(x)$ следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists z \in D$ такое, что

$$\frac{g(x) - f(z)}{d(x, z)} \geq L(x) - \varepsilon. \quad (9)$$

Из неравенств $f(y) - g(x) \leq L(x)d(x, y)$ и (9) получаем

$$\begin{aligned} f(y) - g(x) &\leq \left(\frac{g(x) - f(z)}{d(x, z)} + \varepsilon \right) d(x, y), \\ (f(y) - g(x))d(x, z) &\leq (g(x) - f(z))d(x, y) + \varepsilon d(x, y)d(x, z). \end{aligned}$$

Прибавим к обеим частям последнего неравенства величину $(f(y) - g(x))d(x, y)$. Получаем

$$\begin{aligned} (f(y) - g(x))(d(x, z) + d(x, y)) &\leq (f(y) - f(z))d(x, y) + \varepsilon d(x, y)d(x, z), \\ f(y) - g(x) &\leq \frac{(f(y) - f(z))d(x, y)}{d(x, z) + d(x, y)} + \frac{\varepsilon d(x, y)d(x, z)}{d(x, z) + d(x, y)} \\ &\leq \frac{\omega(d(y, z))d(x, y)}{d(x, z) + d(x, y)} + \varepsilon d(x, y). \end{aligned} \quad (10)$$

Так как функция ω не убывает, имеем

$$\omega(d(y, z)) \leq \omega(d(x, y) + d(x, z)). \quad (11)$$

Так как функция $\omega(t)/t$ не возрастает, имеем

$$\frac{\omega(d(x, y) + d(x, z))}{d(x, z) + d(x, y)} \leq \frac{\omega(d(x, y))}{d(x, y)}. \quad (12)$$

Преобразуя (10) с учетом (11) и (12), получаем

$$f(y) - g(x) \leq \omega(d(x, y)) + \varepsilon d(x, y).$$

Так как ε может быть выбрано произвольно малым, (8) доказано.

Покажем, что при $x, y \in X \setminus \overline{D}$

$$|g(y) - g(x)| \leq \omega(d(x, y)). \quad (13)$$

Пусть для определенности $g(x) \leq g(y)$. Из определения величин $L(x), L(y)$ следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists z, s \in D$ такие, что

$$\frac{g(x) - f(z)}{d(x, z)} \geq L(x) - \varepsilon, \quad (14)$$

$$\frac{f(s) - g(y)}{d(y, s)} \geq L(y) - \varepsilon. \quad (15)$$

Воспользуемся неравенством

$$\min\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right) \leq \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2},$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 – положительные числа. Из (14), (15) получаем

$$\min\{L(x), L(y)\} \leq \frac{f(s) - g(y) + g(x) - f(z)}{d(x, z) + d(y, s)} + \varepsilon.$$

Из леммы 4 получаем

$$\begin{aligned} g(y) - g(x) &\leq \min(L(x), L(y))d(x, y) \\ &\leq \frac{(f(s) - g(y) + g(x) - f(z))d(x, y)}{d(x, z) + d(y, s)} + \varepsilon d(x, y), \\ (g(y) - g(x))(d(x, z) + d(y, s)) &\leq (f(s) - g(y) + g(x) - f(z))d(x, y) \\ &\quad + \varepsilon d(x, y)(d(x, z) + d(y, s)). \end{aligned}$$

Прибавив к обеим частям последнего неравенства величину $(g(y) - g(x))d(x, y)$, получаем

$$\begin{aligned} (g(y) - g(x))(d(x, z) + d(x, y) + d(y, s)) &\leq (f(s) - f(z))d(x, y) \\ &\quad + \varepsilon d(x, y)(d(x, z) + d(y, s)), \\ g(y) - g(x) &\leq \frac{(f(y) - f(z))d(x, y)}{d(x, z) + d(x, y) + d(y, s)} + \frac{\varepsilon d(x, y)(d(x, z) + d(y, s))}{d(x, z) + d(x, y) + d(y, s)} \\ &\leq \frac{\omega(d(s, z))d(x, y)}{d(x, z) + d(x, y) + d(y, s)} + \varepsilon d(x, y). \end{aligned} \tag{16}$$

Так как функция ω не убывает, имеем

$$\omega(d(s, z)) \leq \omega(d(x, z) + d(x, y) + d(y, s)). \tag{17}$$

Так как функция $\omega(t)/t$ не возрастает, имеем

$$\frac{\omega(d(x, z) + d(x, y) + d(y, s))}{d(x, z) + d(x, y) + d(y, s)} \leq \frac{\omega(d(x, y))}{d(x, y)}. \tag{18}$$

Преобразуя (16) с учетом (17) и (18), получаем

$$g(y) - g(x) \leq \omega(d(x, y)) + \varepsilon d(x, y).$$

Так как ε может быть выбрано произвольно малым, (13) доказано.

Докажем (13) в случае, когда $x \in X \setminus \overline{D}$, $y \in \overline{D} \setminus D$. Пусть для определенности $g(x) \leq g(y)$. Получаем

$$\begin{aligned} g(y) - g(x) &= \frac{1}{2} \left(\overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow y \\ z \in D}} f(z) + \lim_{\substack{z \rightarrow y \\ z \in D}} f(z) \right) - g(x) \\ &\leq \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow y \\ z \in D}} (f(z) - g(x)) \leq \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow y \\ z \in D}} \omega(d(z, x)) = \lim_{t \rightarrow d(y, x)} \omega(t) = \omega(d(x, y)). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается (13) в случае, когда $x, y \in \overline{D} \setminus D$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $m \geq 0$, $f \in m * \text{Lip}(D)$, то $g \in m * \text{Lip}(X)$.

Если функция f равномерно непрерывна на D , то в качестве функции ω может быть взята наименьшая вогнутая мажоранта функции

$$\omega_1(f, t) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in D, d(x, y) \leq t\}.$$

В этом случае ω удовлетворяет условиям теоремы 2 и является модулем непрерывности [4]. В этом смысле оператор продолжения E сохраняет модуль непрерывности.

Из теорем 1 и 2 следует утверждение более сильное, чем утверждение 3 работы [6], применяемое при исследовании пространства липшицевых функций на (X, d) .

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\omega(t)$ является модулем непрерывности и удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда для любого конечного $D \subset X$ и любой функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ функция $g = E(f)$ такова, что

$$\max_{x \in D} |f(x)| \leq \sup_{x \in X} |g(x)|, \quad g \in M_1 * \text{Lip}(X) \cap H(X, M_2 \cdot \omega),$$

где

$$M_1 = \max\left\{\left|\frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)}\right| \mid x, y \in D, x \neq y\right\},$$

$$M_2 = \max\left\{\left|\frac{f(x) - f(y)}{\omega(d(x, y))}\right| \mid x, y \in D, x \neq y\right\}.$$

Сравнивая операторы продолжения E_1, E_2 (см. (1), (2)) с оператором E , отметим, что E_1, E_2 , вообще говоря, не обладают свойствами 1)–3) теоремы 1. В отличие от E_1, E_2 оператор E определяется только через функцию f , без привлечения функции ω . Оператор E корректно определен даже в том случае, если f ограничена, но разрывна на D . Представление о поведении функции $g = E(f)$ вне множества $\overline{D}$ дает

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varepsilon > 0$, D_ε – ε -окрестность множества D ,

$$m = \frac{1}{2\varepsilon} - \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in D\}.$$

Тогда $g \mid (X \setminus D_\varepsilon) \in m * \text{Lip}(X \setminus D_\varepsilon)$.

Доказательство следует из леммы 3 и следствия 1.

6. О следе локально липшицевой функции. В качестве приложения оператора продолжения E рассмотрим вопрос о следе локально липшицевой функции на компактном подмножестве, поднятый в [2].

Далее (X, d) – линейно связное метрическое пространство, причем метрика d является внутренней. Последнее означает, что расстояние между любыми двумя точками есть точная нижняя грань длин кривых, соединяющих эти точки. Будем использовать обозначение $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$. Если S – дуга конечной длины в X , то через $|S|$ будем обозначать ее длину.

ТЕОРЕМА 4. Пусть D – компактное подмножество X без внутренних точек и $X \setminus D$ линейно связно. Для того чтобы непрерывная функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ была следом некоторой функции $h: X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{|h(x) - h(y)|}{d(x, y)} < 1 \quad \forall x \in X \setminus D,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\forall y, z \in D, \forall x \in X \setminus D$

$$|f(y) - f(z)| < d(x, y) + d(x, z). \quad (19)$$

При доказательстве потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 5. Пусть точки $z_1, z_2 \in X$ соединены дугой S конечной длины и в каждой точке x этой дуги функция $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{|h(x) - h(y)|}{d(x, y)} \leq m.$$

Тогда $|h(z_1) - h(z_2)| \leq m \cdot |S|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $\varepsilon > 0$. Каждой точке x на дуге S поставим в соответствие число $r(x) > 0$ такое, что если $d(x, y) \leq 2r(x)$, то $|h(x) - h(y)| \leq d(x, y)(m + \varepsilon)$. Множество $\{B(x, r(x)) \mid x \in S\}$ образует открытое покрытие S . В силу компактности дуги в покрытии существует конечное подпокрытие. Зафиксируем подпокрытие и пронумеруем в нем центры шаров в порядке следования по дуге от z_1 к z_2 . В полученной конечной последовательности шаров произведем отбор таким образом, чтобы каждая пара соседних шаров имела непустое пересечение и при этом точка z_1 лежала в первом шаре, а точка z_2 – в последнем. Такой отбор возможен в силу того, что шары образуют покрытие дуги. Центры отобранных шаров обозначим через $x_i, i = 1, 2, \dots, n$. Получаем

$$\begin{aligned} |h(z_1) - h(z_2)| &= |h(z_1) - h(x_1) + h(x_1) - h(x_2) + \dots + h(x_n) - h(z_2)| \\ &\leq (m + \varepsilon)(d(z_1, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, z_2)) \\ &\leq (m + \varepsilon)|S|. \end{aligned}$$

Так как ε может быть выбрано произвольно малым, лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Достаточность. Возьмем $h = E(f)$. Тогда в силу следствия 1 и леммы 3 при $x \in X \setminus D$

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{|g(x) - g(y)|}{d(x, y)} \leq L(x) = \sup \left\{ \frac{f(z) - f(y)}{d(x, y) + d(x, z)} \mid y, z \in D \right\}.$$

Так как D компактно, f непрерывна и $\inf\{d(x, y) \mid y \in D\} > 0$, то верхняя грань в последнем выражении достигается на некоторых $y, z \in D$. В силу (19) $L(x) < 1$.

Необходимость. Пусть $x \in X \setminus D$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $B(x, \varepsilon)$ лежал в $X \setminus D$ и $\forall x_1 \in B(x, \varepsilon)$ выполнялось

$$\frac{|h(x) - h(x_1)|}{d(x, x_1)} \leq a < 1,$$

где

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{|h(x) - h(y)|}{d(x, y)}.$$

Соединим x с точками $y, z \in D$ дугами $S_y, S_z \subset X \setminus D$ соответственно. Через p обозначим одну из точек пересечения дуги S_y со сферой $\{t \mid t \in X, d(t, x) = \varepsilon/2\}$. Через q обозначим одну из точек пересечения S_z с этой же сферой. Точка p разбивает дугу S_y на две части — S_{yp} и S_{px} . Тогда q разбивает дугу S_z на две части — S_{zq} и S_{qx} . Все указанные дуги и точки существуют в силу линейной связности $X \setminus D$. Используя лемму 5, получаем

$$\begin{aligned} f(y) - f(z) &\leq (f(y) - h(p)) + (h(p) - h(x)) + (h(x) - h(q)) + (h(q) - f(z)) \\ &\leq |S_{yp}| + 2a \cdot \frac{\varepsilon}{2} + |S_{zq}| = |S_y| - |S_{px}| + |S_z| - |S_{qx}| + a \cdot \varepsilon \\ &\leq |S_y| + |S_z| - (1 - a)\varepsilon. \end{aligned} \quad (20)$$

Так как дуги могут быть выбраны таким образом, чтобы их длины были сколь угодно близки к расстояниям между их концами, из (20) получаем

$$f(y) - f(z) \leq d(y, x) + d(z, x) - (1 - a)\varepsilon < d(y, x) + d(z, x).$$

В отличие от [2] в теореме не требуется локальная компактность пространства (X, d) .

Институт технической кибернетики
АН Беларуси

Поступило
20.10.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
- [2] Клячин А. А., Миклюков В. М. Следы функций с пространственноподобными графиками и задача о продолжении функций при ограничениях на градиент // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 7. С. 49–64.
- [3] Mustata C. Extension of Holder functions and some related problems of best approximation // Faculty of Mathematics. Research Seminars. Preprint № 7: Babes-Bolyai University, 1991. P. 71–86.
- [4] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
- [5] Czipcer J., Cheher L. Extention of functions satisfying a Lipschitz condition // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1955. V. 6. № 1–2. P. 213–220.
- [6] Hanin L. G. Kantorovich–Rubinshtein norm and its application in the theory of Lipschitz spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 115. № 2. P. 345–352.