Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Немировская, Теорема Фрухта для инверсных полугрупп, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 2, 246–251

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1497>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:08:17

УДК 512.535.3+519.1

ТЕОРЕМА ФРУХТА ДЛЯ ИНВЕРСНЫХ ПОЛУГРУПП

Н. А. Немировская

В заметке рассматривается задача о представлении конечных инверсных полугрупп частичными преобразованиями графов. Вводятся понятия взвешенного графа и его весовых частичных автоморфизмов. Основным результатом является теорема о том, что каждая конечная инверсная полугруппа изоморфна полугруппе весовых частичных автоморфизмов некоторого взвешенного графа. Это утверждение является естественным обобщением теоремы Фрухта для групп.

Библиография: 5 названий.

В 1936 г. Кёниг [1] поставил вопрос: когда данная абстрактная группа изоморфна группе автоморфизмов некоторого графа? Ответ был дан в 1938 г. Фрухтом [2]: каждая конечная группа представима как группа автоморфизмов некоторого графа.

С 60-х годов начинают рассматривать и другие алгебраические структуры, связанные с графами: полугруппы эндоморфизмов графов, полугруппы частичных эндоморфизмов и др. (см. обзор [3]). Вопрос Кёнига имеет смысл и для этих структур. Один из последних результатов в этом направлении – полученные в [4] необходимые и достаточные условия того, что полугруппа частичных преобразований множества X является полугруппой частичных эндоморфизмов некоторого графа с множеством вершин X .

Далее под *графом* понимается конечный неориентированный граф без петель. *Частичный автоморфизм графа* Γ – это взаимно однозначное (возможно, не везде определенное) отображение $\varphi: V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)$ множества $V(\Gamma)$ вершин графа Γ , удовлетворяющее условию: для любых вершин x и y из области определения $\text{dom } \varphi$ отображения φ вершины $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ соединены ребром тогда и только тогда, когда ребром соединены x и y . Относительно композиции множество $\text{PAut } \Gamma$ всех частичных автоморфизмов графа Γ образует полугруппу, которая, как легко видеть, будет инверсной. Однако, далеко не каждая конечная инверсная полугруппа изоморфна $\text{PAut } \Gamma$ для некоторого графа Γ . Одна из причин – $\text{PAut } \Gamma$ содержит слишком много идеалов. В частности, $\text{PAut } \Gamma$ никогда не будет группой.

Граф Γ назовем *взвешенным*, если задано сюръективное отображение $\omega: V(\Gamma) \rightarrow P$, где P – некоторая нижняя полурешетка; $\omega(x)$ будем называть *весом вершины* $x \in V(\Gamma)$. Подмножество вершин $W \subseteq V(\Gamma)$ взвешенного графа Γ назовем *конусом*, если $W = \{x \in V(\Gamma) \mid \omega(x) \leq \alpha\}$ для некоторого $\alpha \in P$. Частичный автоморфизм $\varphi \in \text{PAut } \Gamma$

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда, грант GSU 041049.

назовем *весовым*, если его область определения $\text{dom } \varphi$ и область значений $\text{ran } \varphi$ – конусы и φ сохраняет порядок весов вершин, т.е. для любых $a, b \in \text{dom } \varphi$ из $\omega(a) = \omega(b)$ следует $\omega(\varphi(a)) = \omega(\varphi(b))$ и из $\omega(a) < \omega(b)$ следует $\omega(\varphi(a)) < \omega(\varphi(b))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Совокупность $\text{RAut}_\omega \Gamma$ всех весовых частичных автоморфизмов графа Γ образует инверсную подполугруппу полугруппы $\text{RAut } \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что для любого $\varphi \in \text{RAut}_\omega \Gamma$ инверсный к нему элемент ψ также принадлежит $\text{RAut}_\omega \Gamma$, и композиция $\varphi\psi$ элементов из $\text{RAut}_\omega \Gamma$ сохраняет порядок весов вершин. Осталось показать, что $\text{dom } \varphi\psi$ и $\text{ran } \varphi\psi$ – конусы. Пусть конусы $\text{ran } \varphi$ и $\text{dom } \psi$ определяются соответственно элементами α и β из P . Поскольку P – нижняя полурешетка, то из определения конуса следует, что

$$\text{ran } \varphi \cap \text{dom } \psi = \{x \mid \omega(x) \leq \gamma\},$$

где $\gamma = \inf(\alpha, \beta)$. Выберем из $\text{ran } \varphi \cap \text{dom } \psi$ произвольную вершину c веса γ . Тогда

$$\text{dom } \varphi\psi = \{y \mid \omega(y) \leq \omega(\varphi(c))\}, \quad \text{ran } \varphi\psi = \{z \mid \omega(z) \leq \omega(\varphi(c))\}.$$

Предложение доказано.

Заметим, что если $|P| = 1$, то $\text{RAut}_\omega \Gamma$ совпадает с $\text{Aut } \Gamma$.

Основным результатом заметки является

ТЕОРЕМА. Для каждой конечной инверсной полугруппы S существует такой взвешенный граф Γ , что $\text{RAut}_\omega \Gamma \simeq S$.

Для доказательства нам понадобятся некоторые вспомогательные конструкции и леммы. Сначала сопоставим конечной инверсной полугруппе S цветной оргграф $\tilde{\Gamma}$ с множеством вершин S , в котором вершины a и b соединены стрелкой из a в b тогда и только тогда, когда $b \in Sa$, причем эта стрелка имеет цвет ba^{-1} . Рассмотрим представление Вагнера–Престона полугруппы S частичными подстановками множества S (см. [5, теорема 1.20]): элементу $a \in S$ сопоставляется частичная подстановка φ_a с областью определения $\text{dom } \varphi_a = Sa^{-1}$, переводящая каждый элемент $x \in Sa^{-1}$ в элемент xa . При этом область значений φ_a $\text{ran } \varphi_a = Sa$.

ЛЕММА 1. Для каждого $a \in S$ φ_a является частичным автоморфизмом оргграфа $\tilde{\Gamma}$, сохраняющим цвета ребер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $x, y \in Sa^{-1}$ и из x в y идет стрелка цвета yx^{-1} . По определению оргграфа $\tilde{\Gamma}$ и отображения φ_a существуют такие s и t из S , что $y = sa^{-1}$ и $y = tx$. Тогда $ya = (tx)a = t(xa) \in S(xa)$ и $(ya)(xa)^{-1} = ya^{-1}x^{-1} = sa^{-1}aa^{-1}x^{-1} = sa^{-1}x^{-1} = yx^{-1}$, т.е. из xa в ya тоже идет стрелка цвета yx^{-1} .

б) Пусть теперь $x, y \in Sa^{-1}$ и $y \notin Sx$. Предположим, что из xa в ya идет стрелка. Поскольку xa и ya принадлежат $\text{dom } \varphi_{a^{-1}}$ и существуют такие $u, s \in S$, что $x = ua^{-1}$, $y = sa^{-1}$, то по доказанному выше должна идти стрелка из $x = ua^{-1} = ua^{-1}aa^{-1} = \varphi_{a^{-1}}(xa)$ в $y = sa^{-1} = sa^{-1}aa^{-1} = \varphi_{a^{-1}}(ya)$. А это противоречит условию $y \notin Sx$.

Пусть ' $\leq$ ' – естественный частичный порядок на множестве $I(S)$ идемпотентов полугруппы S . Из леммы 1.19 из [5] следует, что $(I(S), \leq)$ будет нижней полурешеткой. Каждой вершине a оргграфа $\tilde{\Gamma}$ припишем вес $\omega(a) = a^{-1}a$. Заметим, что $\omega(a) = \omega(a^{-1}a)$.

ЛЕММА 2. *Выполнено*

- а) $b \in Sa \iff \omega(b) \leq \omega(a)$;
- б) $Sb \subseteq Sa \iff \omega(b) \leq \omega(a)$;
- в) $Sb = Sa \iff \omega(b) = \omega(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Поскольку $Sa = Sa^{-1}a$, то из $b = xa^{-1}a$ следует $b^{-1}b = a^{-1}ax^{-1}xa^{-1}a$, откуда $(b^{-1}b)(a^{-1}a) = b^{-1}b$, т.е. $b^{-1}b \leq a^{-1}a$. Обратно, из $b^{-1}b \leq a^{-1}a$ следует $b^{-1}b = b^{-1}ba^{-1}a$, откуда $b = ba^{-1}a$, т.е. $b \in Sa$.

б) следует из а), поскольку $b = bb^{-1}b \in Sb$.

в) следует из б).

ЛЕММА 3. $\varphi_{a^{-1}a}$ совпадает с тождественным отображением множества Sa на себя.

Доказательство следует из равенств $S \cdot (a^{-1}a)^{-1} = Sa$ и $xa \cdot a^{-1}a = xa$.

В следующих двух леммах предполагается, что частичный автоморфизм φ орграфа $\tilde{\Gamma}$ сохраняет цвета ребер, а его область определения имеет вид $\text{dom } \varphi = \{x \mid \omega(x) \leq \omega(a)\}$ для некоторого $a \in S$. Заметим, что при этих предположениях $a^{-1}a \in \text{dom } \varphi$.

ЛЕММА 4. Если $\varphi(a^{-1}a)$ – идемпотент полугруппы S , то $\varphi = \varphi_{a^{-1}a}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 следует, что $\text{dom } \varphi = Sa$. Поскольку $Sa = Sa^{-1}a$, то для любого $ya \in Sa$ из вершины $a^{-1}a$ в вершину ya идет стрелка цвета ya . Но тогда из $\varphi(a^{-1}a)$ в $\varphi(ya)$ также идет стрелка цвета ya , кроме того, $\varphi(ya) = t \cdot \varphi(a^{-1}a)$ для некоторого $t \in S$. С другой стороны, поскольку $\varphi(a^{-1}a)$ – идемпотент, то стрелка из $\varphi(a^{-1}a)$ в $\varphi(ya)$ имеет цвет

$$\varphi(ya) \cdot (\varphi(a^{-1}a))^{-1} = t \cdot \varphi(a^{-1}a) \cdot (\varphi(a^{-1}a))^{-1} = t \cdot \varphi(a^{-1}a) = \varphi(ya).$$

Следовательно, для всех $ya \in Sa$ $\varphi(ya) = ya$, т.е. φ действует на Sa тождественно и по лемме 3 совпадает с $\varphi_{a^{-1}a}$.

ЛЕММА 5. Существует такой элемент $b \in S$, что $\varphi = \varphi_b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что такого элемента не существует. Тогда по лемме 4 элемент $c = \varphi(a^{-1}a)$ не является идемпотентом. Заметим, что $\varphi(Sa) \subseteq Sc$. Рассмотрим частичный автоморфизм $\psi = \varphi\varphi_{c^{-1}}$. Если бы для некоторого $y \in S$ выполнялось равенство $\psi = \varphi_y$, то, вопреки предположению, имели бы

$$\varphi = \varphi \cdot \varphi_{c^{-1}c} = \varphi \cdot \varphi_{c^{-1}} \cdot \varphi_c = \psi\varphi_c = \varphi_y\varphi_c = \varphi_{yc}.$$

Поскольку ψ сохраняет цвета ребер и $\text{dom } \psi = \text{dom } \varphi$, то по лемме 4 $\psi(a^{-1}a)$ не является идемпотентом. Но

$$\psi(a^{-1}a) = (\varphi\varphi_{c^{-1}})(a^{-1}a) = \varphi_{c^{-1}}(c) = cc^{-1}.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 6. Каждый частичный автоморфизм φ орграфа $\tilde{\Gamma}$ сохраняет порядок весов вершин.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b \in \text{dom } \varphi$ и $\omega(a) = \omega(b)$, т.е. по лемме 2 $a \in Sb$ и $b \in Sa$. Тогда по построению орграфа $\tilde{\Gamma}$ a и b соединены стрелкой из a в b и стрелкой из b в a . Отсюда $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ соединены стрелками из $\varphi(a)$ в $\varphi(b)$ и из $\varphi(b)$ в $\varphi(a)$. Из леммы 2 и построения орграфа $\tilde{\Gamma}$ следует, что $\omega(\varphi(a)) = \omega(\varphi(b))$.

Аналогично, для любых $a, b \in \text{dom } \varphi$ из $\omega(a) < \omega(b)$ следует $\omega(\varphi(a)) < \omega(\varphi(b))$.

Из лемм 1, 2 и 6 следует, что для любого $a \in S$ частичный автоморфизм φ_a орграфа $\tilde{\Gamma}$ сохраняет цвета ребер и является весовым. Отсюда и из леммы 5 получаем, что сохраняющие цвета ребер весовые частичные автоморфизмы орграфа $\tilde{\Gamma}$ образуют полугруппу, изоморфную S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть Δ – множество цветов ребер орграфа $\tilde{\Gamma}$. Зададим инъективные отображения

$$\Delta \rightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}, \quad x \mapsto n_x, \quad \text{и} \quad I(S) \rightarrow \{m \in \mathbb{N} \mid m > M\}, \quad e \mapsto m,$$

где

$$M = \max_{x \in \Delta} n_x.$$

Теперь следующим образом преобразуем орграф $\tilde{\Gamma}$ во взвешенный граф Γ . Из того, что $a = aa^{-1}a \in Sa$, следует, что орграф $\tilde{\Gamma}$ содержит в вершине a петлю цвета aa^{-1} . Если $a \neq 0$, то заменяем эту петлю подграфом Γ_a , приведенным на рис. 1, в противном случае ($a = 0$) считаем a вершиной без петли. Каждую стрелку из a в b ($a \neq b$) заменим подграфом $\Gamma_{a,b}$, приведенным на рис. 2. Всем новым вершинам этих подграфов приписываем вес $\omega(a) = aa^{-1}$.

Рис. 1

Рис. 2

Заметим, что для любого элемента $b \in Sa^{-1}$ из $ba = 0$ следует $b = 0$. Отсюда и из построения графа Γ следует, что для любого $0 \neq b \in Sa^{-1}$ существует единственный изоморфизм $\psi_b: \Gamma_b \rightarrow \Gamma_{\varphi_a(b)}$, удовлетворяющий условию $\psi_b(b) = \varphi_a(b)$. Кроме того,

для любых $b \in Sa^{-1}$ и $c \in Sb$ из построения графа Γ следует существование единственного изоморфизма $\psi_{b,c}: \Gamma_{b,c} \rightarrow \Gamma_{\varphi_a(b), \varphi_a(c)}$. Теперь для каждого $a \in S$ следующим образом определим частичное отображение φ_a^* вершин графа Γ :

$$\varphi_a^*(x) = \begin{cases} \varphi_a(x), & \text{если } x \in Sa^{-1}; \\ \psi_b(x), & \text{если для некоторого } b \in Sa^{-1} \text{ } x \text{ является вершиной графа } \Gamma_b; \\ \psi_{b,c}(x), & \text{если для некоторых } b, c \in Sa^{-1} \text{ } x \text{ является вершиной графа } \Gamma_{b,c}; \\ & \text{не определено в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поскольку для любого $b \in Sa^{-1}$ $\varphi_a(b) = \psi_b(b) = \psi_{b,c}(b)$, то отображение φ_a^* определено корректно.

Легко проверяется, что φ_a^* является частичным автоморфизмом графа Γ и сохраняет порядок весов. Докажем, что

$$\text{dom } \varphi_a^* = \{x \in V(\Gamma) \mid \omega(x) \leq \omega(a^{-1})\}.$$

Действительно, вес $\omega(x)$ любой вершины $x \in \text{dom } \varphi_a^*$ совпадает с весом одного из элементов $b \in Sa^{-1}$. Но тогда по лемме 2 $\omega(x) \leq \omega(a^{-1})$. Обратно, если $\omega(x) \leq \omega(a^{-1})$, то по построению существует такой $b \in Sa^{-1}$, что $\omega(x) = \omega(b)$ и x является вершиной либо графа Γ_b , либо одного из графов $\Gamma_{b,c}$. Поскольку $c \in Sb$, то из $b \in Sa^{-1}$ следует $c \in Sa^{-1}$. Следовательно, в обоих случаях $x \in \text{dom } \varphi_a^*$.

Из $\text{ran } \varphi_a^* = \text{dom } \varphi_{a^{-1}}^*$ следует, что $\text{ran } \varphi_a^*$ также является конусом. Поэтому $\varphi_a^* \in \text{RAut}_\omega \Gamma$.

Очевидно, что отображение $a \mapsto \varphi_a^*$ является гомоморфизмом S в полугруппу $\text{RAut}_\omega \Gamma$. Поскольку на вершинах из $\tilde{\Gamma}$ φ_a^* совпадает с φ_a , то этот гомоморфизм будет инъективным. Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что каждый весовой частичный автоморфизм графа Γ имеет вид φ_a^* .

Пусть $\varphi \in \text{RAut}_\omega \Gamma$. Тогда

$$\text{dom } \varphi = \{x \in V(\Gamma) \mid \omega(x) \leq \omega(e)\},$$

где e – некоторый идемпотент из S . Если $e = 0$, то $\text{dom } \varphi = \{0\}$. Так как по построению графа Γ $\{0\}$ – единственный одноэлементный конус, то $\varphi(0) = 0$, т.е. $\varphi = \varphi_0^*$.

Вообще, если S – полугруппа с нулем, то для любого весового частичного автоморфизма $\varphi \in \text{RAut}_\omega \Gamma$ $0 \in \text{dom } \varphi$ и $\varphi(0) = 0$.

Пусть теперь $e \neq 0$. Поскольку для любого b , $0 \neq b \in Se$, все вершины подграфов Γ_b и $\Gamma_{b,c}$ имеют вес $\leq \omega(b)$, то частичный автоморфизм φ определен на всех вершинах таких подграфов. Заметим, что для любого $b \neq 0$ $|Sb| > 1$, т.е. орграф $\tilde{\Gamma}$ содержит петлю в вершине b и стрелку из b в c , $b \neq c \in Sb$. Поэтому любая вершина b , $0 \neq b \in Se$, в порожденном множестве $\text{dom } \varphi$ подграфе графа Γ имеет степень ≥ 4 , в то время как любая вершина из $V(\Gamma) \setminus V(\tilde{\Gamma})$ имеет степень не больше 3. Отсюда и из сделанного выше замечания следует, что φ переводит вершины орграфа $\tilde{\Gamma}$ в вершины орграфа $\tilde{\Gamma}$, а вершины из $V(\Gamma) \setminus V(\tilde{\Gamma})$ – в вершины из $V(\Gamma) \setminus V(\tilde{\Gamma})$. В частности, можно говорить о сужении $\tilde{\varphi}$ частичного автоморфизма φ на орграф $\tilde{\Gamma}$.

Очевидно, что $\tilde{\varphi}$ сохраняет порядок весов вершин и $\text{dom } \tilde{\varphi}$ и $\text{ran } \tilde{\varphi}$ – конусы. Кроме того, если вершины $a, b \in \text{dom } \tilde{\varphi}$ соединены стрелкой из a в b , то φ должен переводить

граф $\Gamma_{a,b}$ в подграф графа $\Gamma_{\varphi(a),\varphi(b)}$. Но граф $\Gamma_{a,b}$ изоморфен некоторому подграфу графа $\Gamma_{c,d}$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_{a,b} \simeq \Gamma_{c,d}$. Отсюда, в частности, следует, что стрелки из a в b и из $\tilde{\varphi}(a)$ в $\tilde{\varphi}(b)$ одного цвета. Поэтому $\tilde{\varphi}$ является сохраняющим цвета ребер весовым частичным автоморфизмом орграфа $\tilde{\Gamma}$, т.е. $\tilde{\varphi} = \varphi_a$ для некоторого $a \in S$. Поскольку $\tilde{\varphi}_a^* = \varphi_a$ и из $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$ следует $\varphi_1 = \varphi_2$, то $\varphi = \varphi_a^*$.

Киевский государственный университет
им. Т. Шевченко

Поступило
07.04.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] König D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936.
- [2] Frucht R. Herstellung Von Graphen mit Vorgegebener abstrakten Gruppe // Compositio Math. 1938. V. 6. P. 239–250.
- [3] Molchanov V. A. Semigroups of mapping on graphs // Semigroup Forum. 1983. V. 27. P. 155–199.
- [4] Molčanov V. A. Concrete characterization of partial endomorphism semigroups of graphs // Acta Sci. Math. 1987. V. 51. P. 349–363.
- [5] Клиффорд Г., Престон А. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. М.: Мир, 1972.