Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Е. Орел, О несопряженности случая Эйлера в динамике
твёрдого тела и задачи Якоби о геодезических на эллипсо-
иде, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 2, 252–258

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1498>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:53:44

УДК 514.7

О НЕСОПРЯЖЕННОСТИ СЛУЧАЯ ЭЙЛЕРА В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ЗАДАЧИ ЯКОБИ О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА ЭЛЛИПСОИДЕ

О. Е. Орёл

В работе рассматриваются две интегрируемые задачи: геодезический поток эллипсоида (задача Якоби) и случай Эйлера вращения твердого тела вокруг центра масс. Доказано, что не существует непрерывной замены координат, переводящей динамическую систему задачи Эйлера в динамическую систему задачи Якоби.

Библиография: 3 названия.

Рассмотрим две интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы: геодезический поток эллипсоида (задача Якоби) и случай Эйлера вращения твердого тела вокруг центра масс (с нулевой константой площади) [1]. Эти динамические системы являются трехпараметрическими. Геодезический поток эллипсоида определяется его тремя квадратами полуосей a, b, c ($a \leq b \leq c$), а система Эйлера – тремя главными моментами инерции твердого тела $1/A, 1/B, 1/C$ ($A \leq B \leq C$). Указанные системы будем рассматривать на их трехмерных инвариантных изоэнергетических неособых многообразиях. Эти многообразия гомеоморфны трехмерному проективному пространству.

На протяжении нескольких лет разные авторы (в частности, В. В. Козлов) отмечали, что эти две задачи имеют сходную динамику. Однако, точное утверждение известно не было. Поэтому возник вопрос об изучении эквивалентности этих систем. При этом понятие эквивалентности можно понимать по-разному.

В процессе развития теории А. Т. Фоменко и Х. Цишанга тонкой топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем было обнаружено, что задача Якоби и задача Эйлера тонко топологически эквивалентны, т.е. существует гомеоморфизм одной системы на другую, сохраняющий слоение соответствующих 3-многообразий на поверхности уровня первых интегралов. Эта теорема была доказана А. В. Болсиновым и А. Т. Фоменко в [1].

Рассмотрим теперь вопрос о непрерывной траекторной (орбитальной) эквивалентности систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Две динамические системы v_1 и v_2 на многообразиях M_1 и M_2 называются *непрерывно траекторно (орбитально) эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\tau: M_1 \rightarrow M_2$, переводящий траектории первой системы в траектории второй с сохранением ориентации (но без сохранения времени).

В работе [1] А. В. Болсинов и А. Т. Фоменко на основе построенной ими в [2] теории траекторной классификации вычислили непрерывные траекторные инварианты для

этих задач. В результате они обнаружили, что внутри каждой задачи динамические системы траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда эллипсоиды подобны. Кроме того, было доказано, что существует взаимно однозначное (с точностью до подобия) соответствие между тройками $(a : b : c)$ и $(A : B : C)$, сопоставляющее динамической системе Якоби непрерывно траекторно эквивалентную ей динамическую систему Эйлера. Эти результаты используют прямое аналитическое исследование функций вращения задач Эйлера и Якоби, выполненное автором настоящей работы в [3].

После доказательства непрерывной (т.е. топологической) траекторной эквивалентности систем Эйлера и Якоби возникает естественный вопрос: не являются ли они топологически сопряженными, т.е. точно эквивалентными?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Две динамические системы v_1 и v_2 на многообразиях M_1 и M_2 называются *топологически сопряженными* (точно эквивалентными), если существует гомеоморфизм одного многообразия на другое, который переводит точное решение в решение (с сохранением времени).

В настоящей работе эта проблема полностью решена, а именно, доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Геодезический поток любого трехосного (отличного от сферы) эллипсоида, ограниченный на любое трехмерное многообразие постоянной энергии, топологически не сопряжен никакой динамической системе Эйлера твердого тела.*

Итак, собирая вместе всю имеющуюся информацию, получаем следующую достаточно полную картину.

Две интегрируемые задачи Эйлера и Якоби

- 1) топологически (т.е. непрерывно) траекторно эквивалентны (А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко);
- 2) гладко траекторно не эквивалентны (А.В. Болсинов);
- 3) топологически не сопряжены (О.Е. Орёл).

Тем более, они не являются гладко сопряженными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Идея доказательства состоит в следующем: нужно подсчитать и сравнить некоторые инварианты исследуемых динамических систем.

В работе [1] Фоменко и Болсинов доказали, что топологический орбитальный тип интегрируемой системы в случае $a < b < c$, $A < B < C$ полностью определяется двумя инвариантами k и l для задачи Якоби и инвариантами K и L для задачи Эйлера. Поясним смысл этих инвариантов. Каждая из сравниваемых нами динамических систем имеет по две периодические устойчивые траектории. Указанные инварианты являются пределами чисел вращения динамических систем при стремлении торов Лиувилля к этим траекториям (в пределе тор вырождается и превращается в окружность). В задаче Якоби эти периодические траектории отвечают двум замкнутым устойчивым геодезическим, являющимся экваториальными плоскими сечениями эллипсоида в направлениях, перпендикулярных его наибольшей и наименьшей полуосям. В случае задачи Эйлера аналогичные периодические траектории отвечают вращениям твердого тела вокруг его максимальной и минимальной осей инерции. Здесь соответствующие пределы чисел вращения дают нам инварианты K и L .

Отметим, что инварианты k, l и K, L являются функциями от параметров a, b, c и A, B, C соответственно. Таким образом, геодезический поток эллипсоида с квадратами полуосей a, b, c непрерывно траекторно эквивалентен системе Эйлера с параметрами

A, B, C тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$(k(a, b, c), l(a, b, c)) = (K(A, B, C), L(A, B, C)), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} k(a, b, c) &= \pi \left(\int_0^\infty \sqrt{\frac{u(c-a)(b-a)}{a(u+b)(u+c)}} \frac{du}{u+a} \right)^{-1}, \\ l(a, b, c) &= -\pi \left(\int_0^\infty \sqrt{\frac{u(c-a)(c-b)}{c(u+b)(u+a)}} \frac{du}{u+c} \right)^{-1}, \\ K(A, B, C) &= \frac{A}{\sqrt{(C-A)(B-A)}}, \quad L(A, B, C) = -\frac{C}{\sqrt{(C-A)(C-B)}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Чтобы проверить, являются ли две динамические системы топологически сопряженными, нужно сравнить их точные инварианты. Для этого необходимо добавить к упомянутым выше инвариантам периоды трех замкнутых особых траекторий. Две из них были описаны выше, а третья неустойчивая траектория – это гиперболическая геодезическая на эллипсоиде и соответственно неустойчивое вращение твердого тела вокруг средней оси инерции. Обозначим эти дополнительные инварианты через t_1, t_2, t_3 для задачи Якоби и через T_1, T_2, T_3 для задачи Эйлера. Для того чтобы исключить зависимость периодов от значений гамильтонианов, будем рассматривать инварианты t_1, t_2, t_3 и T_1, T_2, T_3 с точностью до пропорциональности. Итак, топологические классы сопряженности систем Якоби и Эйлера определяются наборами инвариантов, заведомо включающими в себя следующие четыре инварианта:

$$(k, l, t_1 : t_2 : t_3) \quad (3)$$

и

$$(K, L, T_1 : T_2 : T_3) \quad (4)$$

соответственно.

Найдем периоды для задачи Якоби о геодезических на эллипсоидах. Указанные три периодические траектории в этом случае соответствуют эллипсам в сечениях эллипсоида плоскостями $\{z = 0\}$, $\{x = 0\}$ (устойчивые траектории) и $\{y = 0\}$ (неустойчивая траектория). Поскольку на геодезических параметр натурален, то отношение периодов обращения по этим орбитам равно отношению длин соответствующих эллипсов, т.е.

$$t_1 : t_2 : t_3 = t(a, b) : t(a, c) : t(b, c),$$

где

$$t(\alpha, \beta) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha \cos^2 t + \beta \sin^2 t} dt.$$

Теперь рассмотрим общий случай $a \leq b \leq c$ и попытаемся обобщить полученный инвариант (3) на случай эллипсоидов вращения.

При $a = b = c$ мы имеем сферу. Геодезические на ней – это большие окружности. Все они замкнуты, и периоды обращения по ним одинаковы. Поэтому формально положим $t_1 : t_2 : t_3 = 1 : 1 : 1$. Траекторные инварианты в этом случае теряют смысл, и

формально можно положить $(k, l) = (\infty, -\infty)$. Заметим, что формально построенная четверка $(\infty, -\infty, 1 : 1 : 1)$ есть предел инварианта (3) при $a : b : c \rightarrow 1 : 1 : 1$.

Пусть теперь совпадают только две полуоси эллипсоида. Для определенности будем считать, что $a = b < c$. Тогда система имеет одну устойчивую периодическую траекторию – окружность в сечении эллипсоида плоскостью $\{z = 0\}$. Поведение близких к ней геодезических качественно ничем не отличается от поведения геодезических в окрестности устойчивых периодических траекторий для эллипсоида с различными полуосями. Поэтому определены инварианты системы $l(a, a, c)$ и $t(a, a)$ – предел функции вращения и период вдоль геодезической. Картина меняется лишь при подходе к большому эллипсу с квадратами полуосей a, c , вращением которого был получен эллипсоид. В пределе мы имеем целое семейство замкнутых геодезических – эллипсов (a, c) – в сечениях эллипсоида плоскостями, проходящими через ось Oz . Для них определен период $t(a, c)$, а инвариант $k(a, a, c)$ теряет смысл. Как и для сферы, формально полагаем $k(a, a, c) = \infty$. Легко видеть, что четверка $(\infty, l(a, a, c), t(a, a) : t(a, c) : t(a, c))$ получена из (3) предельным переходом при $a : b \rightarrow 1 : 1$. Аналогичным образом поступаем в случае $a < b = c$.

Итак, мы доопределили четверку (3) по непрерывности для всех $a \leq b \leq c$. Теперь числа k и l могут принимать бесконечные значения. Эта формально доопределенная четверка является, очевидно, точным инвариантом системы, который нужно понимать так: если какие-нибудь два периода равны, то у системы бесконечно много замкнутых траекторий с данным периодом; если k или l обращаются в бесконечность, то этот инвариант не определен. В остальных случаях геометрический смысл инвариантов совпадает с указанным ранее для $a < b < c$.

Перейдем к построению инвариантов для задачи Эйлера. Движение твердого тела вокруг центра масс в поле силы тяжести описывается системой уравнений Эйлера–Пуассона

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= (B - C)s_2s_3, & \dot{r}_1 &= Bs_2r_3 - Cs_3r_2, \\ \dot{s}_2 &= (C - A)s_1s_3, & \dot{r}_2 &= Cs_3r_1 - As_1r_3, \\ \dot{s}_3 &= (A - B)s_1s_2, & \dot{r}_3 &= As_1r_2 - Bs_2r_3,\end{aligned}$$

где $s = (s_1, s_2, s_3)$ – кинетический момент тела, $r = (r_1, r_2, r_3)$ – единичный вектор, направленный по вертикальной оси, $1/A, 1/B, 1/C$ – главные моменты инерции тела. Эта система имеет четыре интеграла:

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}(As_1^2 + Bs_2^2 + Cs_3^2) \text{ (гамильтониан)}, \\ F &= s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \text{ (дополнительный интеграл)}, \\ s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3 &= 0 \text{ (интеграл площадей)}, \\ r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 &= 1 \text{ (геометрический интеграл)}.\end{aligned}$$

Хорошо известно, что периодические траектории этой системы соответствуют точкам касания сферы $\{F = f\}$ и эллипсоида $\{H = h\}$. При фиксированном значении гамильтониана сфера и эллипсоид касаются при трех значениях дополнительного интеграла: $f = 2H/A$, $f = 2H/B$ и $f = 2H/C$. В этом случае s -координаты соответствующих точек касания запишутся следующим образом: $(\pm\sqrt{2H/A}, 0, 0)$, $(0, \pm\sqrt{2H/B}, 0)$, $(0, 0, \pm\sqrt{2H/C})$, а динамическая система примет вид

$$\begin{cases} \dot{r}_2 = \mp\sqrt{2HAr_3}, \\ \dot{r}_3 = \pm\sqrt{2HAr_2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{r}_1 = \pm\sqrt{2HB}r_3, \\ \dot{r}_3 = \mp\sqrt{2HB}r_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{r}_1 = \mp\sqrt{2HC}r_2, \\ \dot{r}_2 = \pm\sqrt{2HC}r_1 \end{cases}$$

соответственно (уравнения с нулевой правой частью пропущены). Во всех трех случаях движение по замкнутым орбитам представляет собой равномерное движение по окружностям с периодами $2\pi/\sqrt{2HA}$, $2\pi/\sqrt{2HB}$ и $2\pi/\sqrt{2HC}$. Отметим, что первый и третий случаи соответствуют вращениям твердого тела вокруг его максимальной и минимальной осей инерции, а второй – неустойчивому вращению вокруг средней оси инерции. Таким образом, имеем

$$T_1 : T_2 : T_3 = \frac{1}{\sqrt{C}} : \frac{1}{\sqrt{B}} : \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Аналогично тому, как это было сделано для задачи Якоби, можно продолжить инвариант (4) по непрерывности на случай $a \leq b \leq c$. Полученная четверка будет точным инвариантом системы, если понимать его так, как и в задаче о геодезических.

Итак, верно следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Если задача Эйлера с параметрами $a \leq b \leq c$ топологически сопряжена задаче Якоби с параметрами $A \leq B \leq C$, то четверки (3) и (4) у этих систем совпадают.*

Поскольку задача Якоби является трехпараметрической, то, сопоставляя каждому трехосному эллипсоиду четыре числа по формуле (3), мы получим гладкое отображение трехмерного множества всех трехосных эллипсоидов в четырехмерное евклидово пространство. Однако, можно проверить, что пропорциональные тройки задают в этом пространстве одну и ту же точку. Итак, мы получаем некоторую 2-поверхность J^2 в $\mathbb{R}^4$. Поступая по той же схеме для случая Эйлера, мы также получаем некоторую 2-поверхность E^2 в том же четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$. Чтобы доказать топологическую несопряженность задач Эйлера и Якоби, достаточно убедиться, что эти две двумерные поверхности не пересекаются в $\mathbb{R}^4$. После некоторых аналитических преобразований эта задача сводится к вопросу о пересечении кривых на плоскости.

Действительно, предположим, что поверхности J^2 и E^2 пересекаются в некоторой точке, которой соответствуют значения параметров $(a : b : c)$ и $(A : B : C)$. Это означает, что выполнено равенство (1) и, кроме того,

$$t(a, b) : t(a, c) : t(b, c) = \frac{1}{\sqrt{C}} : \frac{1}{\sqrt{B}} : \frac{1}{\sqrt{A}}. \quad (5)$$

Подставляя в формулу (1) вместо A , B и C их выражения через a , b и c из формулы (5) и полагая $a = 1$ (поскольку, как уже отмечалось, параметры a , b и c определены с точностью до пропорциональности), мы сводим вопрос о пересечении поверхностей к вопросу разрешимости системы двух уравнений

$$k(1, b, c) = K(A(b, c), B(b, c), C(b, c)), \quad l(1, b, c) = L(A(b, c), B(b, c), C(b, c)), \quad (6)$$

где

$$K = \left(\frac{t^2(b, c)}{t^2(1, b)} - 1 \right)^{-1/2} \left(\frac{t^2(b, c)}{t^2(1, c)} - 1 \right)^{-1/2},$$

$$L = - \left(1 - \frac{t^2(1, b)}{t^2(b, c)} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{t^2(1, b)}{t^2(b, c)} \right)^{-1/2}.$$

Каждое из уравнений системы (6) задает, вообще говоря, семейство гладких кривых в области $1 \leq b \leq c$ плоскости $\mathbb{R}^2(b, c)$, причем легко проверить, что прямая $b = 1$ удовлетворяет первому уравнению, а прямая $b = c$ – второму. Компьютерный эксперимент показал, что множество решений каждого из уравнений исчерпывается двумя этими прямыми. Таким образом, точка $(b, c) = (1, 1)$ является единственным решением системы уравнений (6). Эта точка отвечает случаю $a = b = c$ (в задаче Якоби) и случаю $A = B = C$ (в задаче Эйлера), т.е. в обеих задачах мы получаем сферу. Легко видеть, что в этом случае обе динамические системы просто совпадают.

Аналитическое исследование количества решений каждого из уравнений оказывается довольно сложным, и строго (т.е. без использования компьютера) удастся доказать лишь неравенство $l/k < L/K$ при условии $(b, c) \neq (1, 1)$. Этого, очевидно, достаточно для доказательства неразрешимости системы (6) и, следовательно, несопряженности задач Эйлера и Якоби.

Оценим каждое из отношений l/k и L/K . Всюду в оценках считаем, что $(b, c) \neq (1, 1)$.

1) Явную формулу для отношения l/k можно получить из первых двух уравнений (2). Поскольку

$$\int_0^\infty \sqrt{\frac{u}{(u+b)(u+c)}} \frac{du}{u+1} > \int_0^\infty \sqrt{\frac{u}{(u+b)(u+1)}} \frac{du}{u+c},$$

то

$$\frac{l}{k} < -\sqrt{\frac{c(b-1)}{c-b}}. \quad (7)$$

2) Отношение L/K дается формулой

$$\frac{L}{K} = -\frac{t(b, c)}{t(1, b)} \sqrt{\frac{t^2(b, c) - t^2(1, c)}{t^2(1, c) - t^2(1, b)}}.$$

Обозначим через $t'(\alpha, \beta)$ значение производной функции t по одному из сомножителей (нетрудно проверить, что $\partial t(\alpha, \beta)/\partial \alpha = \partial t(\alpha, \beta)/\partial \beta$). Тогда

$$\sqrt{\frac{t(b, c) - t(1, c)}{t(1, c) - t(1, b)}} = \sqrt{\frac{(b-1)t'(\vartheta_1, c)}{(c-b)t'(1, \vartheta_2)}},$$

где $\vartheta_1 \in (1, b)$, $\vartheta_2 \in (b, c)$. Поскольку $t'(\vartheta_1, c) < t'(1, \vartheta_2)$, то все это выражение строго меньше

$$\sqrt{\frac{b-1}{c-b}}.$$

Осталось оценить второй сомножитель, равный

$$\frac{t(b, c)}{t(1, b)} \sqrt{\frac{t(b, c) + t(1, c)}{t(1, c) + t(1, b)}}.$$

Продифференцировав его по b , получаем, что он достигает наибольшего значения при $b = 1$. Так как $t(1, 1) = 2\pi$, то верна следующая оценка:

$$\frac{L}{K} > -\frac{t(1, c)}{2\pi} \sqrt{\frac{2t(1, c)}{t(1, c) + 2\pi}} \sqrt{\frac{b-1}{c-b}}. \quad (8)$$

Сравнивая (7) и (8), получаем, что неравенство $l/k < L/K$ будет следовать из неравенства

$$\frac{t(1, c)}{2\pi} \sqrt{\frac{2t(1, c)}{t(1, c) + 2\pi}} < \sqrt{c},$$

или, по-другому, обозначая для краткости $t(c) = t(1, c)$,

$$t(c)(2t^2(c) - 4\pi^2 c) - 8\pi^3 c < 0. \quad (9)$$

Для того чтобы доказать это неравенство, воспользуемся разложением $t(c)$ в ряд по c

$$t(c) = 2\pi\sqrt{c} \left(1 - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{c} \right) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)!!(2n-3)!!}{2^n(2n)!!} \left(1 - \frac{1}{c} \right)^n \right).$$

Отбрасывая члены ряда, начиная с четвертого, получаем оценку при $c > 1$

$$t(c) < \frac{\pi}{16} \sqrt{c} \left(21 + 14 \frac{1}{c} - 3 \frac{1}{c^2} \right).$$

Если выражение $2t^2(c) - 4\pi^2 c$ в формуле (9) меньше нуля, то все доказано. Если же оно больше нуля, то верна оценка

$$\begin{aligned} t(c)(2t^2(c) - 4\pi^2 c) - 8\pi^3 c &< \frac{\pi}{16} \sqrt{c} \left(21 + 14 \frac{1}{c} - 3 \frac{1}{c^2} \right) \\ &\times \left(\frac{\pi^2}{128} c \left(21 + 14 \frac{1}{c} - 3 \frac{1}{c^2} \right)^2 - 4\pi^2 c \right) - 8\pi^3 c. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, для того чтобы доказать неравенство (9), достаточно проверить, что многочлен в правой части (10) от переменной $\sqrt{c}$ меньше нуля в области $\sqrt{c} > 1$. Старший коэффициент при $c^{3/2}$, как нетрудно проверить, меньше нуля. Поэтому неравенство верно, по крайней мере, для достаточно больших c . Оценку многочлена при всех $c > 1$ нетрудно провести, выписав этот многочлен в явном виде и воспользовавшись элементарными тождествами вида $\sqrt{c} > 1$ и $c - 2\sqrt{c} + 1 > 0$.

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность А. В. Болсинову и А. Т. Фоменко за постановку задачи и ценные советы и обсуждения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10.05.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Поток эллипсоида траекторно эквивалентен интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела // Докл. РАН. 1994. Т. 339. № 3. С. 293–296.
- [2] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 4. С. 27–80; II // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 5. С. 27–78.
- [3] Орёл О. Е. Топологические свойства функции вращения в интегрируемых задачах Эйлера и Якоби // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1996. № 1. С. 24–32.