Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Плиско, Модифицированная реализуемость и логика предикатов, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 2, 259–269

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1499>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 08:39:53

УДК 510.64

МОДИФИЦИРОВАННАЯ РЕАЛИЗУЕМОСТЬ И ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

В. Е. Плиско

Рассматриваются семантики предикатных формул, основанные на понятии модифицированной реализуемости для арифметических формул и выборе той или иной интерпретации языка арифметики конечных типов. Доказывается, что для ряда естественных конструктивных интерпретаций соответствующая предикатная логика модифицированной реализуемости неарифметична.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение

Введенное Клини [1] понятие рекурсивной реализуемости для арифметических формул оказалось полезным инструментом в исследовании интуиционистских теорий. Это понятие может рассматриваться также как своеобразная семантика арифметических суждений. Именно она лежит в основе конструктивного направления в математике, разработка которого велась А. А. Марковым и его школой (см. [2]).

В связи с развитием конструктивной математики представляет интерес проблема описания логических законов, приемлемых с конструктивной точки зрения. Наибольший прогресс в описании законов конструктивной логики высказываний достигнут Ф. Л. Варпаховским [3], построившим исчисление, в котором выводимы все ныне известные реализуемые пропозициональные формулы. Вопрос о полноте этого исчисления остается открытым. Предикатная логика рекурсивной реализуемости оказалась устроенной довольно сложно: она неперечислима и даже неарифметична (см. [4], [5]).

В последние годы интерес к конструктивным семантикам возрос в связи с проблемой синтеза программ. Известно, что из интуиционистского доказательства арифметического утверждения вида $\forall x \exists y P(x, y)$ можно извлечь алгоритм, который для любого m строит такое n , что имеет место $P(m, n)$. Процедуры извлечения алгоритмов из интуиционистских доказательств обычно используют конструктивные семантики арифметического языка.

Ряд конструктивных семантик может быть получен путем подходящего обобщения рекурсивной реализуемости. Одним из таких обобщений является введенная Крайзелем [6] модифицированная реализуемость. Она представляет собой перевод с языка арифметики первого порядка на язык арифметики конечных типов, который каждой

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, грант NFQ000, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-00416.

формуле F сопоставляет специальным образом определенную формулу языка арифметики конечных типов $\text{mg } F$. Выбрав какую-либо интерпретацию языка арифметики конечных типов, мы можем определить семантику арифметических формул: замкнутая арифметическая формула F считается *истинной* (или *M -реализуемой*), если формула $\text{mg } F$ истинна в интерпретации M .

Для полученной таким образом семантики можно рассматривать соответствующую логику предикатов – совокупность тех предикатных формул, все арифметические примеры которых истинны в данной семантике, т.е. M -реализуемы. Такие предикатные формулы мы также будем называть M -реализуемыми. Целью настоящей работы является установление того факта, что для ряда естественных интерпретаций M множество всех M -реализуемых предикатных формул неарифметично. Его доказательство основывается на формализации теоремы Тенненбаума [7], утверждающей, что не существует рекурсивных нестандартных моделей арифметики.

В § 2 описывается язык арифметики конечных типов, теория HA^ω в этом языке и некоторые ее модели, а также понятие модифицированной реализуемости. Формализация теоремы Тенненбаума проводится в § 3. Это идейно простой, но технически громоздкий результат. Подробное его изложение дано в работе [8]. В настоящей работе приводится лишь общая схема доказательства некоторых утверждений. В § 4 результаты о формализации теоремы Тенненбаума применяются для исследования предикатной логики модифицированной реализуемости.

§ 2. Интуиционистская арифметика конечных типов

Мы будем рассматривать язык *формальной арифметики*, в котором имеются символы для всех примитивно рекурсивных функций. При этом символ, служащий обозначением данной примитивно рекурсивной функции, кодирует ее примитивно рекурсивное описание. Один из возможных вариантов такого языка изложен в работе [9]. Там же описана формальная система *интуиционистской арифметики* HA , постулатами которой являются схемы аксиом и правила вывода интуиционистского исчисления предикатов, аксиомы равенства, аксиомы Пеано и определяющие аксиомы для примитивно рекурсивных функций.

Типами называются слова в алфавите $\{0, \rightarrow, (,)\}$, определяемые индуктивно следующим образом: 1) 0 есть тип; 2) если σ и τ – типы, то $(\sigma \rightarrow \tau)$ – тип.

Язык *арифметики конечных типов* получается добавлением к языку формальной арифметики бесконечного множества переменных каждого типа $\sigma \neq 0$, а переменные самого языка формальной арифметики считаются переменными типа 0.

Класс *термов* типа σ определяется так: 1) термы языка формальной арифметики суть термы типа 0; 2) переменные типа σ суть термы типа σ ; 3) если s – терм типа $(\tau \rightarrow \sigma)$, а t – терм типа τ , то $s(t)$ – терм типа σ .

Для краткости вместо $t_1(t_2) \cdots (t_n)$ будем писать $t_1 t_2 \cdots t_n$. Пусть t – конечный список термов $t_1, \dots, t_n$, причем t_j – терм типа τ_j ($j = 1, \dots, n$). В этом случае будем называть t списком типа τ , где τ – список типов $\tau_1, \dots, \tau_n$. Если σ – некоторый тип, то через $(\tau \rightarrow \sigma)$ будем обозначать тип $(\tau_1 \rightarrow (\tau_2 \rightarrow (\cdots \rightarrow (\tau_n \rightarrow \sigma) \cdots)))$. Пусть имеются список типов $\sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_m$ и список термов $s = s_1, \dots, s_m$, причем s_i имеет тип $(\tau \rightarrow \sigma_i)$ ($i = 1, \dots, m$). Тогда $s(t)$ будет обозначать список термов $s_1 t_1 \cdots t_n, \dots, s_m t_1 \cdots t_n$. (Очевидно, это список типа σ .) При этом, если список s пуст, будем считать пустым и список $s(t)$, а если пуст список t , будем считать $s(t)$ совпадающим с s . Наконец, через

$(\sigma \rightarrow \tau)$ будем обозначать список типов $(\sigma \rightarrow \tau_1), \dots, (\sigma \rightarrow \tau_n)$. Условимся считать, что список $(\sigma \rightarrow \tau)$ пуст, если пуст список σ , и совпадает с σ , если пуст список τ .

Если x – список переменных $x_1, \dots, x_m$, то $\forall x$ и $\exists x$ будут обозначать соответственно $\forall x_1 \dots \forall x_m$ и $\exists x_1 \dots \exists x_m$.

Атомарные формулы языка арифметики конечных типов имеют вид $s = t$, где s и t – термы типа 0. Более сложные *формулы* строятся из них обычным образом с помощью логических связок и кванторов по переменным любого типа.

Для технических целей нам понадобится расширение только что описанного языка арифметики конечных типов. А именно, каковы бы ни были типы ρ , σ и τ , добавим к этому языку константу $P_{\sigma, \tau}$ типа $(\sigma, \tau \rightarrow \sigma)$, константу $K_{\rho, \sigma, \tau}$ типа $((\rho, \sigma \rightarrow \tau), (\rho \rightarrow \sigma), \rho \rightarrow \tau)$ и константу R_σ типа $(\sigma, (0, \sigma \rightarrow \sigma), 0 \rightarrow \sigma)$.

В [10] описана формальная система HA^ω *интуиционистской арифметики конечных типов* в этом расширенном языке. Ее постулатами являются схемы аксиом и правила вывода многосортного интуиционистского исчисления предикатов, нелогические аксиомы системы HA , а также следующие схемы аксиом, где ρ , σ , τ – произвольные типы:

$$\begin{aligned} t[P_{\sigma, \tau} t_1 t_2] &= t[t_1], & t[K_{\rho, \sigma, \tau} t_3 t_4 t_5] &= t[t_3 t_5 (t_4 t_5)], \\ t[R_\sigma t_1 t_6 0] &= t[t_1], & t[R_\sigma t_1 t_6 (St_7)] &= t[t_6 t_7 (R_\sigma t_1 t_6 t_7)]. \end{aligned}$$

Здесь t и t_7 – произвольные термы типа 0, t_1 – терм типа σ , t_2 – терм типа τ , t_3 – терм типа $(\rho, \sigma \rightarrow \tau)$, t_4 – терм типа $(\rho \rightarrow \sigma)$, t_5 – терм типа ρ , t_6 – терм типа $(0, \sigma \rightarrow \sigma)$. Каждая из этих аксиом имеет вид $t[a] = t[b]$, где a и b – термы одного и того же типа γ , причем $t[a]$ и $t[b]$ суть термы, полученные подстановкой соответственно a и b вместо одного и того же вхождения некоторой переменной типа γ в терм t .

Интерпретация M языка арифметики конечных типов задается путем указания для каждого типа τ непустого множества M_τ , которое считается областью возможных значений переменных типа τ . При этом M_0 есть множество всех натуральных чисел N . Элементы множества M_τ будем называть *объектами типа τ* в интерпретации M , причем M_σ и M_τ могут пересекаться, даже если σ и τ – различные типы. Для интерпретации языка с константами нужно еще указать в качестве их значений некоторые объекты того же типа.

Для каждой пары типов σ , τ задается отображение $\text{app}_{\sigma, \tau}$ множества $M_{(\sigma \rightarrow \tau)} \times M_\sigma$ в множество M_τ . Это отображение определяет применение объектов типа $(\sigma \rightarrow \tau)$ к объектам типа σ , результатом которого оказываются объекты типа τ . А именно, если t – терм типа $(\sigma \rightarrow \tau)$ и его значение при некоторой оценке переменных в интерпретации M есть объект a типа $(\sigma \rightarrow \tau)$, а s – терм типа σ и его значение при той же оценке – объект b типа σ , то значением термина $t(s)$ считается объект $\text{app}_{\sigma, \tau}(a, b)$ типа τ , который мы будем обозначать также $a(b)$. Заметим, что в любой интерпретации с каждым объектом a типа $(0 \rightarrow 0)$ связана функция $f: N \rightarrow N$ такая, что $f(x) = a(x)$ для всех $x \in N$. Будем говорить, что функция f *ассоциирована* с объектом a .

Если задана интерпретация языка арифметики конечных типов, то можно говорить об истинности или ложности замкнутых формул этого языка в данной интерпретации, понимая равенство, логические связки и кванторы обычным, классическим образом. Если в интерпретации M истинны все аксиомы теории HA^ω , будем говорить, что M является *моделью* этой теории. Очевидно, в модели теории HA^ω истинны все формулы, выводимые в этой теории.

Рассмотрим некоторые модели теории HA^ω , описанные в [10]. Простейшим примером такой модели может служить классическая теоретико-множественная интерпретация языка арифметики конечных типов, в которой $M_0 = N$, $M_{(\sigma \rightarrow \tau)} = M_\tau^{M_\sigma}$, т.е. множество объектов типа $(\sigma \rightarrow \tau)$ – это множество всех отображений множества M_σ в множество M_τ .

Другой пример модели теории HA^ω – *система наследственно рекурсивных операций*, обозначаемая HRO . В этой модели объекты любого типа являются натуральными числами. Через $\{m\}$ будем обозначать одноместную частично рекурсивную функцию с клиниевским номером m , а $\{m\}(n) \downarrow$ будет означать, что эта функция применима к натуральному числу n . Теперь определим множество HRO_σ объектов каждого типа σ в интерпретации HRO . Как обычно, $\text{HRO}_0 = N$. Положим

$$\text{HRO}_{(\sigma \rightarrow \tau)} = \{n \mid (\forall x \in \text{HRO}_\sigma)(\{n\}(x) \downarrow \& \{n\}(x) \in \text{HRO}_\tau)\}.$$

Отображение $\text{app}_{\sigma, \tau}$ определим следующим образом: $\text{app}_{\sigma, \tau}(x, y) = \{x\}(y)$. В силу задания множества $\text{HRO}_{(\sigma \rightarrow \tau)}$ это отображение определено всюду на $\text{HRO}_{(\sigma \rightarrow \tau)} \times \text{HRO}_\sigma$, и его значения принадлежат HRO_τ . Интерпретация констант $P_{\sigma, \tau}$, $K_{\rho, \sigma, \tau}$, R_σ строится с помощью теоремы о рекурсии, как в [10].

Модели HRO родственна *система наследственно эффективных операций* HEO . В модели HEO объекты любого типа также являются натуральными числами. Для каждого типа σ одновременно определяются множество HEO_σ объектов типа σ и отношение эквивалентности $=_\sigma$ на этом множестве. А именно, $\text{HEO}_0 = N$, $x =_0 y \iff x \stackrel{\sigma}{=} y$. Пусть уже определены множества HEO_σ , HEO_τ и отношения $=_\sigma$, $=_\tau$ на них. Тогда положим

$$\begin{aligned} \text{HEO}_{(\sigma \rightarrow \tau)} &= \{n \mid (\forall x \in \text{HEO}_\sigma)(\{n\}(x) \downarrow \& \{n\}(x) \in \text{HEO}_\tau) \\ &\quad \& (\forall x, y \in \text{HEO}_\sigma)(x =_\sigma y \implies \{n\}(x) =_\tau \{n\}(y))\}, \\ x =_{(\sigma \rightarrow \tau)} y &\iff (\forall z \in \text{HEO}_\sigma)(\{x\}(z) =_\tau \{y\}(z)). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что $=_{(\sigma \rightarrow \tau)}$ есть отношение эквивалентности на $\text{HEO}_{(\sigma \rightarrow \tau)}$. Константы $P_{\sigma, \tau}$, $K_{\rho, \sigma, \tau}$, R_σ интерпретируются в HEO точно так же, как и в HRO . Заметим, что объекты типа $(0 \rightarrow 0)$ в моделях HRO и HEO – это в точности номера общерекурсивных функций.

Напомним введенное Крайзелем [6] понятие *модифицированной реализуемости*. Для произвольной арифметической формулы F определим формулу языка арифметики конечных типов $x \text{ nr } F$, где x – некоторый (возможно, пустой) список переменных, не входящих свободно в F . Свободными переменными формулы $x \text{ nr } F$ будут свободные переменные формулы F , а также переменные из списка x . Длина списка x и его тип определяются логической структурой формулы F .

Формула $x \text{ nr } F$ определяется индукцией по логической сложности формулы F .

1) Если F – атомарная формула, то список x пуст, и $x \text{ nr } F$ есть F .

В последующих пунктах определения будем считать, что определены переводы $y \text{ nr } G$ и $z \text{ nr } H$ формул G и H , где y и z – непересекающиеся списки переменных типов σ и τ соответственно.

2) Если F есть $(G \& H)$, то x есть список y, z типа σ, τ (т.е. объединение списков y и z), а $x \text{ nr } F$ есть $(y \text{ nr } G \& z \text{ nr } H)$.

3) Если F есть $(G \vee H)$, то x есть список u, y, z типа $0, \sigma, \tau$, где u – переменная типа 0 , не входящая в списки y и z , а $x \text{ nr } F$ есть

$$((u = 0 \supset y \text{ nr } G) \& (u \neq 0 \supset z \text{ nr } H)).$$

4) Если F есть $(G \supset H)$, то x есть список типа $(\sigma \rightarrow \tau)$, а $x \text{ mg } F$ есть

$$\forall y(y \text{ mg } G \supset x(y) \text{ mg } H).$$

Здесь и в аналогичных случаях в дальнейшем $t \text{ mg } H$ будет обозначать результат подстановки термов из списка t вместо соответствующих переменных из списка z в формулу $z \text{ mg } H$.

5) Если F есть $\forall vG$, то x – список типа $(0 \rightarrow \sigma)$, а $x \text{ mg } F$ есть $\forall v(x(v) \text{ mg } G)$.

6) Если F есть $\exists vG$, то x есть список v , y типа $0, \sigma$, а $x \text{ mg } F$ есть $y \text{ mg } G$.

7) Если F есть $\neg G$, то список x пуст, и $x \text{ mg } F$ есть $\forall y \neg y \text{ mg } G$.

Арифметическая формула называется *негативной*, если она строится из атомарных формул с использованием только логических связок $\&$, $\supset$, $\neg$ и квантора $\forall$, т.е. если она не содержит $\vee$ и $\exists$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0. Если F – негативная арифметическая формула, то $x \text{ mg } F$ совпадает с F , а список x пуст.

Это утверждение легко доказывается индукцией по логической сложности негативной формулы F . Оно верно для атомарных формул, а пункты 2), 4)–6) определения формулы $x \text{ mg } F$ не изменяют формулу F , если списки y и z пусты.

Через $\text{mg } F$ будем обозначать формулу $\exists x(x \text{ mg } F)$.

Пусть M – некоторая интерпретация языка арифметики конечных типов. Замкнутую арифметическую формулу F будем называть M -реализуемой, если формула $\text{mg } F$ истинна в интерпретации M . Арифметическую формулу F со свободными переменными $x_1, \dots, x_n$ будем называть M -реализуемой, если M -реализуема замкнутая формула $\forall x_1 \dots \forall x_n F$. Заметим, что если F – негативная арифметическая формула, то она M -реализуема в точности тогда, когда классически истинна в стандартной модели арифметики.

Отметим следующий результат о корректности системы HA^ω относительно модифицированной реализуемости [10, теорема 3.4.5]: если $\text{HA}^\omega \vdash F$, то $\text{HA}^\omega \vdash \text{mg } F$, какова бы ни была формула F . Отсюда немедленно вытекает такой факт:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если M – модель теории HA^ω , то всякая замкнутая арифметическая формула, выводимая в теории HA , является M -реализуемой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть замкнутая арифметическая формула F выводима в HA . Так как HA^ω – расширение теории HA , то $\text{HA}^\omega \vdash F$. В силу только что отмеченного результата о корректности теории HA^ω относительно модифицированной реализуемости $\text{HA}^\omega \vdash \text{mg } F$. Поэтому, если M – модель теории HA^ω , то формула $\text{mg } F$ истинна в M , т.е. F является M -реализуемой. Предложение 1 доказано.

Предикатную формулу будем называть M -реализуемой, если любой ее арифметический пример является M -реализуемой арифметической формулой. В § 4 будет доказано, что для некоторых интерпретаций M класс всех M -реализуемых предикатных формул не является арифметическим. Этот факт получается с помощью одного довольно общего математического результата, к изложению которого мы переходим.

§ 3. Формализация теоремы Тенненбаума

Пусть A и B – арифметические Σ_1 -формулы с единственным параметром x . Через $IS(A, B)$ обозначим формулу

$$\forall x \neg(A \& B) \& \neg \forall x \exists y ((A \supset y = 0) \& (B \supset y \neq 0)).$$

Существуют такие Σ_1 -формулы A и B , что теория $HAIS(A, B)$, полученная добавлением аксиомы $IS(A, B)$ к системе HA , непротиворечива относительно HA . В качестве A можно взять формулу

$$\exists y (T_1(x, x, y) \& U(y) \neq 0),$$

а в качестве B – формулу

$$\exists y (T_1(x, x, y) \& U(y) = 0),$$

где T_1 и U – примитивно рекурсивные предикат и функция, участвующие в теореме Клини о нормальной форме частично рекурсивных функций [11, § 57]. Нетрудно доказать, что в данном случае все аксиомы системы $HAIS(A, B)$ выводимы в системе CHA , описанной в работе [9]. Непротиворечивость последней относительно HA доказывается с помощью реализуемости (см. [10, 3.2.22 (ii)]).

Возьмем такие Σ_1 -формулы A и B с единственным параметром x , что теория $HAIS(A, B)$ непротиворечива. Для краткости обозначим эту теорию через T . Применим к ней процедуру устранения символов для функций и введения вместо них предикатных символов, описанную в [11, § 74], т.е. совершим над T в точности те же действия, которые были проделаны в работе [9] над системой HA , и получим систему T' , обладающую тем свойством, что для любой арифметической формулы F имеет место

$$T \vdash F \iff T' \vdash F',$$

где F' – предикатная запись формулы F .

Теперь построим формальную систему T^2 в языке, являющемся объединением языков систем T и T' , аналогично тому, как в работе [9] была построена система CHA^2 .

Постулаты системы T^2 :

I. Схемы аксиом и правила вывода интуиционистского исчисления предикатов.

II. Аксиомы системы T .

III. Аксиомы системы T' .

IV. Аксиомы равенства для каждого предикатного символа P :

$$\forall x \forall y (x = y \supset (P(x) \supset P(y))),$$

где $x = x_1, \dots, x_n$ и $y = y_1, \dots, y_n$ – списки переменных (n – валентность символа P), а $x = y$ есть сокращение для формулы $x_1 = y_1 \& \dots \& x_n = y_n$.

V. Аксиома индукции

$$F(0) \& \forall x (F(x) \supset F(Sx)) \supset \forall x F(x)$$

для каждой формулы $F(x)$ в языке системы T^2 .

Система T^2 непротиворечива относительно HA , поскольку она погружается в T с помощью перевода, который каждую формулу F преобразует в арифметическую формулу F° , полученную заменой в F всех атомарных подформул вида $P_f(t_1, \dots, t_n, t)$ на $f(t_1, \dots, t_n) = t$ и $E(t_1, t_2)$ на $t_1 = t_2$.

Система T^2 отличается от системы CH^2 , построенной в работе [9], отсутствием среди постулатов принципа Маркова M и формального тезиса Чёрча CT . Последний заменен аксиомой $IS(A, B)$, включенной в чисто арифметическую часть системы T^2 . Многие факты, установленные в [9] для системы CH^2 , переносятся и на систему T^2 . Отметим некоторые из них.

Формула $R(x, y)$ определена в работе [9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. В системе T^2 выводима формула

$$\forall x \exists y R(x, y).$$

Это предложение аналогично одному из утверждений предложения 2 работы [9]. Его доказательство имеется в работе [8, предложение 3].

Если $x = x_1, \dots, x_n$ и $y = y_1, \dots, y_n$ суть списки переменных, то вместо $R(x_1, y_1) \& \dots \& R(x_n, y_n)$ будем писать $R(x, y)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Какова бы ни была арифметическая Σ_1 -формула $F(x)$, в системе T^2 выводима формула

$$R(x, y) \supset (F(x) \supset F'(y)),$$

где F' – предикатная запись формулы F .

Это предложение аналогично теореме 2 из работы [9]. Его доказательство содержится в работе [8, теорема 2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. В системе T^2 выводима формула

$$\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \& \neg \exists u R(u, z) \supset (y < z)').$$

Это предложение аналогично лемме 1 из работы [9]. Его доказательство можно найти в работе [8, предложение 7].

Следующая теорема в некотором смысле аналогична теореме Тенненбаума [7].

ТЕОРЕМА 1. В системе T^2 выводима формула

$$\forall y \neg \neg \exists z R(z, y).$$

Эта теорема играет ключевую роль в нашей конструкции. Поэтому мы дадим здесь набросок главных шагов ее доказательства, опуская его рутинную часть. Полное доказательство теоремы 1 содержится в работе [8, теорема 3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вспомним, что в построении системы T^2 участвовали арифметические Σ_1 -формулы A и B с единственным параметром x , фигурирующие в аксиоме $IS(A, B)$. Через Γ обозначим список формул

$$\neg \exists z R(z, y), \quad \forall x ((x < y)' \supset ((g(u, x) = 0)' \equiv A')),$$

где $g(x, m) = x_m$, если $x = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ и $m \leq n$. В силу предложения 4 из Γ и $R(v, x)$ в T^2 выводится $(x < y)'$. Поэтому

$$R(v, x), \Gamma \vdash (g(u, x) = 0)' \equiv A'. \quad (1)$$

Но $g(u, x) = 0$ есть атомарная арифметическая формула, и в HA выводится $g(u, x) = 0 \vee \neg g(u, x) = 0$. Поэтому в силу отмеченной выше связи между системами T и T' в T^2 выводится

$$(g(u, x) = 0)' \vee \neg(g(u, x) = 0)'.$$

Отсюда и из (1) следует, что $R(v, x), \Gamma \vdash A' \vee \neg A'$ и, следовательно,

$$R(v, x), \Gamma \vdash \exists y((A' \supset y = 0) \& (\neg A' \supset y \neq 0)). \quad (2)$$

В силу предложения 3

$$R(v, x) \vdash A(v) \supset A'(x), \quad (3)$$

$$R(v, x) \vdash B(v) \supset B'(x). \quad (4)$$

Кроме того, из аксиомы $\text{IS}(A, B)$ следует, что в T выводится формула $B(x) \supset \neg A(x)$, а в T^2 – ее предикатная запись, т.е.

$$\vdash B'(x) \supset \neg A'(x). \quad (5)$$

Из (4) и (5) вытекает $R(v, x) \vdash B(v) \supset \neg A'(x)$. Отсюда и из (2) и (3) получаем, что формула

$$\exists y((A(v) \supset y = 0) \& (B(v) \supset y \neq 0))$$

выводима в T^2 из Γ и $R(v, x)$. Так как эта формула не содержит свободных вхождений x , она выводима из $\Gamma, \exists x R(v, x)$ и даже из Γ , поскольку в T^2 выводится $\exists x R(v, x)$ в силу предложения 2. Переменная x не имеет свободных вхождений в Γ , поэтому

$$\Gamma \vdash \forall x \exists y((A \supset y = 0) \& (B \supset y \neq 0)),$$

что противоречит аксиоме $\text{IS}(A, B)$. Таким образом, из списка Γ выводится противоречие. Нетрудно убедиться, что противоречие выводимо и из списка $\neg \exists z R(z, y)$,

$$\neg \neg \exists u(P_{lth}(u, y) \& \forall x((x < y)' \supset ((g(u, x) = 0)' \equiv A'))).$$

Но последняя формула является предикатной записью формулы

$$\neg \neg \exists u(lthu = y \& \forall x(x < y \supset ((u)_x = 0 \equiv A))),$$

выводимой в T^2 согласно предложению 1 из работы [9]. Значит, из формулы $\neg \exists z R(z, y)$ выводится противоречие, и формула $\neg \neg \exists z R(z, y)$, а значит, и

$$\forall y \neg \neg \exists z R(z, y)$$

выводима в T^2 . Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F(x)$ – негативная арифметическая формула, $F'(x)$ – ее предикатная запись. Тогда в системе T^2 выводима формула $R(x, y) \supset (F(x) \equiv F'(y))$.

Эта теорема доказывается индукцией по построению формулы F с использованием предложения 2 и теоремы 1. Подробное ее доказательство имеется в работе [8].

В случае, когда список параметров x пуст, из теоремы 2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть F – замкнутая негативная арифметическая формула. Тогда в T^2 выводима формула $F \equiv F'$.

§ 4. Приложения к логике

Пусть $\mathcal{T}$ – интуиционистская арифметическая теория, т.е. произвольное множество арифметических предложений, замкнутое относительно выводимости в НА. Замкнутую предикатную формулу назовем $\mathcal{T}$ -общезначимой, если каждый замкнутый арифметический ее пример принадлежит $\mathcal{T}$. Пусть $L(\mathcal{T})$ – множество всех $\mathcal{T}$ -общезначимых предикатных формул.

Арифметическую теорию $\mathcal{T}$ будем называть *IS-теорией*, если существуют такие арифметические Σ_1 -формулы A и B с единственным параметром x , что $IS(A, B) \in \mathcal{T}$.

ТЕОРЕМА 4. *Какова бы ни была интуиционистская арифметическая IS-теория $\mathcal{T}$, по любой замкнутой негативной арифметической формуле F можно эффективно построить замкнутую предикатную формулу F^* такую, что $F \in \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда $F^* \in L(\mathcal{T})$.*

Подробное доказательство этой теоремы имеется в работе [8, теорема 9]. Здесь мы опишем лишь работу алгоритма, неявно упоминаемого в теореме 4, т.е. алгоритма, преобразующего каждую замкнутую негативную арифметическую формулу F в предикатную формулу F^* .

Пусть F – произвольное негативное арифметическое предложение, F' – его предикатная запись. В силу теоремы 3 существует вывод формулы $F \equiv F'$ в системе T^2 . Обозначим через Q конъюнкцию всех аксиом группы III (т.е. аксиом системы T'), фактически участвующих в этом выводе. Пусть F^* есть $Q \supset F'$. Все предикатные символы, входящие в Q и F' , будем считать предикатными переменными. Тогда F^* можно рассматривать как предикатную формулу. С помощью теоремы 3 нетрудно доказать, что F^* обладает нужным свойством, а именно,

$$F^* \in L(T) \iff F \in L.$$

Пусть $\mathcal{T}^-$ обозначает множество всех негативных формул теории $\mathcal{T}$, $\leq_1$ означает 1-1-сводимость (см. [12]). Описанный алгоритм построения по арифметической формуле F предикатной формулы F^* , связь между которыми указана в теореме 4, обладает тем свойством, что разные арифметические формулы он преобразует в разные предикатные формулы. Поэтому справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Для любой интуиционистской арифметической IS-теории $\mathcal{T}$ имеет место $\mathcal{T}^- \leq_1 L(\mathcal{T})$.*

Теперь обратимся к логике модифицированной реализуемости. Пусть M – некоторая интерпретация языка арифметики конечных типов. Через $L(M)$ обозначим множество всех M -реализуемых предикатных формул.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть M – такая интерпретация языка арифметики конечных типов, что для некоторых арифметических Σ_1 -формул A и B с единственным параметром x формула $IS(A, B)$ является M -реализуемой, и все формулы, выводимые в НА, также M -реализуемы. Тогда логика $L(M)$ неарифметична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении условий теоремы множество всех M -реализуемых арифметических предложений является IS-теорией. Применяя теорему 5, получаем, что множество $\mathcal{T}^-(M)$ всех негативных M -реализуемых арифметических предложений 1-1-сводимо к $L(M)$. Но в силу предложения 0 $\mathcal{T}^-(M)$ есть в точности множество всех негативных арифметических предложений, классически истинных в стандартной модели арифметики. Оно, очевидно, неарифметично, как следует из теоремы

Тарского и того факта, что классически всякая формула эквивалентна негативной. Следовательно, логика $L(M)$ также неарифметична. Теорема 6 доказана.

ТЕОРЕМА 7. Пусть M – интерпретация языка арифметики конечных типов такая, что

- 1) с каждым объектом a типа $(0 \rightarrow 0)$ ассоциирована рекурсивная функция f , т.е. $a(x) = f(x)$ для любого натурального числа x ;
- 2) все формулы, выводимые в HA , являются M -реализуемыми.

Тогда логика $L(M)$ неарифметична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 6 достаточно показать, что если интерпретация M удовлетворяет условию доказываемой теоремы, то множество $\mathcal{T}(M)$ всех M -реализуемых арифметических предложений является IS-теорией, т.е. существуют такие арифметические Σ_1 -формулы A и B с единственным параметром x , что формула $IS(A, B)$ является M -реализуемой.

Пусть A и B суть формулы

$$\exists z(T_1(x, x, z) \& U(z) \neq 0)$$

и

$$\exists z(T_1(x, x, z) \& U(z) = 0)$$

соответственно. Построив формулу $IS(A, B)$ и применив к ней описанный в § 2 алгоритм построения формулы $\text{mg } IS(A, B)$, можно убедиться, что последняя есть конъюнкция формул

$$\forall x \forall z_1 \forall z_2 (T_1(x, x, z_1) \& U(z_1) \neq 0 \& T_1(x, x, z_2) \& U(z_2) = 0) \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned} & \forall f \forall x (\forall z_1 (T_1(x, x, z_1) \& U(z_1) \neq 0 \supset f(x) = 0) \\ & \& \forall z_2 (T_1(x, x, z_2) \& U(z_2) = 0 \supset f(x) \neq 0)), \end{aligned} \quad (7)$$

где x, z_1, z_2 – переменные типа 0, а f – переменная типа $(0 \rightarrow 0)$.

Формула (6) истинна в любой интерпретации языка арифметики конечных типов, поскольку она есть арифметическая формула, истинная в стандартной модели арифметики в силу свойств предиката T_1 . Формула (7) может быть преобразована к следующему (классически) эквивалентному виду:

$$\begin{aligned} & \forall f \exists x ((\exists z_1 (T_1(x, x, z_1) \& U(z_1) \neq 0) \& f(x) \neq 0) \\ & \vee (\exists z_2 (T_1(x, x, z_2) \& U(z_2) = 0) \& f(x) = 0)). \end{aligned}$$

Эта формула утверждает, что для любого объекта f типа $(0 \rightarrow 0)$ можно найти такое натуральное число x , что истинно утверждение

$$(\exists z_1 (T_1(x, x, z_1) \& U(z_1) \neq 0) \& f(x) \neq 0) \vee (\exists z_2 (T_1(x, x, z_2) \& U(z_2) = 0) \& f(x) = 0).$$

Очевидно, что в интерпретации M , где с каждым объектом типа $(0 \rightarrow 0)$ ассоциирована рекурсивная функция, в качестве x можно взять клиниевский номер функции, ассоциированной с f . Значит, формула (7) также истинна в интерпретации M , и $\mathcal{T}(M)$ является IS-теорией. В силу теоремы 6 логика $L(M)$ неарифметична. Теорема 7 доказана.

К каким же конкретным интерпретациям языка арифметики конечных типов применима теорема 7? Довольно общий ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8. Пусть интерпретация M языка арифметики конечных типов такова, что

- 1) с каждым объектом типа $(0 \rightarrow 0)$ ассоциирована рекурсивная функция;
- 2) M является моделью теории HA^ω .

Тогда логика $L(M)$ неарифметична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что если интерпретация M удовлетворяет условиям 1) и 2), то для нее выполнены условия теоремы 7. Условие 1) у этих теорем общее. Поэтому достаточно убедиться, что все формулы, выводимые в HA , M -реализуемы. Но это следует из предложения 1 и условия 2) доказываемой теоремы. Теорема 8 доказана.

Для рассмотренных в § 2 интерпретаций HRO и HEO можно, следуя общей схеме, определить логики $L(\text{HRO})$ и $L(\text{HEO})$. Поскольку эти интерпретации являются моделями теории HA^ω и все их объекты типа $(0 \rightarrow 0)$ ассоциированы с рекурсивными функциями, то для них выполнены условия 1) и 2) теоремы 8, откуда получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 9. Логики $L(\text{HRO})$ и $L(\text{HEO})$ неарифметичны.

Теорема 8 применима и к другим известным интерпретациям языка арифметики конечных типов, например, к так называемым *термовым моделям*, описанным в [10].

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19.08.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kleene S. C. On the interpretation of intuitionistic number theory // J. Symbolic Logic. 1945. V. 10. № 4. P. 109–124.
- [2] Шанин Н. А. О некоторых логических проблемах арифметики // Тр. МИАН. 1955. Т. 43. С. 1–112.
- [3] Варпаховский Ф. Л. К вопросу об аксиоматизации реализуемых пропозициональных формул // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 1. С. 32–36.
- [4] Плиско В. Е. О реализуемых предикатных формулах // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212. № 3. С. 553–556.
- [5] Плиско В. Е. Неарифметичность класса реализуемых предикатных формул // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. № 3. С. 483–502.
- [6] Kreisel G. Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite type // Constructivity in Math. Amsterdam: North-Holland, 1959. P. 101–128.
- [7] Tennenbaum S. Non-archimedean systems of arithmetic // Not. Amer. Math. Soc. 1959. V. 6. № 3. P. 270–283.
- [8] Плиско В. Е. Формализация теоремы Тенненбаума и ее применения // Деп. ВИНТИ. № 1853–92.
- [9] Плиско В. Е. Конструктивная формализация теоремы Тенненбаума и ее применения // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 3. С. 108–118.
- [10] Troelstra A. S. (ed.) Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis. Lect. Notes in Math. V. 344. Berlin: Springer Verlag, 1973.
- [11] Клини С. К. Введение в математику. М.: ИЛ, 1957.
- [12] Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.