Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Бондаренко, А. В. Примаков, Отрицательные результаты в формосохраняющем приближении высших порядков, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 6, 812–823

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm150>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 18:37:31

УДК 517.5

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ФОРМОСОХРАНЯЮЩЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

А. В. Бондаренко, А. В. Прима

Доказано, что для q -выпуклого приближения многочленами при $q \geq 4$ не верны неравенства типа Джексона даже с константой, зависящей от приближаемой функции.
Библиография: 10 названий.

1. Введение. Приближая непрерывные на отрезке функции иногда важно сохранить определенные свойства функций. Например, монотонную функцию хотелось бы приблизить монотонным многочленом, выпуклую – выпуклым.

Понятие выпуклости имеет естественное обобщение – q -выпуклость. Обозначим через

$$[x_0, x_1, \dots, x_q; f] := \sum_{i=0}^q \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j \neq i}^q (x_i - x_j)}$$

разделенную разность функции f в точках $x_0, \dots, x_q$. Функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется q -выпуклой на отрезке $[a, b]$ (будем писать $f \in \Delta^q[a, b]$), если $[x_0, x_1, \dots, x_q; f] \geq 0$ для всевозможных наборов $q+1$ различных точек $x_0, x_1, \dots, x_q \in [a, b]$. В частности, если f , скажем, q раз непрерывно-дифференцируемая на $[a, b]$, то $f \in \Delta^q[a, b]$ означает, что $f^{(q)}(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$. Легко видеть, что 1-выпуклые и 2-выпуклые функции являются соответственно неубывающими и выпуклыми вниз функциями. Различные свойства q -выпуклых функций можно найти в [1], здесь мы лишь сформулируем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть $q \geq 2$ и $f \in \Delta^q[a, b]$. Тогда для любого целого неотрицательного $j \leq q-2$ существует $f^{(j)}$ на (a, b) и является $(q-j)$ -выпуклой. В частности, существует $f^{(q-2)}$, которая является выпуклой и, следовательно, абсолютно непрерывной на произвольном подотрезке интервала (a, b) .

Для функции $f \in C[-1, 1]$ обозначим через

$$E_n(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_{C[-1, 1]}$$

величину наилучшего равномерного приближения многочленами; здесь $\mathcal{P}_n$ – пространство алгебраических многочленов степени $\leq n$.

Работа обоих авторов выполнена при поддержке украинско-французского гранта “Днипро”, грант № М/262-2003.

Аналогично, для $f \in C[-1, 1]$ обозначим

$$E_n^{(q)}(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^q[-1, 1]} \|f - P\|_{C[-1, 1]}$$

величину наилучшего q -выпуклого приближения многочленами.

Пусть W_∞^r – класс функций, имеющих абсолютно непрерывную $(r - 1)$ -ю производную на $[-1, 1]$, таких, что $\|f^{(r)}\|_{L_\infty} < \infty$. Для $f \in W_\infty^r$ хорошо известно следующее неравенство:

$$E_n(f) \leq c(r) \frac{\|f^{(r)}\|_{L_\infty}}{n^r}, \quad n \geq r - 1. \quad (1)$$

Здесь и далее, $n, r \in \mathbb{N}$ и через $c(\cdot)$ обозначены положительные постоянные, зависящие только от параметров, указанных в скобках.

Возникает естественный вопрос, верен ли аналог оценки (1) для q -выпуклого приближения, а именно, верна ли для $f \in W_\infty^r \cap \Delta^q[-1, 1]$ оценка

$$E_n^{(q)}(f) \leq c(r, q) \frac{\|f^{(r)}\|_{L_\infty}}{n^r}, \quad n \geq M. \quad (2)$$

Справедливость (2) с $M = r - 1$ для $r = 1, q = 1$ была установлена Лоренцем и Целлером [2], для $r = 2, q = 1$ – Лоренцем [3], для $r > 2, q = 1$ – Девором [4], для $r = 1, q > 1$ – Битсоном [5], для $r = 2, q > 1$ – Шведовым [6], для $r > 2, q = 2$ – Манией и Шевчуком [7, с. 148]. Позитивный ответ для случая $r = 3, q = 3$ получен первым автором в [8]. Для $q = 3, r \geq 4$ вопрос остается открытым.

При $q \geq 4$ даже неравенство (2) оказывается не верным ни при каком $r > 2$ с $M = M(r)$. Это следует из результатов Коновалова и Левиатана [9] о формосохраняющих поперечниках. Точнее, вместо ожидаемой скорости приближения n^{-r} при $q \geq 4$ получен порядок формосохраняющего поперечника n^{-r+q-3} , т.е. теряется как минимум один порядок аппроксимации.

В настоящей работе доказано, что при $q \geq 4$ и $r > 2$ неравенство (2) не верно даже с $M = M(f)$ и $c = c(f)$. Случай $r < q - 1$ рассмотрен в теореме 2, а случай $r \geq q - 1$ – в теореме 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В формосохраняющем приближении известны результаты о том, что соответствующая оценка не верна с $M = M(r)$, но верна с $M = M(f)$. Например, согласно Шведову [6] для любых $A > 0, n \in \mathbb{N}$ существует $f = f_{A,n} \in \Delta^1[-1, 1]$ такая, что

$$E_n^{(1)}(f) > A\omega_3\left(f, \frac{1}{n}\right),$$

где $\omega_3(f, t)$ – модуль непрерывности порядка 3; с другой стороны, Левиатан и Шевчук [10] доказали неравенство

$$E_n^{(1)}(f) \leq c\omega_3\left(f, \frac{1}{n}\right), \quad n > M(f),$$

в котором c – абсолютная постоянная.

Для доказательства теорем важным оказывается переход от выпуклого приближения функции $|x|$ к 3-выпуклому приближению $\frac{1}{2}x^2 \operatorname{sign} x$, когда удастся доказать существование достаточно “длинного” интервала с соответствующим отклонением; это результат теоремы 1.

ТЕОРЕМА 1. Пусть F — 3-выпуклая на $[-1, 1]$ функция,

$$d := \|F'(x) - x\|_{C[-1/2, 1/2]}.$$

Тогда существует отрезок $I \subset [-1, 1]$ длины $|I| \geq 1/32$ такой, что

$$\left| F(x) - \frac{x^2 \operatorname{sign} x}{2} \right| \geq \min \left\{ \frac{1}{3 \cdot 2^5} d, \frac{1}{2^{10}} d^2 \right\}. \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из теоремы 1 заменой переменных легко получить, что для 3-выпуклой на $[-1, 1]$ функции F при

$$d := \|F'(x) - x_+\|_{C[-1/2, 1/2]},$$

(здесь и далее, $x_+ = \max\{x; 0\}$, $x_- = \min\{x; 0\}$) существует отрезок $I \subset [-1, 1]$, $|I| \geq 1/32$, такой, что при всех $x \in I$

$$\left| F(x) - \frac{x_+^2}{2} \right| \geq \min \left\{ \frac{1}{3 \cdot 2^5} d, \frac{1}{2^{10}} d^2 \right\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q > 3$. Тогда

$$E_n^{(q)}(x_+^{q-1}) \geq \frac{c(q)}{n^2}.$$

ТЕОРЕМА 3. Для любых $r, q \in \mathbb{N}$, $r \geq q-1$, $q \geq 4$, и последовательности $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$, $\alpha_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$, существует функция $f = f_{r,q} \in C^{(r)}[-1, 1] \cap \Delta^q[-1, 1]$ такая, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n E_n^{(q)}(f) n^{r-q+3} = +\infty.$$

Для наглядности объединим известные результаты, а также теоремы 2 и 3 в следующей таблице:

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
5	+	+	?	—	—	$\dots$
4	+	+	?	—	—	$\dots$
3	+	+	+	—	—	$\dots$
2	+	+	+	+	+	$\dots$
1	+	+	+	+	+	$\dots$
	1	2	3	4	5	q

Здесь “+” означает, что (2) верно, причем с $M = r-1$; “—” означает, что (2) не верно даже с $N = N(f)$ и $c = c(f)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Несложной модификацией конструкции f в доказательстве теоремы 3 можно получить тот же результат для приближения кусочно-многочленными функциями с равноудаленными узлами.

Следующее замечание является непосредственным следствием теоремы 3 и классических результатов о приближении без ограничений.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть $q \geq 4, \alpha > 2$. Тогда существует функция $f = f_{\alpha, q} \in \Delta^q[-1, 1]$ такая, что

$$E_n(f) \leq \frac{1}{n^\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

но в то же время для некоторого $\delta > 0$

$$E_n^{(q)}(f) \geq \frac{c(\alpha, \delta, q)}{n^{\alpha-\delta}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Теорема 1 влечет, что для 3-выпуклого приближения в интегральной метрике $L_p[-1, 1], 1 \leq p < \infty$, при $f \in \Delta^3[-1, 1]$ даже оценка

$$E_n^{(3)}(f)_p \leq c\omega_3\left(f, \frac{1}{n}\right)_p$$

не является верной с $c = c(f)$, где $E_n^{(3)}(f)_p$ и $\omega_3(f, 1/n)_p$ – соответствующие аналогичные величины наилучшего приближения и модуля непрерывности в L_p . Для того чтобы показать это, достаточно взять $f(x) = x_+^2, x \in [-1, 1]$.

В п. 2 доказываются вспомогательные леммы, точнее, леммы 1–6 для доказательства теорем 1, 2 и лемма 7 (использующая теорему 2) для доказательства теоремы 3. Сами доказательства теорем содержатся в п. 3. Для сокращения обозначений в формулировках и доказательствах леммы 7 и теоремы 3 константы $c, c_0, c_1, \dots$ зависят от r и q . Теоремы 1, 2 доказаны А. В. Бондаренко, теорема 3 – А. В. Примаком.

2. Вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. Пусть g – выпуклая на $[a, b]$ функция, x^* – точка на $[a, b]$ такая, что $-g(x^*) =: h > 0$. Тогда существует интервал $I \subset [a, b]$ длины не менее чем $(b-a)/8$ такой, что $|g(x)| \geq h/2$ при всех $x \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $x^* \in [(a+b)/2, b]$. Пусть

$$x_1 := \max\{a, \{x : g(x) \geq 0, x \in [a, x^*]\}\},$$

и

$$l(x) := \frac{h}{x_1 - x^*}(x - x^*) - h.$$

Заметим, что $l(x^*) = -h$; кроме того, $l(x_1) = 0, x_1 < x^*$, поэтому l убывает.

Из выпуклости g следует, что

$$g(x) \geq l(x), \quad x \in (a, x_1), \quad (4)$$

$$g(x) \leq l(x), \quad x \in [x_1, x^*]. \quad (5)$$

Докажем, что выполняется хотя бы одно из неравенств

$$l\left(\frac{7a+b}{8}\right) = \frac{h}{x^* - x_1}\left(x^* - \frac{7a+b}{8}\right) - h \geq \frac{h}{2}, \quad (6)$$

$$l\left(x^* - \frac{b-a}{8}\right) = \frac{h}{x^* - x_1}\left(\frac{b-a}{8}\right) - h \leq -\frac{h}{2}. \quad (7)$$

Тогда, учитывая (4) и (5), получим, что один из отрезков $[a, (7a + b)/8]$ или $[x^* - (b - a)/8, x^*]$ является искомым. Предположим, что (7) не выполняется. Тогда

$$\frac{h}{x^* - x_1} > \frac{4h}{b - a}.$$

Из этого неравенства и отрицания к (6) следует, что $x^* < (a + b)/2$; противоречие. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $l(x)$ – линейная функция такая, что для некоторого $x^* \in [-1/2, 1/2]$

$$l(x^*) - |x^*| =: d > 0,$$

$l(-1) \leq 1$ и $l(1) \leq 1$. Тогда

$$\int_{-1/4}^{1/4} (l(x) - |x|)_+ dx \geq \frac{1}{4}d^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий леммы следует существование $x_1, x_2 \in (0, 1]$ таких, что $l(-x_1) = x_1$ и $l(x_2) = x_2$. Тогда

$$l(x) = \frac{(x_2 - x_1)x + 2x_1x_2}{x_1 + x_2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Легко видеть, что

$$\int_0^{\min\{x_2, 1/4\}} (l(x) - x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x_2l(0), & x_2 < \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4}l(0)\left(1 - \frac{1}{8x_2}\right), & x_2 \geq \frac{1}{4}. \end{cases}$$

В любом случае

$$\int_0^{\min\{x_2, 1/4\}} (l(x) - x) dx \geq \frac{1}{8}x_2l(0).$$

Аналогично

$$\int_{\max\{-x_1, -1/4\}}^0 (l(x) + x) dx \geq \frac{1}{8}x_1l(0).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1/4}^{1/4} (l(x) - |x|)_+ dx &= \int_{\max\{-x_1, -1/4\}}^0 (l(x) + x) dx + \int_0^{\min\{x_2, 1/4\}} (l(x) - x) dx \\ &\geq \frac{1}{8}(x_1 + x_2)l(0) \geq \frac{1}{4}(l(0))^2 \geq \frac{1}{4}(l(x^*) - |x^*|)^2 = \frac{1}{4}d^2. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $l(x)$ – линейная функция такая, что для некоторого $x^* \in [-1/2, 1/2]$

$$l(x^*) - |x^*| =: d > 0$$

и выполняется хотя бы одно из условий: $l(-1) > 1$ или $l(1) > 1$. Тогда существует отрезок $I \subset [-1, 1]$, $|I| \geq 1/4$, такой, что при всех $x \in I$

$$l(x) - |x| \geq \frac{d}{6}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $l(1) > 1$; возьмем $I := [1/2, 3/4]$. Тогда $l_1(x) := l(x) - x$ – линейная функция; кроме того, $l_1(1) > 0$. Поскольку $l_1(x^*) \geq d$ и $x^* \geq -1/2$, имеем $l_1(1/2) \geq d/3$ и $l_1(3/4) \geq d/6$, поэтому $l_1(x) > d/6$ при всех $x \in I$. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть функция $G \in C^{(1)}[a, b]$ удовлетворяет условию $|G'(x)| \geq h$ при всех $x \in [a, b]$. Тогда существует отрезок $I \subset [a, b]$, $|I| \geq (b-a)/4$, такой, что при всех $x \in I$

$$|G(x)| \geq \frac{h(b-a)}{4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $G'(x) \geq h$ при всех $x \in [a, b]$. Пусть $G((a+b)/2) \geq 0$. Положим $I := [(a+3b)/4, b]$ (для $G((a+b)/2) < 0$ возьмем $I := [a, (3a+b)/4]$). Для произвольного $x \in I$ имеем

$$\begin{aligned} G(x) &\geq G\left(\frac{a+3b}{4}\right) \geq G\left(\frac{a+3b}{4}\right) - G\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &= \int_{(a+b)/2}^{(a+3b)/4} G'(x) dx \geq \int_{(a+b)/2}^{(a+3b)/4} h dx = \frac{h(b-a)}{4}. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Прямым следствием леммы 4 является лемма 5.

ЛЕММА 5. Пусть $s \in \mathbb{N}$, $G \in C^{(s)}[a, b]$ удовлетворяет условию $|G^{(s)}(x)| \geq h$ при всех $x \in [a, b]$. Тогда существует отрезок $I \subset [a, b]$, $|I| \geq (b-a)/4^s$, такой, что при всех $x \in I$

$$|G(x)| \geq \frac{h(b-a)^s}{2^{s^2+s}}.$$

ЛЕММА 6. Пусть для $G \in C^{(1)}[-1/2, 1/2]$

$$\int_{-1/4}^{1/4} (G'(x))_+ dx \geq A > 0 \quad \text{и} \quad -\int_{-1/2}^{1/2} (G'(x))_- dx \leq \frac{A}{4}.$$

Тогда отрезок $I = [-1/2, -1/4]$ или $I = [1/4, 1/2]$ удовлетворяет следующему условию: оценка $|G(x)| \geq A/4$ выполнена при всех $x \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$A_* := \max_{[-1/2, -1/4]} G(x), \quad A^* := \min_{[1/4, 1/2]} G(x).$$

Тогда из условий леммы имеем

$$A^* - A_* \geq \frac{3}{4}A.$$

Если

$$A^* \geq \frac{1}{4}A,$$

то отрезок $[1/4, 1/2]$ искомым. Если же

$$A^* < \frac{1}{4}A,$$

то

$$A_* \leq A^* - \frac{3}{4}A < -\frac{1}{2}A,$$

и искомым будет отрезок $[-1/2, -1/4]$. Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. Для каждого $h \in (0, 1)$, q, r таких, что $r \geq q - 1$, $q \geq 4$, существуют $c_1, c_2 > 0$ и $f_h = f_{h,r,q} \in C^{(r)}[-2, 1] \cap \Delta^q[-2, 1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

A1) $f_h|_{[-2, 0]} = 0$;

A2) выполнена оценка

$$\|f_h^{(i)}\|_{C[-2, 1]} \leq \begin{cases} \frac{c}{h^{i-q+1}}, & i = q - 1, \dots, r, \\ 1, & i = 0, \dots, q - 2; \end{cases}$$

A3) если $h \leq c_2 l^{(q-1)/2}/n$, $l \in (0, 1)$, $\theta \in (0, l/3)$, то

$$E_n^{(q)}(f_h(x - \theta); [-l, l]) \geq \frac{c_1 l^{q-1}}{n^2},$$

где $E_n^{(q)}(f_h(x - \theta); [-l, l])$ – величина наилучшего q -выпуклого приближения функции $f_h(x - \theta)$ многочленами степени $\leq n$ на отрезке $[-l, l]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства возьмем $m := r - q + 1 \geq 0$. Положим

$$f_h(x) := \int_{-2}^x \int_{-2}^{x_1} \cdots \int_{-2}^{x_{q-2}} s(x_{q-1}) dx_{q-1} \cdots dx_1,$$

где s определена как

$$s(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-2, 0], \\ \frac{\int_0^x u^m (h - u)^m du}{\int_0^h u^m (h - u)^m du}, & x \in [0, h], \\ 1, & x \in [h, 1]. \end{cases}$$

Легко видеть, что $s \in C^{(m)}[-2, 1] \cap \Delta^1[-2, 1]$, поэтому $f_h \in C^{(r)}[-2, 1] \cap \Delta^q[-2, 1]$. Также ясно, что

$$f_h^{(q-1-j)}(x) \leq \frac{1}{j!} x^j \leq 1, \quad x \in [0, 1], \quad j = 0, \dots, q-1.$$

Из неравенства Маркова для многочленов следует

$$\|s^{(i)}\|_{C[-2,1]} \leq c(i) \frac{1}{h^i}, \quad i = 0, \dots, m,$$

что влечет А2). Положим

$$\lambda := h - \int_0^h s(u) du,$$

при этом $\lambda \in (0, h)$ и

$$f_h^{(q-2)}(x) = (x - \lambda)_+, \quad x \in [-2, 0] \cup [h, 1].$$

Следовательно, так как $0 \leq f_h^{(q-1)}(x) \leq 1$, $x \in [-2, 1]$, то

$$\left\| f_h^{(q-3)}(x) - \frac{1}{2}(x - \lambda)_+^2 \right\|_{C[-2,1]} \leq h^2.$$

Последовательно интегрируя, получим

$$\left\| f_h(x) - \frac{1}{(q-1)!}(x - \lambda)_+^{q-1} \right\|_{C[-2,1]} \leq h^2,$$

что с учетом положительности θ влечет

$$\left\| f_h(x - \theta) - \frac{1}{(q-1)!}(x - \theta - \lambda)_+^{q-1} \right\|_{C[-1,1]} \leq h^2. \quad (8)$$

Из теоремы 2 следует оценка

$$E_n^{(q)} \left(\frac{1}{(q-1)!}(x - \theta - \lambda)_+^{q-1}; [-1, 1] \right) \geq \frac{c_3}{n^2},$$

которая после переноса на $[-l, l]$ примет вид

$$E_n^{(q)} \left(\frac{1}{(q-1)!}(x - \theta - \lambda)_+^{q-1}; [-l, l] \right) \geq \frac{c_0 l^{q-1}}{n^2}. \quad (9)$$

Причем в последнем неравенстве были использованы оценки $\lambda \leq l/3$ и $\theta \leq l/3$, которые следуют из определения λ и условия А3) при $c_2 \leq 1/3$.

Если $c_2 \leq \sqrt{c_0/2}$ и $h \leq c_2 l^{(q-1)/2}/n$, то

$$\frac{c_0 l^{q-1}}{2n^2} \geq h^2.$$

Отсюда, из (8) и (9) получим

$$\begin{aligned} E_n^{(q)}(f_h(x - \theta); [-l, l]) &\geq E_n^{(q)} \left(\frac{1}{(q-1)!}(x - \theta - \lambda)_+^{q-1}; [-l, l] \right) \\ &\quad - \left\| f_h(x - \theta) - \frac{1}{(q-1)!}(x - \theta - \lambda)_+^{q-1} \right\|_{C[-1,1]} \\ &\geq \frac{c_0 l^{q-1}}{n^2} - h^2 \geq \frac{c_0 l^{q-1}}{2n^2}, \end{aligned}$$

итак, А3) выполнено с $c_1 := c_0/2$ и $c_2 := \min\{1/3; \sqrt{c_0/2}\}$. Лемма доказана.

3. Доказательства теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Положим

$$f(x) := F'(x), \quad h_1 := - \min_{[-1/2, 1/2]} (f(x) - |x|).$$

Точка, где этот минимум достигается, принадлежит $[-1, 0]$ или $[0, 1]$. Если $h_1 > 0$, то для этого отрезка и функции $g(x) = f(x) - |x|$ применим лемму 1. К полученному отрезку I такому, что $|I| \geq 1/8$ и при всех $x \in I$ $|g(x)| \geq h_1/2$, применим лемму 4, где

$$G(x) := F(x) - \frac{x^2 \operatorname{sign} x}{2}.$$

Получим, что существует отрезок длины не менее чем $1/32$, для каждой точки x которого выполняется неравенство

$$\left| F(x) - \frac{x^2 \operatorname{sign} x}{2} \right| \geq \frac{h_1}{2^6}.$$

Поэтому можно считать, что

$$h_1 \leq \frac{1}{2^4} d^2$$

(иначе выполняется (3)). Таким образом, при всех $x \in [-1/2, 1/2]$

$$f(x) \geq |x| - \frac{1}{2^4} d^2, \quad (10)$$

поэтому

$$- \int_{-1/2}^{1/2} (f(x) - |x|) dx \leq \frac{1}{2^4} d^2. \quad (11)$$

По условию существует $x^* \in [-1/2, 1/2]$ такая, что $|f(x^*) - |x^*|| = d$; кроме того, из (10) следует, что $f(x^*) - |x^*| = d$. Если $d = 0$, то (3) очевидно. Пусть $d > 0$. Поскольку f выпукла, то существует линейная функция l такая, что $l(x^*) = f(x^*)$ и при всех $x \in [-1, 1]$ $l(x) \leq f(x)$. Если $l(-1) > 1$ или $l(1) > 1$, то применим лемму 3 для функции $l(x)$. Для полученного отрезка и функции

$$G(x) = F(x) - \frac{x^2 \operatorname{sign} x}{2}$$

применим лемму 4, в результате получим отрезок $I \subset [-1, 1]$, $|I| \geq 1/16$, такой, что при всех $x \in I$

$$\left| F(x) - \frac{x^2 \operatorname{sign} x}{2} \right| \geq \frac{1}{3 \cdot 2^5} d,$$

что и нужно было доказать. Имеем $l(-1) \leq 1$ и $l(1) \leq 1$. Из леммы 2 следует, что

$$\int_{-1/4}^{1/4} (f(x) - |x|)_+ dx \geq \frac{1}{4} d^2 =: A.$$

Теперь, учитывая (11), применим лемму 6 для функции

$$G(x) = F(x) - \frac{x^2 \operatorname{sign} x}{2};$$

как результат, получим отрезок I , $|I| \geq 1/4$, такой, что при всех $x \in I$

$$|G(x)| \geq \frac{1}{2^4} d^2.$$

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $Q \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^q$. Тогда несложным применением неравенства Бернштейна для алгебраических многочленов можно получить, что

$$\|(q-1)!^{-1}Q^{(q-2)}(x) - x_+\|_{C[-1/2, 1/2]} > \frac{1}{2^{10}n};$$

кроме того, как легко заметить, функция $(q-1)!^{-1}Q^{(q-2)}$ выпукла. Поэтому, замечание 2 обеспечивает существование отрезка $I \subset [-1, 1]$, $|I| \geq 1/32$, такого, что

$$\left| (q-1)!^{-1}Q^{(q-3)}(x) - \frac{x_+^2}{2} \right| \geq \frac{1}{2^{30}n^2}.$$

Применим лемму 5 при $s = q - 3$ для функции

$$G(x) = \frac{Q(x)}{(q-1)!} - \frac{x_+^{(q-1)}}{(q-1)!}.$$

Получим

$$\|G\|_{[-1, 1]} \geq \frac{1}{2^{30}n^2} \cdot \frac{1}{32^{q-3}} \cdot \frac{1}{2^{(q-3)^2+q-3}}.$$

Отсюда

$$\|Q(x) - x_+^{q-1}\|_{C[-1, 1]} \geq \frac{(q-1)!}{2^{q^2+21}} \cdot \frac{1}{n^2} =: \frac{c(q)}{n^2}.$$

Поскольку многочлен Q был произвольным, получим

$$E_n^{(q)}(x_+^{q-1}) \geq \frac{c(q)}{n^2}.$$

Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Для удобства обозначим $m := r - q + 1 \geq 0$. Легко видеть, что можно выбрать строго возрастающую последовательность $\{n_k\}_{n=1}^\infty$ натуральных чисел такую, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} \frac{1}{n_{k-1}^{(m+1)(q-1)+2}} = +\infty, \quad (12)$$

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{n_k^m n_{k-1}^{m(q-1)+2}} \leq 2 \frac{1}{n_{s+1}^m n_s^{m(q-1)+2}}, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

$$\frac{c_1}{n_s^{m+2} n_{s-1}^{(m+1)(q-1)+2}} \geq 4 \frac{1}{n_{s+1}^m n_s^{m(q-1)+2}}, \quad s \geq 2, \quad (14)$$

$$n_{s+1} > 3n_s, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Возьмем достаточно быстро растущую последовательность $\{n_k\}$. Определим искомую функцию f :

$$f(x) := \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k f_{h_k}(x - x_k),$$

где f_{h_k} – функции из леммы 7,

$$h_k := \frac{1}{c_2 n_k n_{k-1}^{q-1}}, \quad \beta_k := \frac{1}{n_{k+1}^m n_k^{m(q-1)+2}}, \quad x_k := \frac{1}{n_k}.$$

Заметим, что при этом (13) и (14) примут вид

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} \beta_k \leq 2\beta_{s+1}, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (16)$$

$$\frac{c_1 \beta_s x_s^{q-1}}{n_s^2} \geq 4\beta_{s+1}, \quad s \geq 2. \quad (17)$$

Покажем, что f определена корректно и $f \in C^{(r)}[-1, 1]$. Для $j = 0, \dots, r$, учитывая А2), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k \|f_{h_k}^{(j)}\|_{C[-2,1]} &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_k^m n_{k-1}^{m(q-1)+2}} \max\{1; c(c_2^{-1} n_k n_{k-1}^{q-1})^{j-q+1}\} \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_k^m n_{k-1}^{m(q-1)+2}} c(c_2^{-1} n_k n_{k-1}^{q-1})^m \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c}{n_{k-1}^2 c_2^m} < \frac{c}{c_2^m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty. \end{aligned}$$

Для каждого $k \geq 2$

$$\beta_k f_{h_k}(x - x_k) \in \Delta^q[-1, 1],$$

следовательно, $f \in \Delta^q[-1, 1]$ как равномерный предел q -выпуклых функций. Теперь будем оценивать $E_{n_s}^{(q)}(f; [-1, 1])$ снизу, $s \geq 2$. Заметим, что ввиду А1) и определения f

$$f(x) = \sum_{k=s}^{\infty} \beta_k f_{h_k}(x - x_k), \quad x \in [-1, x_{s-1}]. \quad (18)$$

Учитывая А2) и (16), находим

$$\left\| \sum_{k=s+1}^{\infty} \beta_k f_{h_k}(x - x_k) \right\|_{C[-1,1]} \leq \sum_{k=s+1}^{\infty} \beta_k \|f_{h_k}\|_{C[-2,1]} \leq \sum_{k=s+1}^{\infty} \beta_k \leq 2\beta_{s+1}. \quad (19)$$

Положим $l := x_{s-1}$, $\theta := x_s$. При этом $h_s \leq c_2 l^{(q-1)/2} / n_s$ и благодаря (15) имеем $\theta \in (0, l/3)$. Теперь используя (17)–(19) и А3), получаем

$$\begin{aligned} E_{n_s}^{(q)}(f; [-1, 1]) &\geq E_{n_s}^{(q)}(f; [-l, l]) \\ &\geq E_{n_s}^{(q)}(\beta_s f_{h_s}(x - x_s); [-l, l]) - \left\| \sum_{k=s+1}^{\infty} \beta_k f_{h_k}(x - x_k) \right\|_{C[-l,l]} \\ &\geq \beta_s \frac{c_1 l^{q-1}}{n_s^2} - 2\beta_{s+1} \geq \beta_s \frac{c_1 l^{q-1}}{2n_s^2} = \frac{c_1}{2n_s^{m+2} n_{s-1}^{(m+1)(q-1)+2}}. \end{aligned}$$

Теперь

$$\alpha_{n_s} E_{n_s}^{(q)}(f; [-1, 1]) n_s^{m+2} \geq \frac{c_1 \alpha_{n_s}}{2 n_{s-1}^{(m+1)(q-1)+2}},$$

и благодаря (12)

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n E_n^{(q)}(f) n^{r-q+3} = +\infty.$$

Теорема 3 доказана.

Авторы признательны профессору И. А. Шевчуку за внимание к этой работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Roberts A. W., Varbeg D. E. Convex Functions. New York: Academic Press, 1973.
- [2] Lorentz G. G., Zeller K. L. Degree of approximation by monotone polynomials // J. Approximation Theory. 1968. V. 1. № 4. P. 501–504.
- [3] Lorentz G. G. Monotone approximation // Inequalities, III / ed. O. Shisha. New York: Academic Press, 1972. P. 201–215.
- [4] DeVore R. A. Degree of approximation // Approximation Theory, II / ed. G. G. Lorentz, C. K. Chui, L. Schumaker. New York: Academic Press, 1976. P. 117–162.
- [5] Beatson R. K. The degree of monotone approximation // Pacific J. Math. 1978. V. 74. № 1. P. 5–14.
- [6] Шведов А. С. Порядки копориближений функций алгебраическими многочленами // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 1. С. 117–130.
- [7] Шевчук И. А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев: Наукова думка, 1992.
- [8] Bondarenko A. V. Jackson type inequality in 3-convex approximation // East J. Approx. 2002. V. 8. № 3. P. 291–302.
- [9] Konovalov V. N., Leviatan D. Shape-preserving widths of Sobolev-type classes of s -monotone functions on a finite interval // Israel J. Math. 2003. V. 133. P. 239–268.
- [10] Leviatan D., Shevchuk I. A. Monotone approximation estimates involving the third modulus of smoothness // Approximation Theory IX. Nashville, TN: Vanderbilt University Press, 1998. P. 223–230.

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Украина
E-mail: bonda@univ.kiev.ua, prymak@univ.kiev.ua

Поступило
08.05.2003