Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Ровба, Сумматорные рациональные операторы типа Джексона, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 2, 270–277

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1500>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:20:04

УДК 517.54

СУММАТОРНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТИПА ДЖЕКСОНА

Е. А. Ровба

Построены сумматорные рациональные положительные операторы типа Джексона $D_{4n-n}(x; f)$ на вещественной оси. Получена оценка приближений посредством таких операторов непрерывных на $\mathbb{R}$ функций f , имеющих конечные и равные между собой $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Библиография: 4 названия.

В настоящей заметке продолжены начатые в [1] исследования, посвященные построению положительных интерполяционных рациональных операторов.

Построены сумматорные операторы типа Джексона на вещественной оси и получена оценка скорости приближения функций $f \in C_\infty$. В полиномиальном случае такие операторы изучены достаточно полно (см., например, [2]). Интегральные рациональные операторы типа Джексона исследованы В. Н. Русаком [3].

Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – последовательность комплексных чисел $z_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $z_0 = i$. Рассмотрим синус-дробь Бернштейна $\sin \mu_n(x)$, где

$$\mu_n(x) = \arg(z_0 - x) + 2 \sum_{k=1}^n \arg(z_k - x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Функция $\sin \mu_n(x)$ имеет $2n + 1$ нулей на вещественной оси. Обозначим их через x_k , $k = \overline{1, 2n+1}$, $\mu_n(x_k) = k\pi$, $k = \overline{1, 2n+1}$, $-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n} < x_{2n+1} = \infty$.

Пусть задана функция $f \in C_\infty$, т.е. непрерывная на $\mathbb{R}$, и существуют конечные и равные между собой пределы

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Введем функцию

$$D_{4n-4}(x; f) = \frac{1}{g_n(x)} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{f(x_k)}{\mu'_n(x_k)} G_n(x; x_k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где

$$G_n(x; x_k) = \frac{(1 + x_k^2) \{\sin(\Phi_n(x) - \Phi_n(x_k))\}^4}{(x - x_k)^4}, \quad k = \overline{1, 2n},$$

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^n \arg(z_k - x), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\frac{G_n(x; x_{2n+1})}{\mu'_n(x_{2n+1})} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G_n(x; t)}{\mu'_n(t)} = \frac{\sin^4 \Phi_n(x)}{1 + 2 \sum_{k=1}^n \beta_k}.$$

Функцию $g_n(x)$ определим из условия, что $D_{4n-4}(x; 1) \equiv 1$, т.е.

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{G_n(x; x_k)}{\mu'_n(x_k)}. \quad (2)$$

Из [4, с. 115] известно, что

$$\sin(\Phi_n(x) - \Phi_n(t)) = \frac{1}{2i} \frac{\prod_{k=1}^n (z_k - x)(\bar{z}_k - t) - \prod_{k=1}^n (\bar{z}_k - x)(z_k - t)}{\prod_{k=1}^n |z_k - x| |z_k - t|}. \quad (3)$$

Тогда из (1) и (2) следует, что $D_{4n-4}(x; f)$ является рациональной функцией порядка не выше $4n - 4$.

ЛЕММА 1. *Справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(\Phi_n(x) - \Phi_n(x_k))}{\mu'_n(x_k)(x - x_k)^2} = \Phi'_n(x), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{2}{3}(1 + x^2) \left[(\Phi'_n(x))^3 - \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k^3}{((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^3} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \beta_k \frac{1 + \alpha_k^2 + \beta_k^2}{((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение

$$K_n(x; t) = \frac{\sin^2(\Phi_n(x) - \Phi_n(t))}{(x - t)^2}. \quad (6)$$

Покажем вначале, что

$$\sum_{k=1}^n \frac{K_n(x; x_k)}{\mu'_n(x_k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t) dt, \quad (7)$$

где Γ – произвольный замкнутый кусочно-гладкий непрерывный контур, содержащий внутри себя точки z_k и $\bar{z}_k$, $k = \overline{0, n}$, и не содержащий внутри себя точек x_k , $k = \overline{1, 2n+1}$.

Рассмотрим вначале подынтегральную функцию $K_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t)$ переменной t . Если учесть равенство (3), то нетрудно заметить, что во внешности контура Γ данная функция будет иметь простые полюсы в точках x_k , $k = \overline{1, 2n+1}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t) dt = \sum_{k=1}^{2n+1} \operatorname{res}_{t=x_k} K_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t).$$

Если $k = \overline{1, 2n}$, то

$$\operatorname{res}_{t=x_k} K_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t) = K_n(x; x_k) \frac{\cos \mu_n(x_k)}{\cos \mu_n(x_k) \mu'_n(x_k)} = (\mu'_n(x_k))^{-1} K_n(x; x_k).$$

Если же $k = 2n+1$, то нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{t=x_{2n+1}} K_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} K_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t) \cdot t \\ &= \sin^2 \Phi_n(x) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{(x-t)^2} \frac{\sin \mu_n(t)}{\cos \mu_n(t)} = \frac{\sin^2 \Phi_n(x)}{1 + 2 \sum_{k=1}^n \beta_k}. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (7) справедливо.

Покажем теперь, что $J_n = L_n$, $n \in \mathbb{N}$, где

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t) dt \quad (\text{интеграл из (7)}), \\ L_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(x; t) dt. \end{aligned} \tag{8}$$

Действительно, учитывая равенства (6) и (3), нетрудно получить, что

$$K(x; t) = \frac{-1}{4(x-t)^2} \left(\frac{a_n(x)b_n(t)}{a_n(t)b_n(x)} - 2 + \frac{a_n(t)b_n(x)}{a_n(x)b_n(t)} \right),$$

где

$$a_n(u) = \prod_{j=1}^n (z_j - u), \quad b_n(u) = \prod_{j=1}^n (\bar{z}_j - u), \tag{9}$$

$$\operatorname{ctg} \mu_n(t) = i \frac{(z_0 - t)a_n^2(t) + (\bar{z}_0 - t)b_n^2(t)}{(z_0 - t)a_n^2(t) - (\bar{z}_0 - t)b_n^2(t)}. \tag{10}$$

Следовательно, подынтегральная функция интеграла J_n имеет внутри Γ простые полюсы в точках $t = z_k$ и $t = \bar{z}_k$, $k = \overline{1, n}$. Значит,

$$J_n = - \sum_{k=1}^n \left(\operatorname{res}_{t=z_k} K_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t) + \operatorname{res}_{t=\bar{z}_k} K_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t) \right)$$

и

$$\operatorname{res}_{t=z} K_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t) = \lim_{t \rightarrow z} K_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t)(t - z), \quad z = z_k, \quad z = \bar{z}_k.$$

Легко убедиться, что $\mu_n(z_k) = -i$, $\mu_n(\bar{z}_k) = i$, $k = \overline{1, n}$ (см. (10)).

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{t=z_k} K_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t) &= -i \operatorname{res}_{t=z_k} K_n(x; t), \\ \operatorname{res}_{t=\bar{z}_k} K_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t) &= i \operatorname{res}_{t=\bar{z}_k} K_n(x; t), \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

и

$$J_n = i \sum_{k=1}^n \left(\operatorname{res}_{t=z_k} K_n(x; t) - \operatorname{res}_{t=\bar{z}_k} K_n(x; t) \right).$$

Выражение справа в этом равенстве есть не что иное, как интеграл L_n (см. (8)), представленный через вычеты относительно особых точек, лежащих как в верхней, так и в нижней полуплоскостях. Таким образом, действительно, $J_n = L_n$, $n \in \mathbb{N}$. Но интеграл L_n вычислен в [4, с. 115]:

$$L_n = \Phi'_n(x), \quad \Phi'_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{(\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2}.$$

Следовательно, равенство (4) имеет место.

Справедливость соотношения (5) устанавливается по такой же схеме. Вначале установим, что $g_n(x) = J_n^*$ (см. (2)), где

$$J_n^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} G_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t) dt,$$

Γ – тот же контур, что и в интеграле (7). Затем докажем, что $J_n^* = L_n^*$, где

$$L_n^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(x; t) dt. \quad (11)$$

Останется воспользоваться леммой из [4, с. 40] о вычислении интеграла L_n^* , где показывается, что L_n^* равен выражению, стоящему справа в соотношении (5).

Равенство интегралов J_n^* и L_n^* устанавливается аналогично приведенному выше доказательству соотношения $J_n = L_n$.

Обозначив через $\varkappa_n(t) = a_n(t)/b_n(t)$ (см. (9)), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{G_n(x; t)}{1+t^2} &= \frac{1}{16} \varkappa_n^2(x) \varkappa_n^{-2}(t) - \frac{1}{4} \varkappa_n(x) \varkappa_n^{-1}(t) \\ &\quad + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \varkappa_n^{-1}(x) \varkappa_n(t) + \frac{1}{16} \varkappa_n^{-2}(x) \varkappa_n^2(t). \end{aligned}$$

Функция $G_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t)$ вне Γ имеет простые полюсы в точках x_k , $k = \overline{1, 2n+1}$, и внутри Γ – полюсы второго порядка в точках z_k , $\bar{z}_k$, $k = \overline{1, n}$.

Следовательно,

$$J_n^* = \sum_{k=1}^{2n+1} \operatorname{res}_{t=x_k} G_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{G_n(x; t)}{\mu'_n(x_k)} = g_n(x).$$

Итак, $g_n(x) = J_n^*$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 J_n^* &= - \sum_{k=1}^{2n+1} \left(\operatorname{res}_{t=z_k} G_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t) + \operatorname{res}_{t=\bar{z}_k} G_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t) \right), \\
 \operatorname{res}_{t=z_k, \bar{z}_k} G_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t) &= \lim_{t \rightarrow z_k, \bar{z}_k} \frac{\partial}{\partial t} (G_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t) (t - z_k)^2) \\
 &= \lim_{t \rightarrow z_k, \bar{z}_k} \left[\frac{\partial}{\partial t} (G_n(x; t) (t - z_k)^2) \operatorname{ctg} \mu_n(t) \right. \\
 &\quad \left. + G_n(x; t) (t - z_k)^2 \frac{d}{dt} \operatorname{ctg} \mu_n(t) \right].
 \end{aligned} \tag{12}$$

Нетрудно вычислить, что (см. (10))

$$\frac{d}{dt} \operatorname{ctg} \mu_n(t) |_{t=z_k, \bar{z}_k} = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{res}_{t=z_k} (G_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t)) &= -i \operatorname{res}_{t=z_k} G_n(x; t), \\
 \operatorname{res}_{t=\bar{z}_k} (G_n(x; t) \operatorname{ctg} \mu_n(t)) &= i \operatorname{res}_{t=\bar{z}_k} G_n(x; t).
 \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (12), получим

$$J_n^* = i \sum_{k=1}^{2n+1} \left(\operatorname{res}_{t=z_k} G_n(x; t) - \operatorname{res}_{t=\bar{z}_k} G_n(x; t) \right).$$

А это есть не что иное, как интеграл L_n^* (см. (11)). Учитывая вышесказанное, доказательство леммы 1 завершено.

ЛЕММА 2 [4, с. 135]. *Справедлива оценка*

$$g_n(x) > \frac{1+x^2}{2} (\Phi'_n(x))^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ТЕОРЕМА. Если $f \in C_\infty$, то имеет место неравенство

$$|f(x) - D_{4n-4}(x; f)| \leq 2\omega \left(\frac{\sqrt{2}}{(1+x^2)\Phi'_n(x)} \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $F(t) = f(\operatorname{tg}(t/2))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходя из соотношения (1) и (2), имеем

$$f(x) - D_{4n-4}(x; f) = \frac{1}{g_n(x)} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{f(x) - f(x_k)}{\mu'_n(x_k)} G_n(x; x_k). \quad (13)$$

Пусть $x = \operatorname{tg}(t/2)$, $x_k = \operatorname{tg} t_k/2$, $k = \overline{1, 2n+1}$ ($t_{2n+1} = \pi$).

Полагаем также $\delta_n(x) = \sqrt{2}((1+x^2)\Phi'_n(x))^{-1}$ (см. (1)). Фиксируем произвольное $x \in \mathbb{R}$ и обозначим через

$$\begin{aligned} \Omega_t &= \{k : k = \overline{1, 2n+1}, |t - t_k| < \delta_n(x), |t - t_k \pm 2\pi| < \delta_n(x)\}, \\ C\Omega_t &= \{1, 2, \dots, 2n+1\} \setminus \Omega_t. \end{aligned}$$

Если $\delta_n(x) \geq 2\pi$, то множество $C\Omega_t$ является пустым. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что $\delta_n(x) < 2\pi$ и множество $C\Omega_t$ не является пустым.

Тогда, исходя из равенства (13), будем иметь

$$\begin{aligned} |f(x) - D_{4n-4}(x; f)| &\leq \frac{1}{g_n(x)} \sum_{k \in \Omega_t} \frac{|F(t) - F(t_k)|}{\mu'_n(x_k)} G_n(x; x_k) \\ &\quad + \frac{1}{g_n(x)} \sum_{k \in C\Omega_t} \frac{|F(t) - F(t_k)|}{\mu'_n(x_k)} G_n(x; x_k). \end{aligned} \quad (14)$$

Очевидно, что

$$|F(t) - F(t_k)| \leq \omega(\delta_n(x)), \quad k \in \Omega_t.$$

Если же $k \in C\Omega_t$, то нетрудно показать, что

$$|F(t) - F(t_k)| \leq \omega(\gamma(t, t_k)),$$

где

$$\gamma(t, t_k) = \begin{cases} |t - t_k|, & \text{если } |t - t_k| \leq \pi, \\ 2\pi - |t - t_k|, & \text{если } \pi < |t - t_k| < 2\pi. \end{cases} \quad (15)$$

Подставляя эти оценки в (14), получим

$$\begin{aligned} |f(x) - D_{4n-4}(x; f)| &\leq \frac{\omega(\delta_n(x))}{g_n(x)} \sum_{k \in \Omega_t} \frac{G_n(x; x_k)}{\mu'_n(x_k)} + \frac{1}{g_n(x)} \sum_{k \in C\Omega_t} \frac{\omega(\gamma(t, t_k))}{\mu'_n(x_k)} G_n(x; x_k) \\ &= \omega(\delta_n(x)) s_1(x) + s_2(x), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} s_1(x) &= \frac{1}{g_n(x)} \sum_{k \in \Omega_t} \frac{G_n(x; x_k)}{\mu'_n(x_k)}, \\ s_2(x) &= \frac{1}{g_n(x)} \sum_{k \in C\Omega_t} \frac{\omega(\gamma(t, t_k))}{\mu'_n(x_k)} G_n(x; x_k). \end{aligned}$$

Оценим вначале сумму $s_2(x)$. Воспользовавшись неравенством

$$\omega(\gamma(t, t_k)) \leq (\gamma(t, t_k)\delta_n^{-1}(x) + 1)\omega(\delta_n(x)),$$

получим

$$s_2(x) \leq \frac{\delta_n^{-1}(x)}{g_n(x)} \sum_{k \in C\Omega_t} \frac{\gamma(t, t_k)}{\mu'_n(x_k)} G_n(x; x_k) \omega(\delta_n(x)) + \frac{1}{g_n(x)} \sum_{k \in C\Omega_t} \frac{G_n(x; x_k)}{\mu'_n(x_k)} \omega(\delta_n(x)). \quad (17)$$

Учитывая равенство (2), имеем

$$s_1(x) + \frac{1}{g_n(x)} \sum_{k \in C\Omega_t} \frac{G_n(x; x_k)}{\mu'_n(x_k)} = I. \quad (18)$$

Остается оценить первое слагаемое в правой части неравенства (17). Пусть

$$s_2^{(1)}(x) = \frac{\delta_n^{-1}(x)}{g_n(x)} \sum_{k \in C\Omega_t} \frac{\gamma(t, t_k)}{\mu'_n(x_k)} G_n(x; x_k). \quad (19)$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\zeta(x; x_k) = \gamma(t; t_k) \frac{\sqrt{1+x_k^2} \sqrt{1+x^2}}{|x-x_k|}, \quad k \in C\Omega_t.$$

Учитывая, что $x = \operatorname{tg}(t/2)$, $x_k = \operatorname{tg}(t_k/2)$, и воспользовавшись неравенством $\sin u \geq u$, $u \in [0; \pi/2]$, получим (см. также (15))

$$\zeta(x; x_k) = \frac{\gamma(t; t_k)}{\sin(|t-t_k|/2)} \leq \pi, \quad k \in C\Omega_t.$$

Исходя из этого неравенства, найдем следующую оценку суммы (19):

$$s_2^{(1)}(x) \leq \frac{\delta_n^{-1}(x)}{\sqrt{1+x^2} g_n(x)} \sum_{k \in C\Omega_t} \frac{\sqrt{1+x_k^2}}{\mu'_n(x_k)} \left| \frac{\sin(\Phi_n(x) - \Phi_n(x_k))}{x-x_k} \right|^3.$$

Теперь применим неравенство Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} s_2^{(1)}(x) &\leq \frac{\delta_n^{-1}(x)}{\sqrt{1+x^2} g_n(x)} \sum_{k \in C\Omega_t} \frac{1}{\sqrt{\mu'_n(x_k)}} \left| \frac{\sin(\Phi_n(x) - \Phi_n(x_k))}{x-x_k} \right| \frac{\sqrt{1+x_k^2} K_n(x; x_k)}{\sqrt{\mu'_n(x_k)}} \\ &\leq \frac{\delta_n^{-1}(x)}{\sqrt{1+x^2} g_n(x)} \left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{K_n(x; x_k)}{\mu'_n(x_k)} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{G_n(x; x_k)}{\mu'_n(x_k)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Остается воспользоваться соотношениями (2) и (4)

$$\begin{aligned} s_2^{(1)}(x) &\leq \frac{\delta_n^{-1}(x)}{\sqrt{1+x^2}g_n(x)} ((1+x^2)\Phi'_n(x))^{1/2} (g_n(x))^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{\Phi_n(x)}}{\delta_n(x)\sqrt{g_n(x)}} = \left(\frac{(1+x_k^2)(\Phi'_n(x))^3}{2g_n(x)} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

и применить лемму 2, чтобы получить неравенство

$$s_2^{(1)}(x) \leq I. \quad (20)$$

В совокупности соотношения (16)–(18) и (20) позволяют заключить:

$$|f(x) - D_{4n-4}(x; f)| \leq 2\omega(\delta_n(x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

что и завершает доказательство теоремы.

Гродненский государственный университет
им. Я. Купалы

Поступило
01.06.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ровба Е. А. Интерполяционные рациональные операторы типа Фейера и Валле-Пуссена // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 2. С. 114–121.
- [2] Бугаец В. П., Мартынюк В. Т. Точная константа приближения непрерывных функций сумматорными операторами типа Джексона // Укр. матем. ж. 1977. Т. 29. № 6. С. 791–796.
- [3] Русак В. Н. О порядке приближения положительными рациональными операторами // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. 1975. № 3. С. 39–46.
- [4] Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: Изд-во БГУ, 1979.