Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Темиргалиев, Об эффективности алгоритмов численного интегрирования, связанных с теорией дивизоров в круговых полях, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 2, 297–301

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1502>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:11:12

УДК 519.644

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ, СВЯЗАННЫХ С ТЕОРИЕЙ ДИВИЗОРОВ В КРУГОВЫХ ПОЛЯХ

Н. Темиргалиев

Для классов функций с доминирующей смешанной производной и с ограниченной смешанной разностью в метрике L^q ($1 < q \leq 2$) построены такие квадратурные формулы, чтобы одновременно обеспечивалась простота сетки, эффективность и близость к оптимальному алгоритму построения сетки и неувлучшаемость порядка погрешности в степенной шкале. Ранее был изучен случай $q = 2$.

Библиография: 16 названий.

В данной работе получены квадратурные формулы для классов периодических функций s ($s \leq 18$) переменных: $W_{q,s}^r$ — с доминирующей смешанной производной и $H_{q,s}^r$ — с ограниченной смешанной разностью в метрике L^q ($1 < q \leq 2$).

Класс $W_{q,s}^r$ ($r > 0, 1 \leq q \leq \infty$) есть множество всех функций $f(x)$, представимых в виде свертки

$$f(x) = \int_{[0,1]^s} \varphi(x+t) \left[2^s \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^s} \prod_{j=1}^s (2\pi k_j)^{-r} \cos 2\pi \left(k_j t_j - \frac{r}{4} \right) \right] dt,$$

где

$$\|\varphi\|_{L^q(0,1)^s} \leq 1, \quad \mathbb{Z}_+^s \equiv \{(k_1, \dots, k_s) : k_j \in \mathbb{Z}, k_j > 0 (j = 1, \dots, s)\}.$$

Класс $H_{q,s}^r$ ($r > 0, 1 \leq q \leq \infty$) есть множество всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) \in L^q(0,1)$ таких, что для некоторого $l > r$ выполнено соотношение

$$\|\Delta_h^l f(x)\|_{L^q(0,1)^s} \leq \prod_{j=1}^s |h_j|^r,$$

где $h = (h_1, \dots, h_s)$, $\Delta_h^l f(x)$ — смешанная l -я разность с шагом h_j по переменной x_j .

Как обычно, через $c(\cdot)$ будем обозначать положительные величины, зависящие лишь от указанных в скобках параметров, различные, вообще говоря, в разных случаях употребления. Запись $A \ll_{\alpha, \beta, \dots} B$, $B \geq 0$ означает $|A| \leq c(\alpha, \beta, \dots)B$, а $A \ll B \ll A$ эквивалентно $A \asymp B$.

К настоящему времени для классов $W_{q,s}^r$ ($2 \leq q < \infty, r > 0$) и $H_{q,s}^r$ ($1 < q \leq \infty, r > 1$) найдены правильные порядки убывания погрешностей оптимальных квадратурных формул (см., например, [1]–[5]).

Цель работы состоит в построении таких квадратурных формул, чтобы одновременно обеспечивалась простота сетки, эффективность и близость к оптимальному алгоритму построения сетки и неухудшаемость порядка погрешности в степенной шкале.

Искомые сетки определяются равенством $(\{\cdot\} - \text{дробная часть})$

$$\left(\left\{ \frac{n}{p} a_1 \right\}, \dots, \left\{ \frac{n}{p} a_s \right\} \right) \quad (n = 1, \dots, p), \quad (1)$$

где $a_1, \dots, a_s$ — специальным образом выбранные целые числа (оптимальные коэффициенты по модулю p).

Сетки (1) были введены Н. М. Коробовым [6]. Применению этих сеток в различных задачах анализа посвящена литература (см., например, [1]–[14] и содержащуюся в них библиографию).

Тем не менее, в обзоре [12] 1988 года Вань Юань указал: “По-видимому, центральной проблемой в численном интегрировании является нахождение прямых методов для получения оптимальных коэффициентов”.

Эффективный алгоритм для вычисления оптимальных коэффициентов относительно произвольного положительного числа $T \geq c(l)$ за $\ll T \ln \ln T$ элементарных арифметических операций такой, что $p \leq T$, представлен в [14] и заключается в следующем. Ниже используются определения алгебраической теории чисел и обозначения из [14], в частности, $l = s + 1 \leq 19$ — простое число,

$$\theta = \cos \frac{2\pi}{l} + i \sin \frac{2\pi}{l}, \quad \omega_\nu = \theta^{\nu-1} \quad (\nu = 1, \dots, s),$$

$$N(m) = N(m_1, \dots, m_s) = \prod_{k=1}^s (m_1 + \theta^k m_2 + \dots + \theta^{k(s-1)} m_s)$$

— норма главного идеала (m) — положительное число при $m \in \mathbb{Z}^s$, $m \neq 0$.

1. Находится наименьшее простое p , $p \equiv 1 \pmod{l}$ такое, что p не делит произведение $\prod N(m)$, где m пробегает всевозможные $m \in \mathbb{Z}^s$, $m \neq 0$, $\prod_{j=1}^s \max(1; |m_j|) \leq R$, $c(s)R \ln^s R \leq T$.

2. Перебором по целым m_j , $|m_j| \leq cp^{1/s}$ ($j = 1, \dots, s$), находится такое $n = n_1\omega_1 + \dots + n_s\omega_s$, что для главного идеала (n) выполнено $N(n) = p$.

3. Из соотношений ($k = 1, \dots, s$)

$$\gamma_k = n\omega_k = c_{k1} + c_{k2}\theta + \dots + c_{ks}\theta^{s-1}$$

выписывается матрица

$$d' = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{s1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1s} & \dots & c_{ss} \end{pmatrix}.$$

4. Для решетки с базисом $\gamma'_j = \sum_{k=1}^s c_{kj}\omega_k$ ($j = 1, \dots, s$) выписывается базис

$$\gamma''_k = \sum_{j=1}^s v_{kj}\omega_j \quad (k = 1, \dots, s)$$

с целочисленной треугольной матрицей $\{v_{kj}\}_{k,j=1}^s$, затем из равенства $p = |v_{11} \dots v_{ss}|$ находится номер j_0 , что $|v_{j_0 j_0}| = p$.

5. Находятся коэффициенты

$$a_k = (-1)^{k+j_0} M_{j_0 k} \operatorname{sign} \det d' \quad (k = 1, \dots, s),$$

где M_{jk} есть дополнительный минор элемента c_{jk} матрицы d' .

На основе этого алгоритма доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть $l = s + 1 \leq 19$ – простое число, $1 < q \leq 2$, $rq > 1$. Тогда для всякого $T \geq c(l)$ простое p , $p \equiv 1 \pmod{l}$, $p \leq T$, и целые числа $a_1, \dots, a_s$, отыскиваемые согласно алгоритму 1–5 за $\ll T \ln \ln T$ элементарных арифметических операций, таковы, что выполняются следующие неравенства:

$$\sup_{x(t) \in W_{q,s}^r} \left| \int_{[0,1]^s} x(t) dt - \frac{1}{p} \sum_{n=1}^p x\left(\left\{\frac{n}{p}a_1\right\}, \dots, \left\{\frac{n}{p}a_s\right\}\right) \right| \ll \frac{(\ln T)^{sr+(s-1)/q}}{T^r} \quad (2)$$

и

$$\sup_{x(t) \in H_{q,s}^r} \left| \int_{[0,1]^s} x(t) dt - \frac{1}{p} \sum_{n=1}^p x\left(\left\{\frac{n}{p}a_1\right\}, \dots, \left\{\frac{n}{p}a_s\right\}\right) \right| \ll \frac{(\ln T)^{sr+(s-1)}}{T^r}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема при $q=2$ доказана в [14, теоремы 6, 7]. При $1 < q < 2$ дополнительно применяются неравенство Хаусдорфа–Юнга для рядов Фурье [15, с. 172]. Поэтому будем пользоваться обозначениями, леммами и теоремами из [14] (в приведенной там нумерации).

Сначала докажем первое утверждение.

Выберем $R = 2^\theta$ таким, что выполнено равенство $T = c(s)R \ln^s R$. Тогда в силу теорем 3, 2 и 4 применением алгоритма 1–5 за $\leq c(s)T \ln \ln T$ элементарных арифметических операций находят простое $p \leq T$ и целые $a_1, \dots, a_s$ такие, что

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \left| \int_{[0,1]^s} x(t) dt - \frac{1}{p} \sum_{n=1}^p x\left(\left\{\frac{n}{p}a_1\right\}, \dots, \left\{\frac{n}{p}a_s\right\}\right) \right| \\ &\ll \sum_{\tau_1 + \dots + \tau_s \geq \theta} \sum_{m \in \rho(\tau)} |\hat{x}(m)| \chi_{\mathfrak{A}}(m). \end{aligned} \quad (4)$$

Далее, применяя неравенство Гёльдера, неравенство Хаусдорфа–Юнга, а также неравенство (см. [16, с. 93])

$$\left\| \sum_{\tau: \tau_1 + \dots + \tau_s = k} \sum_{m \in \rho(\tau)} \hat{x}(m) e^{2\pi i(m,t)} \right\|_{L^q(0,1)^s} \ll 2^{-kr},$$

справедливое для всякой функции $x(t) \in W_{q,s}^r$ ($1 < q < \infty$), получим

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \sum_{k \geq \theta} \left\| \sum_{\tau_1 + \dots + \tau_s = k} \sum_{m \in \rho(\tau)} \hat{x}(m) e^{2\pi i(m,t)} \right\|_{L^q(0,1)^s} \left(\sum_{\tau_1 + \dots + \tau_s = k} \sum_{m \in \rho(\tau)} \chi_{\mathfrak{A}}(m) \right)^{1/q} \\ &\ll \sum_{k \geq \theta} 2^{-kr} \left(\sum_{\tau_1 + \dots + \tau_s = k} \sum_{m \in \rho(\tau)} \chi_{\mathfrak{A}}(m) \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

И, наконец, в силу леммы 11

$$\Delta \ll R^{-1/q} \sum_{k \geq \theta} 2^{-(r-1/q)k} k^{(s-1)/q} \ll \frac{(\ln R)^{(s-1)/q}}{R^r} \ll \frac{(\ln T)^{sr+(s-1)/q}}{T^r},$$

так что соотношение (2) доказано.

Перейдем к доказательству неравенства (3). Так как для всякого $x(t) \in H_{q,s}^r$ выполнено (см. [16, с. 32])

$$\left\| \sum_{m \in \rho(\tau)} \hat{x}(m) e^{2\pi i(m,t)} \right\|_{L^q(0,1)^s} \ll 2^{-(\tau_1 + \dots + \tau_s)},$$

то, продолжая (4), имеем ($q' = q/(q-1)$)

$$\begin{aligned} \Delta &\ll \sum_{\tau_1 + \dots + \tau_s \geq \theta} \left(\sum_{m \in \rho(\tau)} |\hat{x}(m)|^{q'} \right)^{1/q'} \left(\sum_{m \in \rho(\tau)} \chi_{\mathfrak{A}}(m) \right)^{1/q} \\ &\ll R^{-1/q} \sum_{\tau_1 + \dots + \tau_s \geq \theta} 2^{(\tau_1 + \dots + \tau_s)1/q} \left\| \sum_{m \in \rho(\tau)} \hat{x}(m) e^{2\pi i(m,t)} \right\|_{L^q(0,1)^s} \\ &\ll R^{-1/q} \sum_{\tau_1 + \dots + \tau_s \geq \theta} 2^{-(r-1/q)(\tau_1 + \dots + \tau_s)} \\ &\ll R^{-r} (\ln R)^{s-1} \ll \frac{(\ln T)^{sr+(s-1)}}{T^r}, \end{aligned}$$

т.е. (3) доказано. Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сетка (1) полностью определяется заданием $(s+1)$ -мерного целочисленного вектора $(p, a_1, \dots, a_s)$, по которому легко выписывается за $\asymp p$ элементарных арифметических операций, причем каждая координата каждого узла есть правильная дробь со знаменателем p .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Сетка (1), выписываемая за $\asymp p$ элементарных арифметических операций, согласно алгоритму 1–5 находится за $\leq c(s)p \ln \ln p$ элементарных арифметических операций.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Оценки (2) и (3) точны в степенной шкале (см. [1]–[5] и [7]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как это видно из доказательства теоремы, алгоритм 1–5 не зависит от принадлежности функций тому или иному классу. Другими словами, соответствующая этому алгоритму квадратурная формула автоматически реагирует на гладкость.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Все константы в данной работе являются эффективными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций 33 // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.
- [2] Быковский В. А. О правильном порядке погрешности оптимальных кубатурных формул в пространствах с доминирующей производной и квадратических отклонениях сеток. Препринт № 23. Владивосток: ВЦ ДВНЦ АН СССР, 1985.
- [3] Темляков В. Н. Об одном приеме получения оценок снизу погрешностей квадратурных формул // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 10. С. 1403–1413.
- [4] Бахвалов Н. С. Оценки снизу асимптотических характеристик функций с доминирующей смешанной производной // Матем. заметки. 1972. Т. 12. № 6. С. 655–664.
- [5] Дубинин В. В. Об оптимальных формулах для классов функций с ограниченной смешанной производной // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 7. С. 23–34.
- [6] Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. № 6. С. 1207–1210.
- [7] Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
- [8] Hua Loo Keng, Wang Yuang. Applications of Number Theory of Numerical Analysis. Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer Verlag, 1981.
- [9] Hlawka E., Firneis F., Zinterhof P. Zahlen-theoretische Methoden in der numerischen Mathematik. Wein–München–Oldenbourg, 1981.
- [10] Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение. М.: Наука, 1985.
- [11] Скриганов М. М. О решетках в полях алгебраических чисел // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306. № 3. С. 353–355.
- [12] Wang Yuang. Number theoretic method in numerical analysis // Contemp. Math. 1988. № 77. P. 63–82.
- [13] Воронин С. М., Темиргалиев Н. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 2. С. 34–41.
- [14] Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 4. С. 490–505.
- [15] Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. М.: Мир, 1985.
- [16] Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. Т. 178. М.: Наука, 1986.