Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, О мере линейной и алгебраической независимости значений целых гипергеометрических функций, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 2, 302–304

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1503>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:44:47

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О МЕРЕ ЛИНЕЙНОЙ И АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. В. Зудилин

1. Введение. Пусть t, l – положительные целые числа и

$$\lambda_1, \dots, \lambda_{t+l}; \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\}, \quad \lambda_{t+l} = 0. \quad (1)$$

В настоящей заметке доказываются оценки меры линейной и алгебраической независимости значений обобщенных гипергеометрических функций $f(z), f'(z), \dots, f^{(m-1)}(z)$, $m = t + l$, где

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\beta_1)_{\nu} \cdots (\beta_l)_{\nu}}{(\lambda_1 + 1)_{\nu} \cdots (\lambda_{t+l} + 1)_{\nu}} \left(\frac{z}{t}\right)^{t\nu}, \quad (2)$$
$$(\beta)_0 = 1, \quad (\beta)_{\nu} = \beta(\beta + 1) \cdots (\beta + \nu - 1), \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

в рациональной точке $\alpha \neq 0$.

Эти оценки являются следствием общих теорем работы [1] (там же можно найти историю вопроса) и некоторых новых результатов теории дифференциальных групп Галуа [2].

Под *мерой алгебраической независимости* действительных чисел $\xi_1, \dots, \xi_m$ мы понимаем здесь поведение величины

$$|P(\xi_1, \dots, \xi_m)|, \quad P(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_m], \quad (3)$$

в зависимости от следующих величин: модуля произведения всех ненулевых коэффициентов $\Pi(P)$ многочлена P , высоты (максимума модулей коэффициентов) $H(P)$ и степени $\deg P$ этого многочлена. В случае $\deg P = 1$ характеристику (3) назовем *мерой линейной независимости* чисел $\xi_1, \dots, \xi_m$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00181.

2. Группа Галуа обобщенного гипергеометрического уравнения. Пусть параметры (1) функции (2) удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $\lambda_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$ для всех $i = 1, \dots, t+l, j = 1, \dots, l$;
- 2) не существует общего делителя $d > 1$ чисел t, l такого, что

$$(\lambda_1 + 1/d, \dots, \lambda_{t+l} + 1/d) \sim (\lambda_1, \dots, \lambda_{t+l}),$$

$$(\beta_1 + 1/d, \dots, \beta_l + 1/d) \sim (\beta_1, \dots, \beta_l).$$

(Здесь запись $(\beta'_1, \dots, \beta'_m) \sim (\beta_1, \dots, \beta_m)$ означает, что для некоторой перестановки $\sigma : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$, отличной от тождественной, при всех $j = 1, \dots, m$ выполнено $\beta'_j - \beta_{\sigma(j)} \in \mathbb{Z}$.)

Условие 1) обычно называют условием *линейной неприводимости*, а условие 2) – условием *куммеровской неприводимости*.

Пусть G – группа Галуа линейного однородного дифференциального уравнения

$$\left(\left(z \frac{d}{dz} + t\lambda_1 \right) \cdots \left(z \frac{d}{dz} + t\lambda_{t+l} \right) - z^t \left(z \frac{d}{dz} + t\beta_1 \right) \cdots \left(z \frac{d}{dz} + t\beta_l \right) \right) y = 0, \quad (4)$$

которому удовлетворяет функция (2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $t = 1$ и выполнены условия 1), 2), то $G = \text{GL}_m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если t нечетно и выполнены условия 1), 2), то

$$\text{SL}_m \subset G \subset \mathbb{C}^* \times \text{SL}_m = \text{GL}_m.$$

Случай четного t требует дополнительного условия *квадратичной неприводимости* для того, чтобы группа G содержала SL_m :

- 3) не существует такого вещественного τ , для которого

$$(\lambda_1 + \tau, \dots, \lambda_{t+l} + \tau) \sim (-\lambda_1, \dots, -\lambda_{t+l}),$$

$$(\beta_1 + \tau, \dots, \beta_l + \tau) \sim (-\beta_1, \dots, -\beta_l).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если t четно и выполнены условия 1)–3), то

$$\text{SL}_m \subset G \subset \mathbb{C}^* \times \text{SL}_m = \text{GL}_m.$$

Доказательства предложений 1–3 содержатся в книге [2].

Запишем теперь определение работы [1] для линейного дифференциального уравнения. Пусть $\psi_1(z), \dots, \psi_m(z)$ – фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{(m)} + A_1(z)y^{(m-1)} + \dots + A_{m-1}(z)y' + A_m(z)y = 0, \quad A_j \in \mathbb{C}(z), \quad j = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Будем говорить, что уравнение (5) порядка m лежит в классе $\mathbf{W}^0$, если функции

$$\psi_j^{(l-1)}(z), \quad j, l = 1, \dots, m, \quad (6)$$

однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия 1), 2) в случае нечетного t или условия 1)–3) в случае четного t . Тогда линейное однородное дифференциальное уравнение (4) лежит в классе $\mathbf{W}^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi_1(z), \dots, \psi_m(z)$ – фундаментальная система решений уравнения (4) и G – его группа Галуа. Условие $G = \mathrm{GL}_m$ эквивалентно условию алгебраической независимости функций (6). Если же $G \neq \mathrm{GL}_m$, но $G \supset \mathrm{SL}_m$, то существует ровно одно алгебраическое соотношение между функциями (6). Для обобщенного гипергеометрического уравнения (4) оно известно: вронсиан фундаментальной системы решений является рациональной функцией, иными словами,

$$\det(\psi_j^{(l-1)}(z))_{j,l=1,\dots,m} = A(z) \in \mathbb{C}(z).$$

Эта единственная алгебраическая связь, как легко видеть, не является однородной. Поэтому в случае $\mathrm{SL}_m \subset G \subset \mathrm{GL}_m$ (а это следует из предложений 1–3) уравнение (4) принадлежит классу $\mathbf{W}^0$.

Теорема доказана.

3. Оценки мер. Сформулируем теперь основной результат настоящей заметки.

ТЕОРЕМА 2. Пусть параметры (1) функции (2) удовлетворяют условиям 1), 2), если t нечетно, или условиям 1)–3), если t четно. Пусть также заданы рациональная точка $\alpha \neq 0$ и натуральное число d . Тогда существуют положительные постоянные $\gamma = \gamma(f(z), \alpha, d)$ и $C = C(f(z), \alpha, d)$ такие, что для любого однородного многочлена $P \in \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_m]$ степени d выполняется неравенство

$$|P(f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(m-1)}(\alpha))| > C \Pi^{-1} H^{1-\gamma(\log \log H)^{-1/(m^2-m+2)}},$$

где $\Pi = \Pi(P)$ и $H = H(P) \geq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку уравнение (4) лежит в классе $\mathbf{W}_0$ по теореме 1, можно воспользоваться [1, теорема I]. Это дает требуемое неравенство.

Из теоремы 2 непосредственно следует результат о мере линейной независимости.

ТЕОРЕМА 3. Пусть параметры (1) функции (2) удовлетворяют условиям 1), 2), если t нечетно, или условиям 1)–3), если t четно; $\alpha \neq 0$ – рациональная точка. Тогда существуют положительные постоянные $\gamma = \gamma(f(z), \alpha)$ и $C = C(f(z), \alpha)$ такие, что

$$|h_1 f(\alpha) + h_2 f'(\alpha) + \dots + h_m f^{(m-1)}(\alpha)| > C(H_1 \dots H_m)^{-1} H^{1-\gamma(\log \log H)^{-1/(m^2-m+2)}},$$

$$h_i \in \mathbb{Z}, \quad H_i = \max\{1, |h_i|\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad H = \max_{1 \leq i \leq m} \{H_i\} \geq 3.$$

Выражаю глубокую признательность проф. Д. Бертрану, ознакомившему меня с результатами книги [2].

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: wadim@ipsun.ras.ru

Поступило
18.10.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зудилин В. В. // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 12. С. 57–86. 2. Katz N. M. Differential Galois groups. Princeton: Univ. Press, 1990.