Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Тригуб, Обобщение формулы Эйлера–Маклорена,
Матем. заметки, 1997, том 61, выпуск 2, 312–316

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1504>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:11:44

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА–МАКЛОРЕНА

Р. М. Тригуб

В статье доказывается следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и при целом $r \geq 0$ f и $f^{(r)}$ – функции ограниченной вариации на $[n, \infty)$, а $\lim f^{(\nu)}(x) = 0$ при $x \rightarrow +\infty$ и $\nu \in [0, r]$. Тогда при $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$

$$\sum_{k=n}^{\infty} f(k)e^{ikx} = \int_n^{\infty} f(u)e^{iux} du + \frac{1}{2}f(n)e^{inx} + e^{inx} \sum_{p=0}^{r-1} \frac{(-i)^{p+1}}{p!} h^{(p)}(x) f^{(p)}(n) + \frac{\theta}{\pi^r} V_n^{\infty}(f^{(r)}).$$

Здесь

$$h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2},$$

$|\theta| \leq 3$ и $V_n^{\infty}(f^{(r)})$ – полная вариация $f^{(r)}$.

Отметим, что указанная формула справедлива и при $x = 0$, если ряд (или интеграл) сходится. А если еще учесть значения $h^{(p)}(0)$ (числа Бернулли), то получим при $x = 0$ формулу Эйлера–Маклорена. В приведенном ниже доказательстве, во всяком случае при $x = 0$, содержится и точное выражение остаточного члена, а не только его оценка.

Начнем со случая $r = 0$.

ЛЕММА 1. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ – функция ограниченной вариации и $\lim f(x) = 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$

$$\sup_{0 < |x| \leq \pi} \left| \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\varepsilon k) e^{ikx} - \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iux/\varepsilon} du \right| \leq 2\varepsilon V_{-\infty}^{\infty}(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что ряд сходится при $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ в силу классического признака Дирихле и его сумма 2π -периодическая, а интеграл сходится при $x \neq 0$ и имеет нулевой предел при $|x| \rightarrow \infty$. Докажем указанное неравенство при $\varepsilon = 1$. Общий случай сразу следует из этого частного, если заменить $f(\cdot)$ на $f(\varepsilon \cdot)$ (полная вариация функции не меняется) и сделать соответствующую замену в интеграле.

Представим разность между суммой и интегралом в виде

$$\frac{x}{2 \sin(x/2)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{k-1/2}^{k+1/2} [f(k) - f(u)] e^{iux} du - \left(\frac{x}{2 \sin(x/2)} - 1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iux} du.$$

После интегрирования по частям в последнем интеграле

$$\left| \sum_k f(k) e^{ikx} - \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iux} du \right| \leq \left| \frac{x}{2 \sin(x/2)} \right| \sum_k \int_{k-1/2}^{k+1/2} |f(k) - f(u)| du \\ + \left| \frac{1}{2 \sin(x/2)} - \frac{1}{x} \right| \cdot \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} df(u) \right|.$$

Но модуль интеграла Стильеса не больше $V_{-\infty}^{\infty}(f)$ и

$$\sum_k \int_{k-1/2}^{k+1/2} |f(k) - f(u)| du = \int_{-1/2}^{1/2} \sum_k |f(k) - f(k+u)| du \leq V_{-\infty}^{\infty}(f).$$

Так что, учитывая еще, что при $x > 0$ $\sin x < x$, имеем

$$\left| \sum_k f(k) e^{ikx} - \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iux} du \right| \leq \left| \frac{|x|}{2 \sin(x/2)} + \frac{1}{2 \sin(x/2)} - \frac{1}{x} \right| \cdot V_{-\infty}^{\infty}(f).$$

Осталось учесть, что функция под знаком модуля на $[0, \pi]$ возрастает от единицы до

$$\frac{\pi + 1}{2} - \frac{1}{\pi} < 2.$$

Далее понадобится следующий вариант формулы Пуассона.

ЛЕММА 2. Если f — функция ограниченной вариации на $\mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$2f(k) = f(k+0) + f(k-0),$$

а $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, то $\forall x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} = \sqrt{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2k\pi - x),$$

где преобразование Фурье

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iux} du.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу признака Дирихле вне любой окрестности нуля ряд слева сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$, а интеграл в определении $\hat{f}$ — на $\mathbb{R}$. Положим

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)e^{ikx} - \sqrt{2\pi}\hat{f}(-x), \quad \sigma(x) = \sum_{k \neq 0} \sqrt{2\pi}\hat{f}(2k\pi - x)$$

и покажем, что функция $s(x) - \sigma(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ (в нуле устранимый разрыв) и все ее коэффициенты Фурье равны нулю. Отсюда будет следовать, что $s(x) = \sigma(x)$, если $0 < |x| \leq \pi$, а, значит, и $\forall x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, так как обе части формулы имеют период 2π . Применяем лемму 1 к функции f_n , которая совпадает с f на $[-n, n]$ и равна нулю вне $[-n, n]$; $V_{-\infty}^{\infty}(f_n) \leq V_{-\infty}^{\infty}(f)$ и $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|s_n(x)| \leq 2V_{-\infty}^{\infty}(f), \quad s_n(x) = \sum_{k=-n}^n f(k)e^{ikx} - \int_{-n}^n f(u)e^{iux} du.$$

Следовательно, коэффициент Фурье

$$c_m(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)e^{-imx} dx = f(m) - \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} dx \int_{-n}^n f(u)e^{iux} du.$$

Для вычисления предела разобьем отрезок $[-\pi, \pi]$ на две части: $[-\delta, \delta]$ и $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ и затем устремим δ к нулю. На $[-\delta, \delta]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-imx} dx \int_{-n}^n f(u)e^{iux} du = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{\sin(u-m)\delta}{u-m} du.$$

Интеграл по любому отрезку от функции $\sin(ud)/u$ ограничен абсолютной константой. Поэтому последний интеграл сходится по δ равномерно и, значит, его предел при $\delta \rightarrow 0$ равен нулю. Вне $[-\delta, \delta]$ интеграл в определении $\hat{f}$ сходится равномерно и, значит, опять же возможен предельный переход под знаком интеграла. Имеем

$$c_m(s) = f(m) - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \hat{f}(x)e^{imx} dx.$$

Перейдем теперь к $\sigma(x)$ (см. выше). Так как исправление f на множестве нулевой меры не меняет $\sigma(x)$, то считаем далее, что f непрерывна справа. После интегрирования по частям

$$\sigma_n(x) = \sqrt{2\pi} \sum_{1 \leq |k| \leq n} \hat{f}(2k\pi - x) = \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{-i}{2k\pi - x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu(2k\pi - x)} df(u).$$

При $|x| \leq \pi$ все слагаемые непрерывны. Используя равенство

$$\frac{1}{2k\pi - x} = \frac{1}{2k\pi} + \frac{x}{2k\pi(2k\pi - x)},$$

разбиваем σ_n на две суммы, а σ — на два ряда соответственно. Второй ряд сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ в силу мажорантного признака Вейерштрасса.

Последовательность частных сумм первого ряда

$$\sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{-i}{2k\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu(2k\pi-x)} df(u) = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\sin 2k\pi u}{k\pi} \right) df(u)$$

ограниченно сходится к непрерывной функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \varphi_0(u) df(u), \quad \varphi_0(u) = u - [u] - \frac{1}{2} \quad (u \notin \mathbb{Z}), \quad \varphi_0(k) = 0 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(применена теорема Лебега о предельном переходе в интеграле по мере, порожденной функцией f ограниченной вариации). Так что на $[-\pi, \pi]$ σ_n ограниченно сходится к σ , $\sigma \in C[-\pi, \pi]$, и

$$\begin{aligned} 2\pi c_m(\sigma) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq |k| \leq n} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(2k\pi - x) e^{-imx} dx \cdot \sqrt{2\pi} \\ &= \sqrt{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi \leq |t| \leq \pi(2n+1)} \hat{f}(t) e^{imt} dt. \end{aligned}$$

Равенство $c_m(s) = c_m(\sigma)$, $m \in \mathbb{Z}$, следует теперь из формулы обращения преобразования Фурье для функций ограниченной вариации

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\delta \leq |y| \leq N} \hat{f}(y) e^{iyx} dy$$

(см., например, [1, с. 369]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. При $r = 0$ искомая формула следует из леммы 1.

При $r \in \mathbb{N}$ применяем лемму 2 ($0 < |x| \leq \pi$)

$$\frac{f(n)}{2} e^{inx} + \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) e^{ikx} = \int_n^{\infty} f(u) e^{iux} du + \sum_{1 \leq |k| < \infty} \int_n^{\infty} f(u) e^{-iu(2k\pi-x)} du$$

и интегрируем по частям r раз ($y = x - 2k\pi$, $|\theta_1| \leq 2$)

$$\begin{aligned} \int_n^{\infty} f(u) e^{iuy} du &= \sum_{p=0}^r (-1)^{p+1} f^{(p)}(n) \frac{e^{iny}}{(iy)^{p+1}} + (-1)^{r+1} \frac{1}{(iy)^{r+1}} \int_n^{\infty} e^{iuy} df^{(r)}(u) \\ &= \sum_{p=0}^{r-1} (-1)^{p+1} f^{(p)}(n) \frac{e^{iny}}{(iy)^{p+1}} + \theta_1 \frac{1}{|y|^{r+1}} V_n^{\infty}(f^{(r)}) \end{aligned}$$

(слагаемое при $p = r$ отправлено в остаток: $|f^{(r)}(n)| \leq V_n^{\infty}(f^{(r)})$). Осталось учесть, что

$$h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2k\pi - x}, \quad h^{(p)}(x) = \sum_{k \neq 0} \frac{p!}{(2k\pi - x)^{p+1}}.$$

Из теоремы при $n \rightarrow -\infty$ получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Если при целом $r \geq 0$ f и $f^{(r)}$ – функции ограниченной вариации на $\mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(\nu)}(x) = 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ и $\nu \in [0, r]$, то $\forall \varepsilon > 0$

$$\sup_{0 < |x| \leq \pi/\varepsilon} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iux} du - \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\varepsilon k) e^{i\varepsilon kx} \right| \leq \frac{3\varepsilon^{r+1}}{\pi^r} V_{-\infty}^{\infty}(f^{(r)}).$$

Интегрируя это неравенство при $r = 0$, имеем

СЛЕДСТВИЕ 2. При условиях следствия 1 и $r = 0 \quad \forall p \geq 1, \theta \in (0, 1]$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\varepsilon k) e^{ikx} \right|^p dx \right)^{1/p} = \sqrt{2\pi} \cdot \varepsilon^{1/p-1} \left(\int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} |\widehat{f}(x)|^p dx \right)^{1/p} + 4\pi\theta V_{-\infty}^{\infty}(f).$$

Утверждение следствия 2 имеется в [2], а следствия 1 – в [3].

Эти неравенства можно использовать для вычисления асимптотики сумм тригонометрических рядов при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим еще случай $p \in (0, 1)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. При условиях следствия 1 $\forall p \in (0, 1)$ существует постоянная $\gamma = \gamma(p)$ такая, что $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_k f(\varepsilon k) e^{ikx} \right|^p dx \right)^{1/p} &\leq \gamma \left[\varepsilon^{1/p-1} \left(\int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} |\widehat{f}(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\frac{\varepsilon}{\pi} \right)^r V_{-\infty}^{\infty}(f^{(r)}) \right], \\ \varepsilon^{1/p-1} \left(\int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} |\widehat{f}(x)|^p dx \right)^{1/p} &\leq \gamma \left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_k f(\varepsilon k) e^{ikx} \right|^p dx \right)^{1/p} + \left(\frac{\varepsilon}{\pi} \right)^r V_{-\infty}^{\infty}(f^{(r)}) \right]. \end{aligned}$$

Донецкий государственный университет

Поступило
08.05.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965.
2. Белинский Э. С. // Сб. "Метрические вопросы теории функций и отображений". Киев: Наукова думка, 1975. С. 15–23.
3. Тригуб Р. М. // Сб. "Теория функций и отображений". Киев: Наукова думка, 1979. С. 149–173.