Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шаповал, Об интегральном многообразии неавтономного эволюционного дифференциального уравнения, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 2, 317–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1505>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 04:38:01

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ МНОГООБРАЗИИ НЕАВТОНОМНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А. Б. Шаповал

В статье исследуется неавтономное нелинейное уравнение

$$d_t u + Au + f(u, t) = 0 \quad (0.1)$$

в абстрактном гильбертовом пространстве H . Предполагается, что A – положительный самосопряженный оператор, обладающий компактным обратным оператором A^{-1} . Оператор A удовлетворяет следующему спектральному условию:

$$\frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{\lambda_N^\beta + \lambda_{N+1}^\beta} > C(f), \quad (0.2)$$

где $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N \leq \dots$ – собственные значения оператора A ; β , $0 \leq \beta < 1$, – некоторое фиксированное число, а $C(f)$ – константа, зависящая от f . Нелинейный оператор $f(u, t)$ непрерывно отображает $D(A) \subset H$ в $D(A^{1-\beta})$ и удовлетворяет дополнительным условиям, которые сформулированы в п. 1.

В работе установлено существование $(N + 1)$ -мерного интегрального многообразия уравнения (0.1). Число N определяется из условия (0.2). Аналогичные исследования в автономном случае проведены в [1]–[3]. Общая теория изложена в [4].

1. Основные результаты. Предположим, что собственные векторы $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ оператора A образуют базис в пространстве H . Обозначим через $V_{2\alpha} = D(A^\alpha)$, $\alpha > 0$, области определения операторов A^α , $V_2 = V$. Скалярное произведение и норма в пространствах $V_{2\alpha}$ задаются формулами $(u, v)_{2\alpha} = (A^\alpha u, A^\alpha v)$ и $\|u\|_{2\alpha} = \|A^\alpha u\|$, где через $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|$ обозначаются скалярное произведение и норма в пространстве H . Обозначим через P_m ортогональный проектор из V в $V_m = \text{span}\{w_1, \dots, w_m\}$, $Q_m = I - P_m$.

Предположим, что отображение $f(\cdot, t): V \rightarrow V_{2-2\beta}$ удовлетворяет следующим условиям:

- а) существует производная по Фреше $f'_u(u, t)$ отображения f , для которой справедливо неравенство

$$\|f'_u(u, t)v\| \leq M_0(\|u\|_2)\|v\|_{2\beta} \quad \forall u, v \in V, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

$$\|f'_u(u, t)v\|_{2-2\beta} \leq M_1(\|u\|_2)\|v\|_2 \quad \forall u, v \in V, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

- б) выполнено

$$\|(f(u, t+s) - f(u, t))\|_{2-2\beta} \leq M_2(\|u\|)|s| \quad \forall u \in V, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

где $M_i(\cdot)$, $i = 0, 1, 2$, – монотонные функции.

Под решением уравнения (0.1) при начальном условии

$$u|_{t=\tau} = u_\tau \quad (1.4)$$

понимается функция $u(t) \in C^1([\tau, \infty), V)$, удовлетворяющая (0.1) как равенству в H . Предположим, что задача (0.1), (1.4) имеет единственное решение при любом $u_\tau \in V$.

Через $\{U(t, \tau), t > \tau\}$ обозначим процесс, соответствующий уравнению (0.1), $U(t, \tau)u(\tau) = u(t)$, где $u(t)$ – решение задачи (0.1), (1.4). Тогда $U(t, \tau): V \rightarrow V$. Предполагается, что процесс $\{U(t, \tau), t > \tau\}$ обладает равномерным по $\tau \in \mathbb{R}$ ограниченным в V поглощающим множеством (см. [5]), лежащим в шаре с центром в нуле и радиуса ρ_0 . Определим срезающую функцию $q \in C^1(\mathbb{R}_+, [0, 1])$, обладающую следующими свойствами: $q(s) = 1$ при $0 \leq s \leq 1$, $q(s) = 0$ при $s \geq 2$ и $|q'(s)| \leq 2$. Фиксируем $\rho = 2\rho_0$ и положим

$$F(u, t) = q\left(\frac{\|u\|_2^2}{\rho^2}\right)f(u, t). \quad (1.5)$$

Вместе с уравнением (0.1) рассматривается измененное уравнение

$$d_t u + Au + F(u, t) = 0. \quad (1.6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Конечномерное липшицево многообразие M будем называть *интегральным многообразием* уравнения (1.6), если выполнены следующие условия:

- i) если $M(s)$ – сечение множества M в момент времени s , то $U(t, s)M(s) = M(t)$, $t > s$;
- ii) многообразие M экспоненциально притягивает все решения уравнения (1.6).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнены указанные выше условия. Тогда

- 1) уравнение (1.6) обладает $(N+1)$ -мерным интегральным многообразием M ;
- 2) для любого решения $u(t)$ задачи (0.1), (1.4) существуют $t_1 \in [\tau, \infty)$ и решение $v(t) \in M$ уравнения (0.1) такие, что

$$\|u(t) - v(t)\|_\beta \leq 2\|Q_N(u(t_1) - v(t_1))\|_\beta e^{-\mu_N(t-t_1)}, \quad (1.7)$$

где μ_N – некоторая константа.

2. Построение интегрального многообразия. В этом пункте указаны методы доказательства теоремы 1.1. Интегральное многообразие $M \subset V \times \mathbb{R}$ строится методом Перрона, как график липшицевой функции $\varphi: P_NV \times \mathbb{R} \rightarrow Q_NV$:

$$M = \{(p, q, s) \in P_NV \times Q_NV \times \mathbb{R} : q = \varphi(p, s), T\varphi = \varphi\}. \quad (2.1)$$

Функция φ является неподвижной точкой оператора T , который будет определен ниже формулой (2.9).

Обозначим через $\Phi = \Phi_{b, \varkappa, \nu}$ множество функций $\varphi(p, s)$, $\varphi: P_NV \times \mathbb{R} \rightarrow Q_NV$, удовлетворяющих условиям

$$\text{supp } \varphi \subset \{(p, s) : p \in P_NV, \|p\|_2 \leq 4\rho, s \in \mathbb{R}\}, \quad (2.2)$$

$$\|\varphi(p_1, s) - \varphi(p_2, s)\|_2 \leq \varkappa\|p_1 - p_2\|_2 \quad \forall p_1, p_2 \in P_NV, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

$$\|\varphi(p, s_1) - \varphi(p, s_2)\|_2 \leq \nu|s_1 - s_2| \quad \forall p \in P_NV, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

$$\|\varphi(p, s)\|_2 \leq b \quad \forall p \in P_NV, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Определим расстояние в Φ формулой

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\Phi = \sup_{s \in \mathbb{R}} \sup_{p \in P_NV} \|\varphi_1(p, s) - \varphi_2(p, s)\|_2.$$

Легко видеть, что так определенное пространство Φ является полным метрическим пространством.

Зафиксируем b, κ, ν так, чтобы $b = \rho_0/4, \nu = 1, \kappa = 1/6$. Для любой функции $\varphi \in \Phi$, $p_0 \in P_N V$ и $s \in \mathbb{R}$ обозначим через $p(t; \varphi, p_0, s)$ решение задачи

$$\frac{dp}{dt} + Ap + P_N F(p + \varphi(p, t), t) = 0, \quad (2.6)$$

$$p|_{t=s} = p_0. \quad (2.7)$$

Согласно [3], отображение $P_N F(p + \varphi(p, t), t)$ липшицево по p , поэтому решение системы (2.6), (2.7) определено для любого $t \in \mathbb{R}$.

Определим оператор T , действующий на пространстве Φ , формулой

$$(T\varphi)(p_0, s) = - \int_{-\infty}^s e^{(\tau-s)A} Q_N F(u(\tau), \tau) d\tau, \quad (2.8)$$

где $u(\tau) = p(\tau; \varphi, p_0, s) + \varphi(p(\tau; \varphi, p_0, s), \tau)$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Предположим, что для некоторого числа N выполнено условие (0.2). Тогда оператор T действует из Φ в Φ и является сжимающим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к получению априорных оценок в пространстве V разности двух решений уравнения (2.6). Близкие методы используются в [3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Из построения множества M следует, что M является $(N+1)$ -мерным многообразием, для которого выполнено свойство i). Докажем, что любое решение $u(t)$ задачи (0.1), (1.4) экспоненциально притягивается к некоторому решению $v(t)$ уравнения (0.1), лежащему на интегральном многообразии M . Так как уравнение (0.1) имеет ограниченное в V поглощающее множество, то существует $T > 0$ такое, что $\|u(t)\|_2 \leq \rho_0 \quad \forall t \geq \tau + T$. Если для некоторого $t' \in [\tau + T, \infty)$ $Q_N u(t') = \varphi(P_N u(t'), t')$, то из единственности решения задачи (0.1), (1.4) следует, что $Q_N u(t) = \varphi(P_N u(t), t) \quad \forall t \geq t'$. Тогда (1.7) выполнено при $t_1 = t'$,

$$v(t) = p(t; \varphi, P_N u'(t_1), t_1) + \varphi(p(t; \varphi, P_N u'(t_1), t_1), t).$$

Пусть для любых $t \geq \tau + T$ выполнено $Q_N u(t) \neq \varphi(P_N u(t), t)$. Обозначим $s = \tau + T$. Функция $u(t)$ при $t > s$ удовлетворяет уравнению (0.1) с начальным условием $u|_{t=s} = u(s)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Существует по крайней мере одна точка $p_0 \in P_N V$ такая, что если*

$$\|\varphi(p_0, s) - Q_N u(s)\|_\beta > \|p_0 - P_N u(s)\|_\beta, \quad (2.9)$$

то

$$\|p(t; \varphi, p_0, s), t) - Q_N u(t)\|_\beta > \|p(t; \varphi, p_0, s) - P_N u(t)\|_\beta \quad \forall t > s. \quad (2.10)$$

Обозначим через p_0^* точку, для которой выполнены неравенства (2.9) и (2.10). Положим $v(t) = p(t; \varphi, p_0^*, s) + \varphi(p(t; \varphi, p_0^*, s), t)$. Используя (2.10), получим, что для любых $t \geq s$ верно неравенство

$$\|v(t) - u(t)\|_\beta \leq 2 \|Q_N(v(t) - u(t))\|_\beta. \quad (2.11)$$

Согласно сжимающему свойству (см. [3]) при выполнении условия (2.10) справедливо неравенство

$$\|Q_N(v(t) - u(t))\|_\beta \leq \|Q_N(v(s) - u(s))\|_\beta e^{-\mu_N(t-s)}. \quad (2.12)$$

Из (2.11) и (2.12) следует (1.7). Теорема доказана.

3. Уравнение реакции диффузии. В этом пункте построено интегральное многообразие задачи

$$u_t - u_{xx} + f(u, x, t) = 0, \quad x \in \Omega = [0, \pi], \quad (3.1)$$

$$u|_{t=\tau} = u_\tau, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.2)$$

Обозначим

$$F(v, x, t) = \int_0^v f(\omega, x, t) d\omega.$$

Предположим, что функции $f(v, x, t)$ и $F(v, x, t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$fv \geq -K_1 v^2 - K_2, \quad \text{где } 1 - K_1 \pi = \alpha > 0, \quad (3.3)$$

$$f \in C^3(\mathbb{R}^3), \quad (3.4)$$

$$F_t(v, x, t) \leq K_3 F(v, x, t) + K_4, \quad v, t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega, \quad (3.5)$$

$$-K_7 \leq F(v, x, t) \leq K_5^{-1} f(v, x, t)v + K_6, \quad v, t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega, \quad (3.6)$$

$$\left| \frac{\partial^i}{\partial x^i} (f(v, x, t_1) - f(v, x, t_2)) \right| \leq M_i(|u|)|t_1 - t_2|, \quad i = 0, 1, 2, \quad t_1, t_2, v \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega. \quad (3.7)$$

В этих формулах $K_i > 0$, $i = 1, \dots, 7$, — некоторые константы, $M_i(\cdot)$, $i = 0, 1, 2$, — монотонные функции.

ЛЕММА 3.1. Пусть выполнены условия (3.3)–(3.7). Тогда существует единственное решение $u(t) \in C_b(\mathbb{R}_\tau, H^2(\Omega))$ задачи (3.1), (3.2). Задача (3.1), (3.2) обладает ограниченным в $H^2(\Omega)$ поглощающим множеством.

По формуле (1.5) определим срезанную функцию F и рассмотрим измененное уравнение

$$u_t - u_{xx} + F(u, x, t) = 0. \quad (3.8)$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия (3.3)–(3.7). Тогда уравнение (3.8) обладает интегральным многообразием, которое экспоненциально притягивает в пространстве $H^1(\Omega)$ все решения задачи (3.1), (3.2).

Доказательство следует из общей теоремы 1.1.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26.09.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Eden A., Foias C., Nicolaenko B., Temam R. Inertial Sets for Dissipative Evolution Equations. Preprint Series 812, 1991.
2. Foias C., Sell G. R., Temam R. // J. Differential Equations. 1988. V. 73. № 2.
3. Foias C., Sell G. R., Titi E. Exponential Tracking and Approximation of Inertial Manifolds for Dissipative Nonlinear Equations. Preprint 8803: Indiana Univ..
4. Чуешов И. Д. Введение в теорию инерциальных многообразий. Харьков: ХГУ, 1992.
5. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.