Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Х. Арансон, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, Усиленная C^r -лемма о замыкании для динамических систем и слоений на торе, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 323–331

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1506>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:16:43

УДК 517.917+513.9

УСИЛЕННАЯ C^r -ЛЕММА О ЗАМЫКАНИИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И СЛОЕНИЙ НА ТОРЕ

С. Х. Арансон, Е. В. Жужома, В. С. Медведев

В статье доказывается усиленная C^r -лемма о замыкании ($r \geq 1$) для блуждающих цепно рекуррентных траекторий потоков без состояний равновесия на двумерном торе и блуждающих цепно рекуррентных орбит диффеоморфизма окружности. Выделяется класс бесконечно гладких действий целочисленной решетки $\mathbb{Z}^k$ на окружности, для которых доказывается усиленная C^r -лемма ($r \geq 1$) о замыкании. Полученный результат применяется для слоений коразмерности один с тривиальной группой голономии на трехмерном торе.

Библиография: 19 названий.

Пусть $\mathfrak{X}^r(M)$ – пространство C^r -гладких ($r \geq 1$) векторных полей, заданных на замкнутом многообразии M , и $\mathfrak{X}^r(M)$ наделено C^r -метрикой. Пусть u потока f^t на M через точку $x \in M$ проходит незамкнутая устойчивая по Пуассону траектория, где поток f^t индуцирован векторным полем $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. (Под потоком f^t на M понимается динамическая система с непрерывным временем t , под каскадом f^t – динамическая система с дискретным временем t .)

Под C^r -леммой о замыкании для потока f^t на M понимается следующее утверждение: для любой окрестности $U(X)$ векторного поля $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, индуцирующего f^t , существует векторное поле $Y \in U(X)$ такое, что поток g^t на M , индуцируемый векторным полем Y , имеет замкнутую траекторию, проходящую через точку x .

Если в этом определении потребовать, чтобы все траектории потока g^t на M были замкнуты, то такое утверждение назовем усиленной C^r -леммой о замыкании.

C^r -лемма о замыкании имеет большое значение в теории устойчивости и ее доказательству (или опровержению) в различных пространствах $\mathfrak{X}^r(M)$ и различных r было посвящено много работ [1]–[5]. Важной для теории бифуркаций задачей является доказательство леммы о замыкании в более слабом предположении о возвращаемости траекторий, нежели устойчивость по Пуассону. Ч. Пью [6] доказал C^1 -лемму о замыкании для пролонгационно рекуррентных траекторий первого порядка в специальном классе потоков на торе и показал, что C^2 -лемма в этом классе потоков неверна. В [7] доказана C^r -лемма о замыкании, где $r \geq 1$, для пролонгационно рекуррентных траекторий потоков на плоскости, которые имеют либо полугиперболические состояния равновесия, либо состояния равновесия со свойством отслеживания траекторий. В [8] доказана усиленная C^r -лемма о замыкании ($r \geq 1$) для диффеоморфизмов f окружности $\mathbb{S}^1$, имеющих либо иррациональное число вращения Пуанкаре, либо рациональное

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, гранты R99000 и R99300, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–01–01407.

число вращения Пуанкаре, при этом в последнем случае дополнительно предполагается, что $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ аналитический диффеоморфизм, имеющий *цепочку*.

В настоящей статье доказывается усиленная C^r -лемма о замыкании, где $r \geq 1$, для блуждающих *цепно рекуррентных орбит* диффеоморфизма $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ и блуждающих *цепно рекуррентных траекторий* потоков без состояний равновесия на торе $\mathbb{T}^2$. Затем выделяется класс C^∞ -гладких действий целочисленной решетки $\mathbb{Z}^k$ на $\mathbb{S}^1$, для которых справедлива усиленная C^r -лемма о замыкании. Полученный результат применяется для слоений коразмерности один с тривиальной группой голономии на торе $\mathbb{T}^3$.

1. Усиленная C^r -лемма о замыкании для блуждающих цепно рекуррентных орбит диффеоморфизмов окружности и блуждающих цепно рекуррентных траекторий потоков без состояний равновесия на двумерном торе. Пусть $f: M \rightarrow M$ – гомеоморфизм замкнутого многообразия M и d – метрика на M . Последовательность точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ называется ε -*цепью гомеоморфизма* f , если $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ ($i = \overline{1, n-1}$). Если $x_1 = x_n$, то ε -цепь называется *периодической*. Точка $x \in M$ называется *цепно рекуррентной точкой гомеоморфизма* $f: M \rightarrow M$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует периодическая ε -цепь $x = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x$, где $d(f(x), x_2) < \varepsilon, d(f(x_2), x_3) < \varepsilon, \dots, d(f(x_{n-2}), x_{n-1}) < \varepsilon, d(f(x_{n-1}), x) < \varepsilon$. Множество $R(f)$ цепно рекуррентных точек гомеоморфизма $f: M \rightarrow M$ замкнуто и инвариантно. Точка $x \in M$ называется *блуждающей для гомеоморфизма* $f: M \rightarrow M$, если существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что $f^n(U(x)) \cap U(x) = \emptyset$ при $n \neq 0$, где f^n – n -я итерация для f .

ЛЕММА 1. Пусть задан гомеоморфизм $f: M \rightarrow M$, где M замкнутое многообразие, и пусть существует область $A \subset M$ ($A \neq M$) такая, что $f(\overline{A}) \subset A$, где $\overline{A}$ – замыкание области A . Тогда все точки, принадлежащие $\overline{A} \setminus A$, являются блуждающими нецепно рекуррентными для f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что любая точка $x \in \overline{A} \setminus A$ является блуждающей точкой гомеоморфизма $f: M \rightarrow M$. Множество $\overline{A} \setminus A \neq \emptyset$, ибо по предположению $A \neq M$. Поскольку $f(\overline{A}) \subset A, \overline{A} \setminus A \neq \emptyset, x \in \overline{A} \setminus A$, то существует окрестность $\delta(x)$ точки x такая, что

$$\delta(x) \cap f(\overline{A}) = \emptyset, \quad \delta(x) \cap f(\delta(x)) = \emptyset, \quad f(\delta(x)) \subset A.$$

Отсюда получаем, что

$$f^2(\delta(x)) \subset f(A), \quad f^3(\delta(x)) \subset f(A), \quad \dots, \quad f^n(\delta(x)) \subset f(A), \quad \dots,$$

т.е. $f^n(\delta(x)) \cap \delta(x) = \emptyset, n \neq 0$, и, следовательно, x – блуждающая точка.

Покажем, что блуждающая точка $x \in \overline{A} \setminus A$ не является цепно рекуррентной. Предположим противное, т.е. что блуждающая точка $x \in \overline{A} \setminus A$ является цепно рекуррентной, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует периодическая ε -цепь.

Поскольку $x \in \overline{A} \setminus A$ является блуждающей точкой гомеоморфизма $f: M \rightarrow M$, где M – замкнутое многообразие, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$\varepsilon_0(x) \cap f^n(\varepsilon_0(x)) = \emptyset \quad (n \geq 1), \quad \varepsilon_0(f^n(x)) \subset f(A) \quad (n \geq 2), \\ \varepsilon_0 < \frac{1}{2}d(f(\overline{A} \setminus A), \overline{A} \setminus A).$$

Поскольку по предположению о противном точка x является цепно рекуррентной для гомеоморфизма f , то по вышеуказанному $\varepsilon_0 > 0$ найдется периодическая ε_0 -цепь $x = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x$, для которой выполняются соотношения:

$$d(f(x), x_2) < \varepsilon_0, \quad d(f(x_2), x_3) < \varepsilon_0, \quad \dots, \quad d(f(x_{n-1}), x) < \varepsilon_0.$$

Поскольку $\varepsilon_0 < \frac{1}{2}d(f(\bar{A} \setminus A), \bar{A} \setminus A)$ и $d(f(x), x_2) < \varepsilon_0$, то $x_2 \in A$. Так как f – гомеоморфизм, то $f(x_2) \in f(A)$.

С другой стороны, поскольку

$$d(f(x_2), x_3) < \varepsilon_0, \quad f(x_2) \in f(A), \quad d(\bar{A} \setminus A, f(\bar{A} \setminus A)) > 2\varepsilon_0,$$

то $d(x, x_3) > \varepsilon_0$ и $x_3 \in A$.

Продолжая такую процедуру дальше, получаем

$$d(x, x_4) > \varepsilon_0, \quad x_4 \in A, \quad d(x, x_5) > \varepsilon_0, \quad x_5 \in A, \quad d(x, x_{n-1}) > \varepsilon_0, \quad x_{n-1} \in A,$$

откуда для данного $\varepsilon_0 > 0$ точка $x \in \bar{A} \setminus A$ не имеет периодической ε_0 -цепи $x = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x$, что невозможно.

ЛЕММА 2. Пусть $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ образующий ориентацию гомеоморфизм. Тогда для того чтобы все точки окружности $\mathbb{S}^1$ были цепно рекуррентными для f необходимо и достаточно, чтобы $f^2: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ был тождественным гомеоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть $f^2: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ – тождественный гомеоморфизм ($f^2 = \text{id}$), тогда поскольку f обращающий ориентацию гомеоморфизм окружности, то у f существует ровно две неподвижные точки $a, b \in \mathbb{S}^1$, а остальные точки окружности $\mathbb{S}^1$ являются периодическими точками периода два, и, следовательно, все точки окружности являются цепно рекуррентными, и все они являются неблуждающими.

Достаточность. Пусть все точки обращающего ориентацию гомеоморфизма $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ являются цепно рекуррентными. Предположим противное, т.е. что $f^2 \neq \text{id}$. Но тогда существует точка $x \in \mathbb{S}^1$ такая, что $f(x) \neq x$ и $f^2(x) \neq x$.

Так как f – обращающий ориентацию гомеоморфизм окружности $\mathbb{S}^1$, то у f существует ровно две неподвижные точки $a, b \in \mathbb{S}^1$. Эти точки разбивают окружность $\mathbb{S}^1$ на две замкнутые дуги λ_1, λ_2 , такие, что $\lambda_1 \cap \lambda_2 = a \cup b$. Точка x не является неподвижной, ибо $f(x) \neq x$, поэтому, не ограничивая общности, можем считать, что $x \in \text{int } \lambda_1 = \lambda_1 \setminus (a \cup b)$.

Так как $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ – обращающий ориентацию гомеоморфизм окружности $\mathbb{S}^1$ и $\lambda_1 \cap \lambda_2 = a \cup b$, $f(a) = a$, $f(b) = b$, то $f(\lambda_1) = \lambda_2$, $f(x) \in \text{int } \lambda_2$, $f^2(x) \in \text{int } \lambda_1$.

Обозначим через μ открытую дугу, принадлежащую $\text{int } \lambda_1$ и ограниченную точкой $x \in \text{int } \lambda_1$, и $f^2(x) \in \text{int } \lambda_1$.

Запишем это следующим образом: $\mu = (x, f^2(x)) \subset \text{int } \lambda_1$.

На дуге μ зафиксируем любую точку x_0 и обозначим через ν открытую дугу, которая ограничена точками $x_0, f(x)$ и содержащую точку $f^2(x)$ ($f^2(x) \in \nu = (x_0, f(x))$). Покажем, что $f(\bar{\nu}) \subset \nu$, где $\bar{\nu}$ – замыкание ν .

Действительно, точка $f^2(x) \in \nu$. Одна из точек a, b принадлежит ν . Пусть для определенности $b \in \nu$. Тогда открытая дуга ω , принадлежащая λ_1 и ограниченная точками x, b ($\omega = (x, b)$), под действием гомеоморфизма f совпадает с открытой дугой φ , принадлежащей λ_1 и ограниченной точками $f(x), b$ ($\varphi = (f(x), b)$). Поскольку $\omega = \varphi$, то отсюда следует, что $f(x_0) \in \nu$, поэтому имеем, что $f(\bar{\nu}) \subset \nu$. Но тогда в силу леммы 1 имеем, что точка x не является цепно рекуррентной.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства достаточности леммы 2 следует, что если у гомеоморфизма $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $f^2 \neq \text{id}$, имеется хотя бы одна цепно рекуррентная точка $x \in \mathbb{S}^1$, $f^2(x) \neq x$, то f не может обращать ориентацию окружности $\mathbb{S}^1$, т.е. в этом случае $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ сохраняет ориентацию. В частности, отсюда следует, что если точка $x \in \mathbb{S}^1$ является блуждающей цепно рекуррентной точкой гомеоморфизма $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, то f сохраняет ориентацию.

ЛЕММА 3 [9]. На интервале $(0; 1)$ существует множество A иррациональных чисел, лебегова мера которого равна единице, и такое, что если C^r -дiffeоморфизм $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ($r \geq 3$) имеет число вращения Пуанкаре $\alpha = \text{rot}(f) \in A$, то f будет C^{r-2} -сопряжен повороту $R_\alpha: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Если f – diffeоморфизм класса C^∞ (или аналитический), то f C^∞ -сопряжен (аналитически сопряжен) повороту R_α .

Обозначим через $\text{Diff}^r(\mathbb{S}^1)$ пространство C^r -дiffeоморфизмов окружности $\mathbb{S}^1$, наделенное метрикой dr , которая индуцирует на $\text{Diff}^r(\mathbb{S}^1)$ C^r -топологию (см. [9], [10]). Усиленной C^r -леммой о замыкании для C^r -дiffeоморфизма $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ называется следующее утверждение: для любой окрестности $U(f)$ diffeоморфизма $f \in \text{Diff}^r(\mathbb{S}^1)$ существует diffeоморфизм $g \in U(f)$ такой, что все орбиты diffeоморфизма g периодические.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in \text{Diff}^r(\mathbb{S}^1)$, $r \geq 1$, имеет блуждающую цепно рекуррентную орбиту на $\mathbb{S}^1$. Тогда для f имеет место усиленная C^r -лемма о замыкании.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \mathbb{S}^1$ блуждающая цепно рекуррентная точка C^r -дiffeоморфизма $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $r \geq 1$. В силу замечания к лемме 2 diffeоморфизм f должен сохранять ориентацию окружности $\mathbb{S}^1$. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству леммы 2 из [8].

Зададим $\varepsilon > 0$. Возможны два случая: 1) $\text{rot}(f)$ – иррациональное число и $r = 1$; 2) $\text{rot}(f)$ – рациональное число и $r \geq 1$. Отметим, что в случае 1) $r = 1$, в противном случае, если $r \geq 2$, то согласно теореме Данжуа (см. [10], [11]) f должен быть транзитивным diffeоморфизмом и, следовательно, не иметь блуждающих точек, что невозможно, ибо по предположению x – блуждающая точка.

В случае 1), когда $\text{rot}(f)$ иррациональное число и $r = 1$, из всюду плотности на интервале $(0; 1)$ множества A иррациональных чисел, определяемых по лемме 3 (множества иррациональных чисел Эрмана) и неустойчивости иррационального числа вращения $\text{rot}(f)$ (предложение 4.1.1 в [9]), вытекает, что существует аналитический diffeоморфизм $\varphi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ (например, тригонометрический полином) такой, что $d_r(f, \varphi) < \varepsilon/2$, $\text{rot}(\varphi) \in A$.

В силу леммы 3 $\varphi = h^{-1}R_\alpha h$, где $h: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ аналитический diffeоморфизм, $R_\alpha: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ – поворот на величину $\alpha = \text{rot}(\varphi)$. Возьмем поворот R_μ с рациональным μ столь близкий к R_α , что аналитические diffeоморфизмы $\varphi = h^{-1}R_\alpha h$, $g = h^{-1}R_\mu h$ будут $(\varepsilon/2)$ -близки в C^r -метрике d_r . Тогда $d_r(f, g) < \varepsilon$ и в силу рациональности μ все орбиты diffeоморфизма g периодические.

В случае 2), когда $\text{rot}(f) = p/q$ (p, q – целые взаимно простые, $q > 0$, $r \geq 1$), diffeоморфизм $f^q: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ имеет неподвижные точки. Возьмем diffeоморфизм $\bar{f}^q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, накрывающий diffeоморфизм $f^q: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, где $\mathbb{R}$ – евклидова прямая, $\bar{f}^q(x+1) = \bar{f}^q(x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$, и обозначим через $\Delta_q(x) = \bar{f}^q(x) - x - p$. Так как f имеет на $\mathbb{S}^1$ цепно рекуррентную блуждающую точку, то либо $\Delta_q(x) \geq 0$, либо $\Delta_q(x) \leq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, т.е. согласно [9, определение 2] f имеет цепочку.

Пусть для определенности $\Delta_q(x) \geq 0$. Рассмотрим однопараметрическое семейство диффеоморфизмов $\bar{f}_\lambda(x) = \bar{f}(x) + \lambda$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (-\infty, +\infty)$, и обозначим через f_λ семейство диффеоморфизмов на $\mathbb{S}^1$, накрывающих $\bar{f}_\lambda$. Поскольку $\bar{f}_\lambda(x) = \bar{f}(x) + \lambda$ и при всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется $\bar{f}^q(x) \geq x + p$, то при всех $\lambda > 0$ имеем, что $\bar{f}_\lambda^q(x) > \bar{f}^q(x) \geq x + p$, откуда при всех $\lambda > 0$ число вращения поднятия $\text{rot}(\bar{f}_\lambda)$ диффеоморфизма $\bar{f}_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ больше числа вращения поднятия $\text{rot}(\bar{f})$ диффеоморфизма $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (Напомним, что если задан гомеоморфизм $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ и задан гомеоморфизм $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, накрывающий f , такой, что $\bar{f}(x+1) = \bar{f}(x) + 1$ (или $\bar{f}(x+1) = \bar{f}(x) - 1$), то *числом вращения поднятия* $\text{rot} \bar{f}$ гомеоморфизма $\bar{f}$ называется предел

$$\text{rot}(\bar{f}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\bar{f}^n(0)}{n},$$

а *числом вращения Пуанкаре* $\text{rot}(f)$ гомеоморфизма $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ называется число $\text{rot}(f) = \text{rot}(\bar{f}) \pmod{1}$. В данной статье мы употребляем термин “число вращения”, понимая его как число вращения Пуанкаре для гомеоморфизмов окружности и как число вращения поднятия для гомеоморфизмов прямой, накрывающих гомеоморфизмы окружности.)

Возьмем $\lambda_0 > 0$ столь малым, чтобы $d_r(f, f_{\lambda_0}) < \varepsilon/3$ и при этом $\text{rot}(f_{\lambda_0})$ был бы иррациональным числом. Повторяя далее для диффеоморфизма $f_{\lambda_0}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ те же рассуждения, что и в случае 1) для диффеоморфизма f , получаем, что в случае 2) существует аналитический диффеоморфизм $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ такой, что $d_r(f, g) < \varepsilon$ и у g все орбиты периодические.

Введем понятие цепно рекуррентности для потока. Пусть на замкнутом многообразии M задан поток f^t . Обозначим через $f^t(x)$ сдвиг точки $x \in M$ вдоль траектории этого потока, проходящей через точку x , на время t . Точка $x \in M$ называется *цепно рекуррентной для потока* f^t на M , если для любых $\varepsilon > 0$, $T > 0$ существует последовательность точек $x = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x$ и чисел $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ ($t_i > T$) таких, что $d(f^{t_i}(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$, где d – метрика на M , $i = \overline{1, n-1}$. Множество $R(f^t)$ цепно рекуррентных точек потока f^t на M инвариантно и замкнуто. Траектория $f^t(x)$ потока f^t на M , проходящая через цепно рекуррентную точку x потока f^t , называется *цепно рекуррентной траекторией*. Точка x называется *блуждающей точкой* потока f^t , если существует окрестность $U(x)$ точки x и число $T > 0$ такие, что

$$f^t(U(x)) \cap U(x) = \emptyset, \quad |t| \geq T.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть векторное поле $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{T}^2)$ ($r \geq 1$), где $\mathbb{T}^2$ – двумерный тор, и поток f^t на $\mathbb{T}^2$, индуцируемый полем X , не имеет состояний равновесия и имеет блуждающую цепно рекуррентную траекторию. Тогда для потока f^t имеет место усиленная C^r -лемма о замыкании.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два случая: 1) поток f^t не имеет замкнутых траекторий; 2) поток f^t имеет замкнутые траектории.

В случае 1) поток f^t не имеет замкнутых траекторий на $\mathbb{T}^2$, и поскольку на $\mathbb{T}^2$ нет также состояний равновесия для этого потока и имеется блуждающая точка, то f^t имеет на $\mathbb{T}^2$ нигде не плотное нетривиальное минимальное множество, и, следовательно, в силу теоремы Данжуа (см., например, [10]), имеем $r \leq 1$. Так как по предположению $r \geq 1$, то получаем $r = 1$.

Обозначим через C аналитическую замкнутую кривую на $\mathbb{T}^2$, являющуюся глобальной секущей для траекторий потока f^t (она существует, поскольку нет состояний равновесия и имеется нетривиальное минимальное множество). Поток f^t индуцирует на C отображение последования $p: C \rightarrow C$ гладкости C^1 с иррациональным числом вращения, и p имеет предельное множество, гомеоморфное канторовскому множеству. Рассмотрим стандартную окружность S^1 (например, меридиан тора $\mathbb{T}^2$), и обозначим через $\pi: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ аналитический диффеоморфизм, переводящий C на S^1 , поэтому C^1 -диффеоморфизм $p_1 = \pi p \pi^{-1}$ окружности S^1 аналитически сопряжен с C^1 -диффеоморфизмом $p: C \rightarrow C$. Тогда на $\mathbb{T}^2$ существует C^1 -векторное поле X_1 , индуцирующее на $\mathbb{T}^2$ поток f_1^t , являющийся *надстройкой* над диффеоморфизмом p_1 , и f_1^t C^1 -гладко эквивалентен f^t на $\mathbb{T}^2$.

Обозначим через $\varphi: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ диффеоморфизм, осуществляющий эту эквивалентность, при этом $\varphi|_C = \pi|_C$. В силу теоремы 1 диффеоморфизм p_1 в пространстве $\text{Diff}^1(S^1)$ аппроксимируется сколь угодно близким к p C^1 -диффеоморфизмом $p_2: S^1 \rightarrow S^1$, все орбиты которого периодические. Поэтому на $\mathbb{T}^2$ существует C^1 -векторное поле X_2 сколь угодно близкое к X_1 в пространстве $\mathcal{X}^1(\mathbb{T}^2)$ такое, что поток f_2^t на $\mathbb{T}^2$, индуцированный X_2 , является надстройкой над p_2 , и все траектории f_2^t замкнуты. Но тогда под действием диффеоморфизма $\varphi^{-1}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ поток f_2^t переводится в поток g^t на $\mathbb{T}^2$, все траектории которого замкнуты, и g^t индуцирует C^1 -векторное поле Y сколь угодно близкое к X в пространстве $\mathcal{X}^1(\mathbb{T}^2)$.

Случай 2), когда f^t имеет замкнутые траектории и $r \geq 1$, разобьем на два подслучая: 2.1) f^t имеет глобальную секущую C ; 2.2) f^t не имеет глобальной секущей.

В подслучае 2.1), когда f^t имеет глобальную секущую C , отображение последования $p: C \rightarrow C$ имеет рациональное число вращения и для отображения p выполняются условия теоремы 1. Дальнейшее рассуждение полностью аналогично доказательству случая 1).

В подслучае 2.2), когда f^t не имеет глобальной секущей, обозначим через $\text{Per}(f^t)$ множество замкнутых траекторий потока f^t . Так как $\text{Per}(f^t)$ компактно, то существует конечное семейство отрезков без контакта $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ такое, что каждая замкнутая траектория пересекается ровно с одним из этих отрезков. Введем на каждом отрезке Σ_i параметризацию $x: (-1, 1) \rightarrow \Sigma_i$. В окрестности пересечения $\Sigma_i \cap \text{Per}(f^t)$ определено отображение последования $f_i: \text{dom}(f_i) \rightarrow \Sigma_i$ ($i = \overline{1, k}$), где $\text{dom}(f_i)$ означает область определения f_i . Так как поток f^t имеет блуждающую цепно рекуррентную точку, то выражение $f_i(x) - x$ не является знакопеременным для каждого $i = \overline{1, k}$. Поэтому существует семейство попарно непересекающихся замкнутых колец $U_1, \dots, U_k$ со следующими свойствами: 1) граница ∂U_i каждого кольца U_i состоит из двух замкнутых трансверсалий; 2) на одной трансверсали из ∂U_i векторное поле потока f^t направлено внутрь кольца U_i , а на другой трансверсали из ∂U_i – наружу; 3) $\text{Per}(f^t) \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$.

Так как либо $f_i(x) - x \geq 0$, либо $f_i(x) - x \leq 0$ ($i = \overline{1, k}$), то существует сколь угодно малый в C^r -топологии функциональный поворот C^r -векторного поля X , индуцированного потоком f^t , в области $U = \bigcup_{i=1}^k \text{int } U_i$ (X не меняется вне области U), который приводит к C^r -векторному полю Y , индуцирующему поток g^t , который не имеет в множестве $\bigcup_{i=1}^k U_i$ замкнутых траекторий. Более того, для достаточно малого поворота поля X поток g^t , индуцируемый полем Y , не будет иметь ни состояний равновесия, ни замкнутых траекторий, гомотопных замкнутым траекториям потока f^t . В силу [12] поток g^t имеет глобальную секущую. Поэтому подслучай 2.2) сводится или к подслучаю 2.1) или к случаю 1).

2. Усиленная C^r -лемма о замыкании для C^∞ -действий целочисленной решетки на окружности и слоений коразмерности один с тривиальной группой голономии на трехмерном торе. Пусть $\mathbb{Z}^k = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ – k -мерная целочисленная решетка, где $\mathbb{Z}$ – группа целых чисел. C^r -действием группы $\mathbb{Z}^k$ на $\mathbb{S}^1$ называется гомеоморфизм $\rho: \mathbb{Z}^k \rightarrow \text{Diff}^r(\mathbb{S}^1)$ такой, что отображение $(\gamma, x) \rightarrow \rho(\gamma)(x)$, $\gamma \in \mathbb{Z}^k$, $x \in \mathbb{S}^1$, является C^r -гладким ($r \geq 0$).

Пространство $G^r(\mathbb{Z}^k, \mathbb{S}^1)$ таких действий допускает полную метрику для конечного r . Усиленной C^r -леммой о замыкании для C^∞ -действия $\rho \in G^\infty(\mathbb{Z}^k, \mathbb{S}^1)$ называется следующее утверждение: для любого конечного r и любой окрестности $U(\rho)$ в $G^r(\mathbb{Z}^k, \mathbb{S}^1)$ существует действие $\tilde{\rho} \in G^\infty(\mathbb{Z}^k, \mathbb{S}^1)$, $\tilde{\rho} \in U(\rho)$ такое, что все орбиты действия $\tilde{\rho}$ периодические.

Последовательность ρ_n C^r -действий называется сходящейся к действию ρ_0 в $G^r(\mathbb{Z}^k, \mathbb{S}^1)$, если для любого $\gamma \in \mathbb{Z}^k$ последовательность $\rho_n(\gamma)$ сходится к $\rho_0(\gamma)$ в $\text{Diff}^r(\mathbb{S}^1)$.

H -диффеоморфизмом окружности $\mathbb{S}^1$ назовем C^∞ -диффеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения такой, что он C^∞ -сопряжен повороту. Свойство диффеоморфизма быть H -диффеоморфизмом зависит от арифметических свойств его числа вращения (см. [9], [13]–[15]).

Свободное C^∞ -действие $\rho \in G^\infty(\mathbb{Z}^k, \mathbb{S}^1)$ называется H -действием, если существует $\gamma \in \mathbb{Z}^k$ такое, что $\rho(\gamma)$ является H -диффеоморфизмом.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\rho \in G^\infty(\mathbb{Z}^k, \mathbb{S}^1)$ – H -действие. Тогда для ρ и любого $r \geq 1$ имеет место C^r -лемма о замыкании.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диффеоморфизмы $\rho(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{Z}^k$, попарно коммутативны. Так как ρ является H -действием, то в силу теоремы 2.1 [16] и утверждения (11.1) [9] существует C^∞ -диффеоморфизм $h: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ такой, что диффеоморфизм $h^{-1}\rho(\gamma)h$ является поворотом для любого $\gamma \in \mathbb{Z}^k$. Так как группа $\mathbb{Z}^k$ конечно порожденная, то для любого конечного $r \geq 1$ действие $\gamma \rightarrow h^{-1}\rho(\gamma)h$, $\gamma \in \mathbb{Z}^k$, сколь угодно близко аппроксимируется в $G^r(\mathbb{Z}^k, \mathbb{S}^1)$ действием $\rho' \in G^\infty(\mathbb{Z}^k, \mathbb{S}^1)$, состоящим из поворотов с рациональным числом вращения. Поэтому действие $\tilde{\rho} = h\rho'h^{-1}$ является искомым действием с периодическими орбитами.

Применим полученный результат для некоторых слоений коразмерности один на трехмерном торе $\mathbb{T}^3$. В [17], [18] для слоения F коразмерности один с тривиальной группой голономии на $\mathbb{T}^3$ введен топологический инвариант – функционал вращения, представляющий пару чисел (λ, μ) . Если λ, μ рациональны, то все слои F компактны (двумерные торы). Если одно из чисел λ, μ иррационально, но λ, μ рационально зависимы, то все слои F являются цилиндрами. Если λ, μ рационально независимы (тогда оба числа иррациональны), то все слои слоения F гомеоморфны плоскости.

Следуя [9], будем говорить, что иррациональное число α удовлетворяет условию В, если

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \left(\sum_{\substack{a_i \geq K \\ 1 \leq i \leq n}} \ln(1 + a_i) \right) / \sum_{i=1}^n \ln(1 + a_i) = 0,$$

где $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$ – разложение α в непрерывную дробь. (Иррациональные числа α , удовлетворяющие условию В, рассматривались выше в лемме 3, где множество таких чисел обозначалось через A . В лемме 3 сформулированы основные свойства

таких чисел.) Назовем C^∞ -слоение F с тривиальной группой голономии на $\mathbb{T}^3$ *эрмановским слоением*, если одно из чисел λ, μ в его функционале вращения удовлетворяет условию В.

Обозначим через $G_2(\mathbb{T}^3)$ грассманово расслоение плоскостей, касательных к $\mathbb{T}^3$. Пусть $N^r(\mathbb{T}^3, G_2(\mathbb{T}^3))$ – множество сечений класса гладкости C^r расслоения $G_2(\mathbb{T}^3)$, наделенное топологией Уитни (оно совпадает с сильной и слабой топологией) [19]. Любое C^{r+1} -слоение F коразмерности один на $\mathbb{T}^3$ определяет C^r -векторное поле $\tau F \in N^r(\mathbb{T}^3, G_2(\mathbb{T}^3))$. Будем говорить, что два слоения F_1, F_2 *близки в C^r -топологии*, если $\tau F_1, \tau F_2$ близки в пространстве $N^r(\mathbb{T}^3, G_2(\mathbb{T}^3))$.

Усиленной C^r -леммой о замыкании для C^∞ -слоения коразмерности один F на $\mathbb{T}^3$ называется следующее утверждение: для любого $r \geq 0$ и любой окрестности $U(F) \subset N^r(\mathbb{T}^3, G_2(\mathbb{T}^3))$ слоения F существует C^∞ -слоение $\tilde{F} \in U(F)$, все слои которого являются двумерными торами.

ТЕОРЕМА 4. Пусть F – эрмановское C^∞ -слоение коразмерности один с тривиальной группой голономии на $\mathbb{T}^3$. Тогда для F имеет место C^r -лемма ($r \geq 1$) о замыкании.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим $\mathbb{T}^3$ в виде $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$, где $\mathbb{R}^3$ – трехмерное евклидово пространство с декартовыми координатами (x_1, x_2, x_3) , $\mathbb{Z}^3$ – трехмерная целочисленная решетка. Обозначим через $\mathbb{T}_i^2$ двумерный тор $x_i = 0, x_j \pmod{1}, j \neq i$ ($i = 1, 2, 3$), вложенный в $\mathbb{T}^3$. В [18] доказано, что с помощью гомотопного тождественному диффеоморфизма тора $\mathbb{T}^3$ можно перевести слоение с тривиальной группой голономии в слоение, трансверсальное торам $\mathbb{T}_1^2, \mathbb{T}_2^2$, и, следовательно, трансверсальное замкнутой кривой $\mathbb{T}_{12} = \mathbb{T}_1^2 \cap \mathbb{T}_2^2$. Не ограничивая общности, можно считать, что исходное слоение F удовлетворяет этому условию. Поскольку F трансверсально торам $\mathbb{T}_i^2$ ($i = 1, 2, 3$), и, по крайней мере, одно из чисел λ, μ функционала вращения F является иррациональным числом, поэтому одно из ограничений $F|_{\mathbb{T}_i^2}$ индуцирует диффеоморфизм $f_i: \mathbb{T}_{12} \rightarrow \mathbb{T}_{12}$ с иррациональным числом вращения. Отсюда и из тривиальности группы голономии слоения F вытекает, что диффеоморфизмы f_1, f_2 порождают C^∞ -действие $\rho \in G^\infty(\mathbb{Z}^2, \mathbb{S}^1)$.

Далее нам потребуется результат работы [16], который для удобства читателя мы приведем с деталями. Диффеоморфизм $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ называется *свободным*, если либо $g^{k_0} = \text{id}$ для некоторого натурального k_0 , либо g не имеет периодических точек. Действие, состоящее из свободных диффеоморфизмов, называется *свободным действием*. В [16] (теорема 2.1) показано, что если свободное действие состоит из C^r -диффеоморфизмов ($r \geq 2$) и конечно порождено, то оно топологически сопряжено действию из поворотов. Так как действие ρ индуцируется слоением с тривиальной группой голономии, то ρ свободное действие. Согласно [16] (теорема 2.1) ρ сопряжено действию из поворотов. В силу теоремы Маркова и Какутани (см. [9, с. 20]) в качестве сопрягающего преобразования можно взять сопрягающее преобразование любого образующего диффеоморфизма действия ρ .

Так как F эрмановское слоение, то ρ является C^∞ -действием. Поэтому существует C^∞ -диффеоморфизм $h: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, сопрягающий ρ с действием, состоящим из поворотов. Диффеоморфизм h продолжается до C^∞ -диффеоморфизма $\varphi: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, который переводит F в линейное слоение F_1 . Очевидно, F_1 можно аппроксимировать в C^r -топологии линейным слоением F_2 из двумерных торов. Тогда слоение $\tilde{F} = \varphi^{-1}(F_2)$ является искомым.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 4 обобщается для слоений на n -мерном торе T^n ($n \geq 4$), задаваемыми 1-формами Пфаффа вида

$$dx_n = \sum_{i=1}^{n-1} P_i(x_1, \dots, x_n) dx_i.$$

Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия

Поступило

03.10.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арансон С. Х., Жужома Е. В. О C^r -лемме о замыкании на поверхностях // УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 173–174.
- [2] Gutierrez C. On the C^r closing lemma for the flows on the torus T^2 // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1986. V. 6. P. 45–56.
- [3] Gutierrez C. A counter-example to a C^2 -closing lemma // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1987. V. 7. P. 509–530.
- [4] Peixoto M. M. Structural stability on two dimensional manifolds // Topology. 1962. V. 1. P. 101–120.
- [5] Pugh C. The closing lemma // Ann. of Math. 1967. V. 89. P. 956–1009.
- [6] Pugh C. Against the closing lemma // J. Differential Equations. 1975. V. 17. P. 435–443.
- [7] Peixoto M. L. The closing lemma for generalized recurrence in the plane // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V. 308. № 1. P. 143–158.
- [8] Арансон С. Х. О типичных бифуркациях диффеоморфизмов окружности // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 3. С. 388–394.
- [9] Herman M. Sur la conjugaison differentiable des diffeomorphismes du cercle a des rotation // IHES Publ. Math. 1979. V. 49. P. 5–233.
- [10] Nitecki Z. An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms. Cambridge: MIT Press, 1971.
- [11] Siegel C. Note on differential equations on the torus // Ann. of Math. 1945. V. 46. P. 423–428.
- [12] Медведев В. С. О новом типе бифуркаций на многообразиях // Матем. сб. 1980. Т. 113(155). № 3. С. 487–492.
- [13] Синай Я. Г., Ханин К. М. Гладкость сопряжений диффеоморфизмов окружности с поворотами // УМН. 1989. Т. 44. № 1. С. 57–82.
- [14] Katznelson Y., Ornstein D. The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1989. V. 9. № 4. P. 643–680.
- [15] Joccoz J. C. Conjugaison differentiable des diffeomorphismes du cercle dont le nombre de rotation verifie une condition diophantienne // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1984. V. 17. P. 333–359.
- [16] Imanishi H. On the theorem of Denjoy–Sacksteder for codimension one foliations without holonomy // J. Math. Kyoto Univ. 1974. V. 14. № 3. P. 607–634.
- [17] Локоть Т. В. Топологическая классификация слоений коразмерности один с тривиальными группами голономий класса C^2 на трехмерном торе // УМН. 1972. Т. 27. № 3.
- [18] Rosenberg H., Roussarie R. Topological equivalence of Reeb foliations // Topology. 1970. V. 9. № 3. P. 231–242.
- [19] Hirsch M. Differential Topology. Berlin: Springer Verlag, 1976.