Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Буслаев, С. Ф. Буслаева, О композициях дробно-линейных преобразований, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 332–338

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1507>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:40:05

УДК 517.5

О КОМПОЗИЦИЯХ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В. И. Буслаев, С. Ф. Буслаева

Статья посвящена вопросу предельного поведения композиций $(S_n \circ \dots \circ S_1)(z)$ и $(S_1 \circ \dots \circ S_n)(z)$ дробно-линейных преобразований $S_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$), неподвижные точки которых имеют пределы. В частном случае, когда дробно-линейные преобразования имеют вид $S_n(z) = \alpha_n(\beta_n + z)^{-1}$, последовательность композиций $(S_1 \circ \dots \circ S_n)(z)$ в точке $z = 0$ совпадает с последовательностью подходящих дробей формальной непрерывной дроби

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1 + \frac{\alpha_2}{\beta_2 + \dots}}.$$

В этой связи полученный результат находит применение и в вопросах сходимости формальных непрерывных дробей.

Библиография: 6 названий.

Основное содержание данной статьи заключено в следующих теоремах.

ТЕОРЕМА 1. Пусть неподвижные точки $p_{1,n}$ и $p_{2,n}$ последовательности невырожденных дробно-линейных преобразований $S_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{1,n} = p_1, \quad p_{2,n} \in K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus p_1 \quad (n \geq n_0), \quad \varliminf_{n \rightarrow \infty} |S'_n(p_{1,n})| > 1,$$

где K – некоторый компакт на сфере Римана, не содержащий p_1 . Тогда при всех $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus p_1$ существует предел композиции $(S_1 \circ \dots \circ S_n)(z)$ при $n \rightarrow \infty$, и этот предел не зависит от z .

Простой пример $S_n(z) = 2z + (-2)^{-n}$ показывает, что в точке p_1 (в данном примере $p_1 = 0$) предела композиций $(S_1 \circ \dots \circ S_n)(z)$ действительно не существует.

Как показывает следующая теорема, для композиций $(S_n \circ \dots \circ S_1)(z)$ дробно-линейных преобразований имеет место в некотором смысле двойственное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть неподвижные точки $p_{1,n}$ и $p_{2,n}$ последовательности невырожденных дробно-линейных преобразований $S_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,n} = p_2, \tag{1}$$

$$p_{1,n} \in K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus p_2 \quad (n \geq n_0), \tag{2}$$

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} |S'_n(p_{2,n})| < 1, \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00659.

где K – некоторый компакт на сфере Римана, не содержащий p_2 . Тогда при всех $z \in \overline{\mathbb{C}}$, за исключением некоторой точки z_0 , существует предел композиции $(S_n \circ \dots \circ S_1)(z)$ при $n \rightarrow \infty$, и этот предел равен p_2 .

В дополнение к теореме 2 можно добавить, что если условие (2) заменить более сильным условием

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{1,n} = p_1 \neq p_2,$$

то можно утверждать, что в исключительной точке z_0 также существует предел композиции $(S_n \circ \dots \circ S_1)(z)$, и этот предел равен p_1 .

Напомним, что неподвижная точка p дробно-линейного преобразования $S(z)$ называется “притягивающей”, если $|S'(p)| < 1$, “отталкивающей”, если $|S'(p)| > 1$, и “нейтральной”, если $|S'(p)| = 1$. Обратим внимание, что если в условиях теоремы 1 говорится о наличии предела “отталкивающих” неподвижных точек, то в условиях теоремы 2 говорится о наличии предела “притягивающих” неподвижных точек”. Легко проверяется, что для всякого дробно-линейного преобразования $S(z)$ имеет место равенство $S'(p_1)S'(p_2) = 1$, где $p_{1,2}$ – его неподвижные точки.

Как уже упоминалось и как более детально будет показано ниже, в применении к вопросам сходимости формальных непрерывных дробей теорема 1 может быть переформулирована в следующем виде.

ТЕОРЕМА 3. Пусть формальная непрерывная дробь

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1 + \frac{\alpha_2}{\beta_2 + \dots}}. \quad (4)$$

такова, что

$$0 < c_1 \leq |\alpha_n| \leq c_2 < \infty \quad (n \geq n_0), \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n - p\beta_n) = p^2, \quad (6)$$

где c_1, c_2 – некоторые положительные постоянные, p – некоторая фиксированная точка комплексной плоскости с модулем, строго превосходящим $c_2^{1/2}$. Тогда эта непрерывная дробь сходится.

Простым следствием теоремы 3 является хорошо известная в теории непрерывных дробей теорема Ван Флека [1].

ТЕОРЕМА ВАН ФЛЕКА. Пусть формальная непрерывная дробь (4) такова, что $\beta_n = 1$ ($n = 1, 2, \dots$),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \notin \left[-\infty, -\frac{1}{4}\right].$$

Тогда эта непрерывная дробь сходится.

Действительно, пусть выполняются предположения теоремы Ван Флека. Тогда неравенство (5) выполнено при $n \geq n_0$ с постоянными c_1, c_2 , как угодно близкими к $|\alpha|$. Так как $p_1 p_2 = -\alpha$, где $p_{1,2}$ – корни квадратного уравнения $\alpha - z - z^2 = 0$, и равенство

$|p_1| = |p_2|$ возможно только лишь при $\alpha \in [-\infty, -1/4]$, то один из корней (пусть для определенности p_1) по модулю строго больше $|\alpha|^{1/2}$. При этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n - p_1 \beta_n) = \alpha - p_1 = p_1^2.$$

Таким образом, условие (6) теоремы 3 также выполнено и, следовательно, непрерывная дробь по теореме 1 сходится.

Теоремы 1 и 2 будут получены как следствие соответствующих утверждений о предельном поведении произведений линейных операторов в двумерном векторном пространстве.

ЛЕММА 1. Пусть в двумерном векторном пространстве имеется последовательность невырожденных линейных операторов $\mathbf{A}_n$ ($n = 1, 2, \dots$), задаваемых в некотором фиксированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ равенствами $\mathbf{A}_n \mathbf{e}_1 = \alpha_n \mathbf{e}_1 + \gamma_n \mathbf{e}_2$, $\mathbf{A}_n \mathbf{e}_2 = \beta_n \mathbf{e}_1 + \delta_n \mathbf{e}_2$, где $\alpha_n \neq 0$ ($n \geq n_0$),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n \alpha_n^{-1} = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\beta_n \alpha_n^{-1}| < \infty, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\delta_n \alpha_n^{-1}| < 1.$$

Тогда существуют два линейно независимых вектора $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n^{-1} \mathbf{A}_n \cdots \mathbf{A}_1 \mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1, \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n^{-1} \mathbf{A}_n \cdots \mathbf{A}_1 \mathbf{f}_2 = 0, \quad (8)$$

где $D_n = [\mathbf{A}_n \cdots \mathbf{A}_1 \mathbf{f}_1]^1$ — первая координата вектора $\mathbf{A}_n \cdots \mathbf{A}_1 \mathbf{f}_1$.

Отметим, что лемма 1 представляет собой усиленный вариант классических теорем Пуанкаре [2] и Перрона [3] о рекуррентных соотношениях (см. также [4]). Действительно, векторная (более общая по сравнению с первоначальной) формулировка теорем Пуанкаре и Перрона (см. [5], [6]) накладывает на последовательность операторов $\mathbf{A}_n$ ($n = 1, 2, \dots$) более жесткие, по сравнению с леммой 1, требования:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \delta, \quad |\alpha| > |\delta|.$$

Отметим также, что утверждение, аналогичное лемме 1, имеет место и в векторном пространстве произвольной размерности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Из условий леммы следует, что при всех $n \geq n_1 \geq n_0$ $|\delta_n \alpha_n^{-1}| \leq 1 - \delta$ ($\delta > 0$), $|\beta_n \alpha_n^{-1}| \leq c$ ($c < \infty$), $|\gamma_n \alpha_n^{-1}| \leq \varepsilon$, где в качестве ε фиксируем число $\varepsilon = \delta^2(9c)^{-1}$. Будем обозначать через $u_n(\mathbf{f})$ и $v_n(\mathbf{f})$ первую и вторую координаты вектора $\mathbf{A}_n \cdots \mathbf{A}_1 \mathbf{f}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Если $|u_n(\mathbf{f})/v_n(\mathbf{f})| \geq c^{1/2} \varepsilon^{-1/2}$, то

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}(\mathbf{f})}{v_{n+1}(\mathbf{f})} \right| &= \left| \frac{\alpha_{n+1} u_n(\mathbf{f}) + \beta_{n+1} v_n(\mathbf{f})}{\gamma_{n+1} u_n(\mathbf{f}) + \delta_{n+1} v_n(\mathbf{f})} \right| \geq \frac{|u_n(\mathbf{f})| - c |v_n(\mathbf{f})|}{\varepsilon |u_n(\mathbf{f})| + (1 - \delta) |v_n(\mathbf{f})|} \\ &\geq \frac{1 - c(\varepsilon^{1/2} c^{-1/2})}{\varepsilon + (1 - \delta)(\varepsilon^{1/2} c^{-1/2})} \geq c^{1/2} \varepsilon^{-1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, если неравенство $|u_n(\mathbf{f})/v_n(\mathbf{f})| \geq c^{1/2} \varepsilon^{-1/2}$ выполнено при некотором $n_2 \geq n_1$, то оно выполнено при всех $n \geq n_2$.

В качестве вектора $\mathbf{f}_1$ возьмем вектор $\mathbf{f}_1 = \mathbf{A}_1^{-1} \dots \mathbf{A}_{n_1}^{-1} \mathbf{e}_1$. Тогда $u_{n_1}(\mathbf{f}_1) = 1$, $v_{n_1}(\mathbf{f}_1) = 0$. По доказанному $|u_n(\mathbf{f}_1)/v_n(\mathbf{f}_1)| \geq c^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$ при всех $n \geq n_1$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} |u_n(\mathbf{f}_1)| &= |\alpha_n u_{n-1}(\mathbf{f}_1) + \beta_n v_{n-1}(\mathbf{f}_1)| \geq (1 - c(\varepsilon^{1/2}c^{-1/2}))|\alpha_n| \cdot |u_{n-1}(\mathbf{f}_1)| \\ &\geq \left(1 - \frac{\delta}{3}\right)|\alpha_n| \cdot |u_{n-1}(\mathbf{f}_1)| \geq \dots \geq \left(1 - \frac{\delta}{3}\right)^{n-n_1} |\alpha_n \dots \alpha_{n-n_1+1}| \cdot |u_{n_1}(\mathbf{f}_1)| \\ &= \left(1 - \frac{\delta}{3}\right)^{n-n_1} |\alpha_n \dots \alpha_{n-n_1+1}|. \end{aligned} \quad (9)$$

Покажем теперь, что найдется вектор $\mathbf{f}_2$, для которого $|u_n(\mathbf{f}_2)/v_n(\mathbf{f}_2)| \leq c^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$ при всех $n \geq n_1$. Выберем из последовательности векторов

$$\mathbf{f}^k = \mathbf{A}_1^{-1} \dots \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{e}_2 \|\mathbf{A}_1^{-1} \dots \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{e}_2\|^{-1}$$

сходящуюся подпоследовательность

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{f}^{k_l} = \mathbf{f}_2.$$

Предположим, что $|u_n(\mathbf{f}_2)/v_n(\mathbf{f}_2)| > c^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$ при некотором $n = n_2 \geq n_1$. Возьмем вектор $\mathbf{f}^{k_l}$ ($k_l > n_2$) настолько близким к $\mathbf{f}_2$, чтобы и $|u_{n_2}(\mathbf{f}^{k_l})/v_{n_2}(\mathbf{f}^{k_l})| > c^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$. Но тогда по доказанному $|u_n(\mathbf{f}^{k_l})/v_n(\mathbf{f}^{k_l})| \geq c^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$ при всех $n \geq n_2$ и, в частности, при $n = k_l$, что невозможно, так как по построению

$$\begin{aligned} u_{k_l}(\mathbf{f}^{k_l}) &= [\mathbf{A}_{k_l} \dots \mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_1^{-1} \dots \mathbf{A}_{k_l}^{-1} \mathbf{e}_2)]^1 \|\mathbf{A}_1^{-1} \dots \mathbf{A}_{k_l}^{-1} \mathbf{e}_2\|^{-1} \\ &= [\mathbf{e}_2]^1 \|\mathbf{A}_1^{-1} \dots \mathbf{A}_{k_l}^{-1} \mathbf{e}_2\|^{-1} = 0, \quad v_{k_l}(\mathbf{f}^{k_l}) \neq 0. \end{aligned}$$

Полученное противоречие показывает, что при всех $n \geq n_1$ будет выполнено $|u_n(\mathbf{f}_2)/v_n(\mathbf{f}_2)| \leq c^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} |v_n(\mathbf{f}_2)| &= |\gamma_n u_{n-1}(\mathbf{f}_2) + \delta_n v_{n-1}(\mathbf{f}_2)| \leq (\varepsilon(c^{1/2}\varepsilon^{-1/2}) + (1 - \delta))|\alpha_n| \cdot |v_{n-1}(\mathbf{f}_2)| \\ &\leq \left(1 - \frac{2\delta}{3}\right)|\alpha_n| \cdot |v_{n-1}(\mathbf{f}_2)| \leq \dots \\ &\leq \left(1 - \frac{2\delta}{3}\right)^{n-n_1} |\alpha_n \dots \alpha_{n-n_1+1}| \cdot |v_{n_1-1}(\mathbf{f}_2)|, \\ |u_n(\mathbf{f}_2)| &\leq c^{1/2}\varepsilon^{-1/2} |v_n(\mathbf{f}_2)| \leq c^{1/2}\varepsilon^{-1/2} \left(1 - \frac{2\delta}{3}\right)^{n-n_1} |\alpha_n \dots \alpha_{n-n_1+1}| \cdot |v_{n_1-1}(\mathbf{f}_2)|. \end{aligned}$$

Сравнивая последние два неравенства с (9), получаем (8).

Докажем теперь (7), т.е. докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n(\mathbf{f}_1)}{u_n(\mathbf{f}_1)} = 0.$$

Для любого сколь угодно малого $\tau > 0$ при всех $n \geq n(\tau)$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{v_n(\mathbf{f}_1)}{u_n(\mathbf{f}_1)} \right| &= \left| \frac{\gamma_n u_{n-1}(\mathbf{f}_1) + \delta_n v_{n-1}(\mathbf{f}_1)}{\alpha_n u_{n-1}(\mathbf{f}_1) + \beta_n v_{n-1}(\mathbf{f}_1)} \right| \leq \frac{\tau |u_{n-1}(\mathbf{f}_1)| + (1 - \delta) |v_{n-1}(\mathbf{f}_1)|}{|u_{n-1}(\mathbf{f}_1)| - c(\varepsilon^{1/2}c^{-1/2}) |u_{n-1}(\mathbf{f}_1)|} \\ &\leq \frac{\tau + (1 - \delta) |v_{n-1}(\mathbf{f}_1)/u_{n-1}(\mathbf{f}_1)|}{1 - \delta/3}. \end{aligned}$$

Обозначая через Λ подпоследовательность натуральных чисел, по которой достигается верхний предел

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{v_n(\mathbf{f}_1)}{u_n(\mathbf{f}_1)} \right| = \rho,$$

из последнего неравенства имеем

$$\rho \geq \overline{\lim}_{n \in \Lambda} \left| \frac{v_{n-1}(\mathbf{f}_1)}{u_{n-1}(\mathbf{f}_1)} \right| \geq \overline{\lim}_{n \in \Lambda} \left[\left(1 - \frac{\delta}{3}\right) \left| \frac{v_n(\mathbf{f}_1)}{u_n(\mathbf{f}_1)} \right| - \tau \right] (1 - \delta)^{-1} = \left[\left(1 - \frac{\delta}{3}\right) \rho - \tau \right] (1 - \delta)^{-1}.$$

Ввиду произвольной малости τ это неравенство возможно лишь при $\rho = 0$. Таким образом,

$$0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{v_n(\mathbf{f}_1)}{u_n(\mathbf{f}_1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{v_n(\mathbf{f}_1)}{u_n(\mathbf{f}_1)} \right|,$$

т.е. равенство (7) доказано.

Из равенств (7) и (8) следует также и линейная независимость векторов $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть в двумерном векторном пространстве имеется последовательность невырожденных линейных операторов $\mathbf{A}_n$ ($n = 1, 2, \dots$), задаваемых в некотором фиксированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ равенствами $\mathbf{A}_n \mathbf{e}_1 = \alpha_n \mathbf{e}_1 + \gamma_n \mathbf{e}_2$, $\mathbf{A}_n \mathbf{e}_2 = \beta_n \mathbf{e}_1 + \delta_n \mathbf{e}_2$, где $\alpha_n \neq 0$ ($n \geq n_0$),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \alpha_n^{-1} = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\gamma_n \alpha_n^{-1}| < \infty, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\delta_n \alpha_n^{-1}| < 1.$$

Тогда для всякого вектора $\mathbf{f}$ вида $\mathbf{f} = \mathbf{e}_1 + \xi \mathbf{e}_2$ последовательность векторов $d_n \mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_n \mathbf{f}$ ($n = 1, 2, \dots$), где d_n – некоторая фиксированная числовая последовательность, имеет ненулевой предел, и этот предел не зависит от ξ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В сопряженном векторном пространстве линейных функционалов введем базис $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*$, сопряженный исходному, т.е. $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^* \rangle = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Тогда для сопряженных операторов $\mathbf{A}_n^*$ ($n = 1, 2, \dots$) имеем $\mathbf{A}_n^* \mathbf{e}_1^* = \alpha_n \mathbf{e}_1^* + \beta_n \mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{A}_n^* \mathbf{e}_2^* = \gamma_n \mathbf{e}_1^* + \delta_n \mathbf{e}_2^*$, и, следовательно, последовательность операторов $\mathbf{A}_n^*$ ($n = 1, 2, \dots$) удовлетворяет всем условиям леммы 1. Поэтому в сопряженном пространстве найдутся два вектора $\mathbf{g}_1^*$ и $\mathbf{g}_2^*$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n \mathbf{A}_n^* \cdots \mathbf{A}_1^* \mathbf{g}_1^* = \mathbf{e}_1^*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \mathbf{A}_n^* \cdots \mathbf{A}_1^* \mathbf{g}_2^* = 0,$$

где $d_n = ([\mathbf{A}_n^* \cdots \mathbf{A}_1^* \mathbf{g}_1^*]^1)^{-1}$. Тогда для всякого $\mathbf{g}^* = \zeta_1 \mathbf{g}_1^* + \zeta_2 \mathbf{g}_2^*$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle d_n \mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_n \mathbf{f}, \mathbf{g}^* \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \langle \mathbf{f}, \mathbf{A}_n^* \cdots \mathbf{A}_1^* \mathbf{g}^* \rangle = \langle \mathbf{f}, \zeta_1 \mathbf{e}_1^* \rangle = \langle \mathbf{e}_1 + \xi \mathbf{e}_2, \zeta_1 \mathbf{e}_1^* \rangle \\ &= \langle \mathbf{e}_1, \zeta_1 \mathbf{e}_1^* \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \zeta_1 \mathbf{e}_1^* + \zeta_2 \mathbf{e}_2^* \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{T}^* \mathbf{g}^* \rangle = \langle \mathbf{T} \mathbf{e}_1, \mathbf{g}^* \rangle, \end{aligned}$$

где $\mathbf{T}^*$ – линейный оператор, переводящий $\mathbf{g}_1^*$ в $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{g}_2^*$ в $\mathbf{e}_2^*$. Так как данное равенство справедливо для любого сопряженного вектора $\mathbf{g}^*$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n \mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_n \mathbf{f}$$

существует и равен $\mathbf{T} \mathbf{e}_1$. Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $p_2 = \infty$. В противном случае этого можно добиться переходом к последовательности дробно-линейных преобразований $T_n(z) = (Q^{-1} \circ S_n \circ Q)(z)$ ($n = 1, 2, \dots$), где Q – некоторое фиксированное дробно-линейное преобразование такое, что $Q(\infty) = p_2$.

Пусть $S_n(z) = (\alpha_n z + \beta_n) / (\gamma_n z + \delta_n)$. Рассмотрим последовательность линейных операторов A_n ($n = 1, 2, \dots$), задаваемых в некотором фиксированном базисе e_1, e_2 равенствами $A_n e_1 = \alpha_n e_1 + \gamma_n e_2$, $A_n e_2 = \beta_n e_1 + \delta_n e_2$, и покажем, что эта последовательность операторов удовлетворяет всем условиям леммы 1. Из равенств

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n - \delta_n}{p_{2,n}} + \frac{\beta_n}{p_{2,n}^2}, \quad (10)$$

$$\beta_n = (\delta_n - \alpha_n)p_{1,n} + \gamma_n p_{1,n}^2, \quad (11)$$

и условий (1), (2) теоремы 2 следует, что

$$\gamma_n = o(m_n), \quad \beta_n = O(m_n), \quad \text{где } m_n = \max\{|\alpha_n|, |\delta_n|\}.$$

С учетом этих оценок на γ_n, β_n , условия (3) теоремы 2 и равенства $S'(p_{1,n})S'(p_{2,n}) = 1$ имеем

$$\begin{aligned} 1 &> \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S'_n(p_{2,n})| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S'_n(p_{1,n})|^{-1} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|\gamma_n p_{1,n} + \delta_n|^2}{|\alpha_n \delta_n - \gamma_n \beta_n|} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|\delta_n^2| + o(m_n^2)}{|\alpha_n \delta_n| + o(m_n^2)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\delta_n \alpha_n^{-1}| < 1.$$

Полученные оценки показывают, что для последовательности операторов A_n ($n = 1, 2, \dots$) выполнены все условия леммы 1.

Заметим, что $(S_n \circ \dots \circ S_1)(z) = [A_n \dots A_1 z]^1 ([A_n \dots A_1 z]^2)^{-1}$, где z – двумерный вектор с координатами $(z, 1)$ (при $z = \infty$ $z = (0, 1)$). Пусть f_1 и f_2 – два двумерных вектора, для которых справедливы предельные равенства (7) и (8) из леммы 1. Тогда для всех $z \neq z_0$, где $z_0 = [f_2]^1 ([f_2]^2)^{-1}$, z представляется в виде $z = \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2$ ($\xi_1 \neq 0$) и по лемме 1

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \circ \dots \circ S_1)(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [D_n^{-1} A_n \dots A_1 z]^1 ([D_n^{-1} A_n \dots A_1 z]^2)^{-1} \\ &= [\xi_1 e_1]^1 ([\xi_1 e_1]^2)^{-1} = \infty. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $p_1 = 0$. Рассмотрим последовательность операторов A_n ($n = 1, 2, \dots$), определенных точно так же, как и в доказательстве теоремы 2. Из равенств (10), (11) и условий теоремы 1 теперь следует, что $\beta_n = o(m_n)$, $\gamma_n = O(m_n)$ и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\delta_n \alpha_n^{-1}| < 1,$$

т.е. для последовательности операторов A_n ($n = 1, 2, \dots$) выполнены все условия леммы 2. Таким образом, при всех $z \neq p_1$, т.е. при всех $z \neq e_2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_1 \circ \dots \circ S_n)(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} [d_n A_1 \dots A_n z]^1 ([d_n A_1 \dots A_n z]^2)^{-1}$$

и последний предел существует по лемме 2. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Как уже отмечалось, последовательность подходящих дробей непрерывной дроби (4) совпадает с последовательностью композиций $(S_1 \circ \dots \circ S_n)(0)$ ($n = 1, 2, \dots$) дробно-линейных преобразований $S_n(z) = \alpha_n/(\beta_n + z)$. Поэтому достаточно показать, что для этой последовательности дробно-линейных преобразований условия теоремы 1 являются следствиями условий теоремы 3.

Неподвижные точки этих дробно-линейных преобразований вычисляются по формуле $p_n = (-\beta_n \pm (\beta_n^2 + 4\alpha_n)^{1/2})2^{-1}$. Подставляя в эту формулу выражение для β_n , найденное из (6): $\beta_n = \alpha_n p^{-1} - p + o(1)$, и учитывая, что $|p| > |\alpha_n p^{-1}|$ ($n \geq n_0$), имеем

$$p_n = (p - \alpha_n p^{-1} \pm (p + \alpha_n p^{-1}))2^{-1} + o(1),$$

т.е. $p_{1,n} = p + o(1)$, $p_{2,n} = -\alpha_n p^{-1} + o(1)$. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{1,n} = p, \quad |p - p_{2,n}| \geq |p| - |\alpha_n p^{-1} + o(1)| > 0 \quad (n \geq n_1),$$

а с учетом неравенств (5) справедливо также и неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S'_n(p_{1,n})| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_n}{(\beta_n + p_{1,n})^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_n|}{|\alpha_n p^{-1} + o(1)|^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p^2}{\alpha_n} \right| > 1,$$

т.е. все предположения теоремы 1 выполнены. Теорема 3 доказана.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Институт математики НАН Украины

Поступило
10.11.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Van Vleck E. B. On the convergence of algebraic continued fractions whose coefficients have limiting values // Trans. Amer. Math. Soc. 1904. V. 5. P. 253–262.
- [2] Poincaré H. Sur les équations linéaires aux différentielles et aux différences finies // Amer. J. Math. 1885. V. 7. P. 203–258.
- [3] Перрон О. Об одной теореме А. Пуанкаре // J. Reine Angew. Math. 1909. V. 136. P. 17–37; О линейном разностном уравнении А. Пуанкаре // J. Reine Angew. Math. 1910. V. 137. P. 6–64.
- [4] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
- [5] Фрейман Г. А. О теоремах Пуанкаре и Перрона // УМН. 1957. Т. 12. №3. С. 241–246.
- [6] Maté A., Nevai P. A generalization of Poincaré's theorem for recurrence equations // J. Approx. Theory. 1990. V. 63. P. 92–97.