Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Брюно, В. И. Парусников, Сравнение разных обобщений цепных дробей, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 339–348

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1508>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:48:47

УДК 511.36+514.172.45

СРАВНЕНИЕ РАЗНЫХ ОБОБЩЕНИЙ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

А. Д. Брюно, В. И. Парусников

В настоящей работе по матричным алгоритмам Эйлера, Якоби, Пуанкаре, Бруна и по двум новым вычисляются разложения для двух векторов L , связанных с двумя кубическими формами Давенпорта g_1 и g_2 . Для этих форм g_1 и g_2 ранее были вычислены их многогранники Клейна. Теперь целочисленные “подходящие дроби” P_k , получаемые указанными алгоритмами, рассматриваются по отношению к многогранникам Клейна. Изучаются также периоды этих разложений. И с этих позиций оценивается качество алгоритма. Оказалось, что хорошими можно признать только алгоритмы Якоби и Брюно.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Алгоритм разложения числа в правильную цепную дробь [1], [2] обладает многими замечательными свойствами. В том числе:

- 1) он прост;
- 2) он дает наилучшие рациональные приближения к числу;
- 3) он периодичен для квадратичных иррациональностей.

В XIX и XX веках делались многочисленные попытки обобщить этот алгоритм на векторы. Но пока так и не найден алгоритм для пары чисел, обладающий свойствами 1), 2) и свойством 3') – периодичностью для кубических иррациональностей.

Среди этих обобщений выделяется группа, которую можно назвать “матричные алгоритмы”. К ним относятся алгоритмы Эйлера [3], Якоби [4], Пуанкаре [5] и Бруна [6]. Кроме того, авторы предлагают еще два новых алгоритма – алгоритмы Брюно и Парусникова.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задан вектор $L = (\alpha, \beta, \gamma)$. Матричные алгоритмы приводят к последовательности целочисленных векторов $P_k = (p_k, q_k, r_k)$, которые дают совместные рациональные приближения p_k/r_k и q_k/r_k к числам α/γ и β/γ соответственно.

С другой стороны, Клейн [7] предложил плоскую геометрическую интерпретацию обычных цепных дробей и ее пространственное обобщение (см. [8]). А именно, пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы три плоскости $\mathcal{L}_i = \{X : \langle L_i, X \rangle = 0\}$, $i = 1, 2, 3$, пересекающиеся в нуле, $X = 0$. Здесь $X, L_i \in \mathbb{R}^3$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение. Каждому набору $\Sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, где $\sigma_i = \pm 1$, соответствует свой октант $\theta_\Sigma = \{X : \sigma_i \langle L_i, X \rangle \geq 0, i = 1, 2, 3\}$, ограниченный этими плоскостями. В каждом октанте θ_Σ рассматривается выпуклая оболочка K_Σ всех целочисленных точек $X \in \theta_\Sigma$, $X \neq 0$. Ее граница ∂K_Σ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 93–01–16045 и № 96–01–01441, и Международного научного фонда, грант M3W300.

является выпуклой двумерной многогранной поверхностью, состоящей из вершин, ребер и граней. Ее вершины должны давать наилучшие рациональные приближения для линейных форм $\langle L_i, X \rangle$.

Рассмотрим теперь кубическую однородную форму $g(X)$, являющуюся произведением трех вещественных линейных форм, $g(X) = \langle L_1, X \rangle \langle L_2, X \rangle \langle L_3, X \rangle$. Положим $\Delta = \det(L_1 L_2 L_3)$ и $\mu(g)$ – наименьшее значение величины $|g\Delta^{-1}|$ на целочисленных X , $X \neq 0$. Векторы мы записываем как матрицы-строки, но в матричных операциях рассматриваем как матрицы-столбцы. Давенпорт [9] доказал, что $\mu(g) \leq 1/7$ и $\mu(g) = 1/7$ только для формы g_1 , у которой

$$L_i = (1, \lambda_i, \lambda_i^2), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где λ_i – корни уравнения

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0, \quad (2)$$

и для эквивалентных форм. Если их исключить из рассмотрения, то $\mu(g) \leq 1/9$ и $\mu(g) = 1/9$ только для формы g_2 , у которой L_i имеют вид (1), но λ_i есть корни уравнения

$$\lambda^3 - 3\lambda - 1 = 0 \quad (3)$$

и для эквивалентных форм. В работе [8] вычислены многогранники Клейна ∂K_Σ для форм g_1 и g_2 и изучены некоторые их свойства.

В настоящей работе в качестве вектора L берется вектор L'_3 для форм h_1 и h_2 , эквивалентных формам Давенпорта g_1 и g_2 . Этот вектор L'_3 разлагается по разным алгоритмам, и мы следим, как по отношению к многогранникам Клейна располагаются “подходящие дроби” P_k , даваемые этими алгоритмами. Особенно нас интересуют значения форм h_i на этих векторах P_k и периоды T этих разложений, для которых $TL = tL$, где T – целочисленная унимодулярная матрица и $t \in \mathbb{R}$. По значению форм h_i определяется положение точки P_k относительно многогранников Клейна ∂K_Σ , а период T сравнивается с элементарными автоморфизмами форм h_i , изученными в [8]. Как оказалось, хорошими можно признать только два случая алгоритма Якоби и алгоритм Брюно.

При этом для формы h_2 алгоритмы Пуанкаре и Парусникова не периодичны, а алгоритм Пуанкаре вообще расходится.

2. Алгоритм Евклида. Векторы записываются строчкой, но при умножении на матрицы рассматриваются как матрицы-столбцы. Пусть два числа α, β упорядочены по величине $\alpha \geq \beta > 0$. Положим $a = [\alpha/\beta]$ и $\alpha' = \alpha - a\beta$, $\beta' = \beta$. Получим новую упорядоченную пару $\alpha_1 = \beta' > \beta_1 = \alpha'$. Если $\alpha' \neq 0$, то можно сделать аналогичный следующий шаг и т.д. Если ввести векторы $L_0 = L = (\alpha, \beta)$, $L_k = (\alpha_k, \beta_k)$, $k > 1$, то этот шаг можно записать в виде

$$L_k = M_k L_{k-1}, \quad (4)$$

где матрица

$$M_k = R_k S_k, \quad R_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_k = \begin{pmatrix} 1 & -a_{k-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Получаем разложение

$$L_k = M_k \cdots M_1 L \stackrel{\text{def}}{=} N_k^{-1} L,$$

т.е. $N_k^{-1} = M_k \cdots M_1$ и $L = N_k L_k$. Здесь N_k – целочисленная унимодулярная матрица. Положим $P_{k-1} = N_k E_1$, где $P_k = (p_k, q_k)$ и $E_1 = (1, 0)$. Тогда рациональные числа

p_k/q_k есть подходящие дроби числа α/β . Описанная процедура является алгоритмом Евклида для чисел α и β [1].

Если положить

$$a_0 = \left[\frac{\alpha}{\beta} \right], \quad a_1 = \left[\frac{1}{\alpha/\beta - a_0} \right], \quad a_2 = \left[\frac{1}{1/(\alpha/\beta - a_0) - a_1} \right]$$

и т.д., то получим разложение числа α/β в цепную дробь [2]

$$\frac{\alpha}{\beta} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

Очевидно, что этот алгоритм аналогичен предыдущему [1]. Отметим некоторые его свойства:

- 1) простота;
- 2) подходящие дроби p_k/q_k дают наилучшие рациональные приближения числа α/β ;
- 3) если α/β – рациональное число, то алгоритм заканчивается за конечное число шагов;
- 4) если α/β – иррациональное число, то алгоритм состоит из бесконечного числа шагов и $L_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$;
- 5) если α/β – квадратичная иррациональность, то алгоритм периодичен, иными словами $L_l = L_m t$, где $m > l$, t – некоторое положительное число; поскольку

$$L = N_l L_l = N_m L_m = N_m L_l t^{-1},$$

то $TL = Lt$, где матрица периода

$$T = N_m N_l^{-1}. \quad (6)$$

3. Трехмерные матричные обобщения. Под этим подразумеваются алгоритмы, которые по заданному вектору $L = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ позволяют последовательно вычислять векторы $L_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ по формулам (4), (5), причем матрица S_k определяется по вектору L_{k-1} . При этом матрица S_k является верхней треугольной с единицами по диагонали, и, кроме того, все элементы ее обратной матрицы S_k^{-1} неотрицательны; R_k – матрица-подстановка. Были предложены следующие обобщения алгоритма Евклида.

Алгоритм Эйлера [3]. Пусть три числа α, β, γ упорядочены по величине:

$$\alpha \geq \beta \geq \gamma > 0. \quad (7)$$

Положим

$$c = \left[\frac{\alpha}{\gamma} \right], \quad b = \left[\frac{\beta}{\gamma} \right] \quad (8)$$

и сделаем преобразование к тройке $(\alpha', \beta', \gamma')$:

$$\alpha' = \alpha - c\gamma, \quad \beta' = \beta - b\gamma, \quad \gamma' = \gamma. \quad (9)$$

Затем числа α', β', γ' упорядочим по величине, получим $\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \gamma_1 > 0$ и т.д. То есть в формулах (4), (5) матрица

$$S_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c_k \\ 0 & 1 & -b_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

а R_k – некоторая матрица-подстановка.

Если $\gamma = 0$, то 2-вектор (α, β) разлагается по алгоритму Евклида, т.е.

$$S_k = \begin{pmatrix} 1 & -a_k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом $M_0 = R_0$ – это матрица-подстановка, упорядочивающая исходную тройку чисел α, β, γ . Поскольку в этом алгоритме производится упорядочивание чисел $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ по их величине, то разложение не зависит от начального расположения чисел α, β, γ .

Алгоритм Якоби [4]. Этот алгоритм похож на алгоритм Эйлера, но в нем положительные числа не упорядочиваются по величине. Если $\gamma \neq 0$, то делаем замену (8), (9). Затем делается перестановка $\alpha_1 = \gamma', \beta_1 = \alpha', \gamma_1 = \beta'$ и процедура продолжается. То есть матрица S_k имеет вид (10), а

$$R_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\gamma = 0$, то к (α, β) применяется алгоритм Евклида.

Для трех заданных чисел $\tilde{\alpha} \geq \tilde{\beta} \geq \tilde{\gamma} > 0$ их разложение по алгоритму Якоби зависит от их начальной упорядоченности. А именно, четыре начальных расположения

$$(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}), \quad (11)$$

$$(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}), \quad (12)$$

$$(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}), \quad (13)$$

$$(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \quad (14)$$

могут давать различные разложения. Два других расположения $(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\alpha})$ и $(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha})$ уже на втором шаге сводятся соответственно к случаям (11) и (13). Поэтому будем различать четыре случая (11)–(14) алгоритма Якоби.

Алгоритм Пуанкаре [5]. Для тройки (7) положим

$$\alpha' = \alpha - \beta, \quad \beta' = \beta - \gamma, \quad \gamma' = \gamma.$$

Затем числа α', β', γ' упорядочиваются по величине: $\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \gamma_1 > 0$ и процедура продолжается. Здесь в (4), (5)

$$S_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и R_k – матрица-подстановка.

Алгоритм Бруна [6]. Для тройки (7) положим

$$\alpha' = \alpha - \beta, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma.$$

Затем числа α', β', γ' упорядочиваются по величине: $\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \gamma_1 > 0$ и процедура продолжается. То есть в (4), (5)

$$S_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

R_k – матрица-подстановка.

Кроме этих четырех алгоритмов авторы предлагают еще два новых.

Алгоритм Брюно. Для тройки (7) положим

$$\alpha = \alpha' + d\beta' + c\gamma', \quad \beta = \beta' + b\gamma', \quad \gamma = \gamma',$$

где $b = [\beta/\gamma]$, $c = [\alpha/\gamma]$, $d = [(\alpha - c\gamma)/\beta']$. Здесь всегда $\alpha' < \beta' < \gamma'$, поэтому в (5) всегда

$$R_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & d & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Этот алгоритм близок к алгоритму Эйлера, отличаясь лишь поправкой $d\beta'$, обеспечивающей неравенство $\alpha' < \beta'$.

Алгоритм Парусникова. Для упорядоченной тройки (7) положим

$$\alpha' = \alpha - a\beta, \quad \beta' = \beta - b\gamma, \quad \gamma' = \gamma,$$

где $a = [\alpha/\beta]$, $b = [\beta/\gamma]$. Затем числа α', β', γ' упорядочиваются по величине: $\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \gamma_1 > 0$. Таким образом, в (5)

$$S_k = \begin{pmatrix} 1 & -a_k & 0 \\ 0 & 1 & -b_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и R_k – матрица-подстановка.

Поскольку в алгоритмах Пуанкаре, Бруна, Брюно и Парусникова числа α, β, γ упорядочиваются по величине, то разложения этих алгоритмов не зависят от начального порядка этих чисел.

Совсем другие обобщения цепных дробей предложили Эрмит и Минковский и развивали их последователи. Но это не матричные алгоритмы в указанном выше смысле, поэтому здесь они не рассматриваются.

4. Многогранники Клейна. Они были введены в [7], подробнее их свойства см. в [8]. Рассмотрим два n -мерных вещественных пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}_*^n$ с координатами X и U соответственно и со скалярным произведением $\langle U, X \rangle = u_1x_1 + \dots + u_nx_n$ для $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}_*^n$ и $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Пусть в $\mathbb{R}_*^n$ заданы n линейно независимых векторов $L_1, \dots, L_n$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ векторам L_i соответствуют n плоскостей $\langle L_i, X \rangle = 0$. Они делят пространство $\mathbb{R}^n$ на 2^n выпуклых конусов

$$\mathcal{O}_\Sigma = \{X : \langle \sigma_i L_i, X \rangle \geq 0, i = 1, \dots, n\}, \quad (15)$$

соответствующих каждому набору $\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, где $\sigma_i = \pm 1$.

В конусе θ_Σ рассмотрим все целочисленные точки $X \in \mathbb{Z}^n$, $X \neq 0$. Пусть K_Σ – их выпуклая оболочка. Ее граница ∂K_Σ это $(n-1)$ -мерная многогранная поверхность, которую называют *многогранником Клейна*.

Поверхность ∂K_Σ состоит из граней $\Gamma_j^{(d)}$ разных размерностей d , где $d = 0, 1, \dots, n-1$. То есть $\Gamma_j^{(0)}$ есть вершины, $\Gamma_j^{(1)}$ – ребра, $\dots$, $\Gamma_j^{(n-1)}$ – гипергрani.

В точке $X \in \theta_\Sigma \cap \mathbb{Z}^n$, $X \neq 0$, линейные формы $\langle L_1, X \rangle, \dots, \langle L_n, X \rangle$ имеют *относительный минимум* (см. [8]), если для любой другой точки $X' \in \theta_\Sigma \cap \mathbb{Z}^n$ выполнено хотя бы одно неравенство $|\langle L_i, X' \rangle| > |\langle L_i, X \rangle|$. Другими словами, в конусе θ_Σ не существует такой целочисленной точки X' , что множество $X' + \theta_\Sigma$ (т.е. конус θ_Σ , сдвинутый на вектор X') содержит точку X . Легко видеть, что все целочисленные точки X , лежащие на многограннике Клейна ∂K_Σ , дают относительные минимумы. Но могут быть и внутренние точки X многогранника K_Σ , дающие относительные минимумы.

Рассмотрим теперь произведение линейных форм

$$f(X) = \langle L_1, X \rangle \langle L_2, X \rangle \cdots \langle L_n, X \rangle. \quad (16)$$

Форме $f(X)$ соответствуют все объекты, указанные выше для совокупности линейных форм $\langle L_i, X \rangle$, т.е. конусы θ_Σ , многогранники K_Σ и т.д. Форма $f(X)$ эквивалентна форме $g(X)$, если существует такая унимодулярная матрица C , что

$$f(X) = \delta g(CX), \quad \delta = \text{const} \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что у эквивалентных форм многогранники Клейна изоморфны. Назовем замену $X = CY$ *автоморфизмом* формы $f(X)$, если

$$f(X) = \delta f(CX), \quad \delta = \text{const} \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что такой автоморфизм переводит совокупность многогранников $\{K_\Sigma\}$ в себя. Автоморфизмы формы f образуют группу, которую обозначим $G(f)$. Для описания совокупности многогранников Клейна $\{\partial K_\Sigma\}$ формы (16) достаточно указать группу $G(f)$ и фундаментальную область H множества $\{\partial K_\Sigma\}$ относительно группы $G(f)$, т.е. $H = \{\partial K_\Sigma\}/G(f)$. При этом фундаментальная область может состоять из нескольких компонент связности.

Значение формы (16) в целочисленных точках $X \in K_\Sigma$ может служить мерой приближения точки X к границе октанта θ_Σ . Очевидно, что наиболее близкими к $\partial \theta_\Sigma$ будут точки, лежащие на многограннике Клейна ∂K_Σ и внутренние для K_Σ точки относительных минимумов. Если ∂K_Σ обладает компактной фундаментальной областью H , то все такие точки легко описать, рассмотрев конус с вершиной в нуле, натянутый на H . Наша цель – посмотреть, как расположены по отношению к многогранникам Клейна целочисленные векторы

$$X = P_k^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} N_k E_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

полученные по различным матричным алгоритмам, и с этой точки зрения оценить, в какой степени тот или иной алгоритм обладает аналогами свойств 2)–5) алгоритма Евклида (свойством 1) все они обладают). Аналог свойства 5) – периодичность для кубических иррациональностей. Предполагается, что хороший алгоритм должен давать периодичность. Более того, среди автоморфизмов многогранника ∂K_Σ можно выделить

элементарные, при которых образ фундаментальной области имеет с ней хотя бы одну общую точку границы. Предполагается, что у хорошего алгоритма период просто выражается через элементарные автоморфизмы. А именно, либо период, либо его квадрат является элементарным автоморфизмом.

В настоящей работе в качестве формы $f(X)$ были взяты формы Давенпорта $-h_1$ и h_2 , многогранники Клейна которых были вычислены в [8]. Для вектора $L = L_3''$ вычислялись разложения $L = N_k L_k$ и вектора (17), а на них – значения форм $l_i = \langle L_i, X \rangle$ и их произведения $l_1 l_2 l_3$. При этом вычислялись нормированные векторы L_k/α_k и сравнивались с предыдущими. Так находился период по формуле (6).

5. Разложение вектора $L = L_3''$ для формы $-h_1$. Имеем (подробнее о форме h_1 см. [8])

$$-h_1(X) = \langle L_1'', X \rangle \langle L_2'', X \rangle \langle L_3'', X \rangle,$$

где

$$L_1'' = (1, -\lambda_3, -1 - \lambda_2) = (1, -1.2469796, -0.5549581),$$

$$L_2'' = (1, -\lambda_1, -1 - \lambda_3) = (1, 1.8019377, -2.2469796),$$

$$L_3'' = (1, -\lambda_2, -1 - \lambda_1) = (1, 0.4450418, 0.8019377)$$

и

$$\lambda_1 = 2 \cos \frac{6\pi}{7}, \quad \lambda_2 = 2 \cos \frac{4\pi}{7}, \quad \lambda_3 = 2 \cos \frac{2\pi}{7}$$

есть корни уравнения (2).

В конусе, натянутом на фундаментальную область H , были вычислены значения формы h_1 в целочисленных точках. Их модули есть 1, 7, 8, 13, 27, 29, 41, 43, 56, 64, 71, ... При этом $h_1(X) = \pm 1$ только в вершинах X многогранников Клейна, все остальные значения принимаются только на точках X , лежащих внутри многогранников K_Σ . Значения ± 7 достигаются только в точках относительных минимумов $2W_i$.

Элементарные автоморфизмы даются матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A + 2E, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (A + E)^2,$$

а также их произведениями вида

$$A_1^m A_2^n, \quad \text{где } m, n \in \{-1, 0, +1\} \quad (18)$$

(всего 8 возможностей). Результаты вычислений представлены в таблице 1 [11], расположенной на развороте двух страниц. Таблица разбита на куски, соответствующие разным алгоритмам (указанным в выделенной строке).

Обозначим через G матрицу (L_1'', L_2'', L_3'') . Столбцы таблицы содержат номер k шага алгоритма, вектор $L_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ – столбец из трех чисел, матрицу M_k , матрицу N_k . В следующем столбце (внизу) указан период алгоритма T . Затем идут столбцы с матрицей $N_k G$, с вектором $-h_1(N_k E_i)$ (i -я компонента которого равна произведению трех элементов i -й строки матрицы $N_k G$), с вектором L_k/α_k и с номером k . В конце каждого куска таблицы указаны номера l и m и матрица периода T выражена через матрицы A , A_1 и A_2 . Начальные значения $L_0, M_0, \dots$ для $k = 0$ соответствуют перестановке исходных компонент вектора L_3'' , требуемых для начала работы алгоритма.

Получилось, что все алгоритмы дают векторы $N_k E_i$, на которых $h_1 = \pm 1$, т.е. это вершины многогранников Клейна. Алгоритмы Пуанкаре, Брюно и Парусникова тут совпадают. Эти алгоритмы и алгоритм Бруна имеют период $T_1 = A + E$, т.е. $T_1^2 = A_2$ – элементарный автоморфизм. Алгоритм Якоби в двух случаях (11) и (13) имеет период $T_2 = AA_1$. Поскольку

$$A^2 = (A + E)^2(A + 2E)^{-1} = A_2A_1^{-1}, \quad (19)$$

то $T_2^2 = A^2A_1^2 = A_2A_1$ – элементарный автоморфизм. Алгоритм Эйлера и алгоритм Якоби в двух других случаях (12), (14) имеют период $T_3 = AA_1A_2$. Согласно (19) $T_3^2 = A_1A_2^3$, что не является элементарным автоморфизмом. То есть эти алгоритмы не улавливают наименьшие периоды многогранников Клейна.

Итак, здесь хорошими можно считать все алгоритмы, кроме алгоритма Эйлера и двух случаев алгоритма Якоби (12) и (14).

6. Разложения вектора L_3'' для формы h_2 . Имеем (подробнее о форме h_2 см. [8])

$$h_2(X) = \langle L_1'', X \rangle \langle L_2'', X \rangle \langle L_3'', X \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} L_1'' &= (1, -\lambda_3, -1 - \lambda_2) = (1, -1.879385242, -0.652703645), \\ L_2'' &= (1, -\lambda_1, -1 - \lambda_3) = (1, 1.532088886, -2.879385242), \\ L_3'' &= (1, -\lambda_2, -1 - \lambda_1) = (1, 0.347296355, 0.532088886) \end{aligned}$$

и

$$\lambda_1 = 2 \cos \frac{7\pi}{9}, \quad \lambda_2 = 2 \cos \frac{5\pi}{9}, \quad \lambda_3 = 2 \cos \frac{\pi}{9}$$

есть корни уравнения (3).

В конусе, натянутом на фундаментальную область, были вычислены значения формы h_2 в целочисленных точках X . Модули этих значений есть 1, 3, 8, 9, 17, 19, 24, 27, 37, 51, 53, 57, 64, 71, ... При этом $h_2(X) = \pm 1$ только в вершинах X многогранников Клейна, $h_2(X) = \pm 3$ только в центрах граней расстояния 1, все остальные значения достигаются во внутренних точках многогранников K_Σ . Значения ± 9 достигаются только в точках $2W_i$ относительных минимумов.

Элементарные автоморфизмы даются матрицами (18), где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -A^2 + A + 4E, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (A + E)^2.$$

Результаты вычислений представлены в таблице 2 [11], организованной аналогично таблице 1 [11]. Разложения по алгоритмам Эйлера и Якоби (11) совпадают. В алгоритмах Эйлера, Якоби (11) и (13) и Брюно в точках (17) значения h_2 равны ± 1 , т.е. эти алгоритмы идут по вершинам многогранников Клейна. В алгоритме Бруна появляются значения $h_2 = \pm 3$, т.е. внутренние точки некоторых граней. В алгоритмах Якоби (12) и (14) – также значения ± 9 , т.е. внутренние относительные минимумы. В алгоритмах Пуанкаре и Парусникова появляются большие значения h_2 , т.е. они углубляются внутрь многогранников Клейна.

В алгоритме Брюно период $T_1 = A + E$, и $T_1^2 = A_2$ – элементарный автоморфизм. В алгоритмах Эйлера, Якоби (11) и (13) период $T_2 = A_2$ – элементарный автоморфизм. В алгоритмах Якоби (12) и (14) период $T_3 = AA_2^2$, у алгоритма Бруна период $T_4 = (A + E)^3$. Поскольку $A^2 = A_2A_1^{-1}$, то $T_3^2 = A_2^5A_1^{-1}$, $T_4^2 = A_2^3$; они не являются элементарными автоморфизмами. Алгоритмы Пуанкаре и Парусникова не имеют периода.

Кроме того, алгоритм Пуанкаре вообще расходится: β_k и γ_k стремительно убывают, а величина α_k остается большой и не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. По существу, к паре (β_k, γ_k) применяется алгоритм Евклида. Более того, справедлива

ТЕОРЕМА [6]. *Существует абсолютная константа $\varkappa > 1$ такая, что если в тройке чисел (7) $\alpha > \varkappa\beta$, то алгоритм Пуанкаре для тройки (7) расходится, т.е. $\beta_k, \gamma_k \rightarrow 0$, $\alpha_k \rightarrow \alpha_\infty > 0$ при $k \rightarrow \infty$.*

Итак, для формы h_2 хорошими можно признать только алгоритмы Брюно, Эйлера, Якоби (11) и (13).

Следовательно, для обеих форм h_1 и h_2 хорошими являются только три алгоритма: Якоби (11) и (13) и Брюно.

7. ЗАМЕЧАНИЕ 1. Алгоритм Евклида сначала был предназначен для натуральных чисел α и β , он использовался для нахождения их наибольшего общего делителя. Здесь он используется для любых вещественных положительных чисел α и β . В таком виде он аналогичен разложению числа α/β в цепную дробь.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [3] Эйлер применил некую итерационную процедуру для записи конкретного вектора $L = (75, 59, 49)$ в виде $L = NE_1$, где N – целочисленная унимодулярная матрица. При этом только на первых двух шагах он использовал алгоритм, описанный здесь как алгоритм Эйлера. На следующих шагах он действовал более кустарно, пытаясь получить упрощения для конкретных чисел.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Алгоритм Якоби [4] был опубликован под редакцией Гейне только после смерти Якоби. Возможно, сам Якоби сознавал недостатки этого алгоритма и не придавал ему столь большого значения, как это было сделано позже Перроном [9] и другими.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Легко видеть, что алгоритм Бруна [6] можно ускорить, если положить $a = [\alpha/\beta]$ и $\alpha' = \alpha - a\beta$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$. Тогда в (4), (5)

$$S_k = \begin{pmatrix} 1 & -a_k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и R_k – матрица-подстановка (см. [12]).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Здесь мы игнорировали автоморфизмы, указанные в замечании 2 [8], ибо они не встречаются при разложениях по матричным алгоритмам. При этом под фундаментальными областями многогранников Клейна мы имели в виду те, которые описаны в теоремах 1 и 2 [8], а не в замечаниях 2 [8].

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Возможность расходимости алгоритма Пуанкаре (т.е. $L_k \rightarrow L_\infty \neq 0$ при $k \rightarrow 0$) отметил еще Брун [6] и предложил свой алгоритм, в котором всегда $L_k \rightarrow 0$. “Слабую” сходимость алгоритма Бруна доказал Подсыпанин [12], его “сильной” сходимости может не быть [13].

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Первоначальный вариант работы с обширными таблицами опубликован в виде препринта [11]. Таблицы работы [11] можно получить по электронной почте, если послать запрос по адресу `bruno@applmat.msk.su`.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Алгоритм Евклида, изложенный в п. 2, иногда называют алгоритмом Лагранжа [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 9. В работах [15], [16] изобретение многогранника Клейна приписывается В.И. Арнольду. Замечательно, что заметка [15] представлена В.И. Арнольдом.

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН
E-mail: `bruno@applmat.msk.su`

Поступило
14.11.95
Исправленный вариант
10.10.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
- [2] Хинчин А.Я. Цепные дроби. 3-е изд. М.: Физматгиз, 1961.
- [3] Euler L. De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda // *Petersburger Akademie Notiz. Exhib.* August 14, 1775; // *Commentationes arithmeticae collectae*. V. II. St. Petersburg, 1849. P. 99–104.
- [4] Jacobi K.G.J. Allgemeine Theorie der Kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird // *J. Reine Angew. Math.* 1868. V. 69. P. 29–64.
- [5] Poincare H. Sur une generalization des fractionés continues // *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1*. 1884. V. 99. P. 1014–1016.
- [6] Brun V. En generalisation av Kjedebroken // *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania. I. Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse* 1919. № 6; 1920. № 6.
- [7] Klein F. Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung // *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.* 1895. № 3. P. 357–359.
- [8] Брюно А.Д., Парусников В.И. Многогранники Клейна для двух кубических форм Давенпорта // *Матем. заметки*. 1994. Т. 56. № 4. С. 9–27.
- [9] Davenport H. On the product of three homogeneous linear forms. IV // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1943. V. 39. P. 1–21.
- [10] Perron O. Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus // *Math. Ann.* 1907. V. 64. P. 1–76.
- [11] Брюно А.Д., Парусников В.И. Сравнение разных обобщений цепных дробей. Препринт № 52. М.: ИПМ, 1994.
- [12] Подсыпанин Е.В. Об одном обобщении алгоритма цепных дробей, связанном с алгоритмом Вигго Бруна // *Записки научных семина. ЛОМИ*. 1977. Т. 67. С. 184–194.
- [13] Brentjes A. J. Multi-dimensional continued fraction algorithms. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1981.
- [14] Buchmann J. On the computation of units and class numbers by a generalization of Lagrange's algorithm // *J. Number Theory*. 1987. V. 26. P. 8–30.
- [15] Lachaud G. Polyèdre d'Arnol'd et voile d'un cône simplicial: analogues du théorème de Lagrange // *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1*. 1993. V. 317. P. 711–716.
- [16] Lachaud G. Polyèdre d'Arnold et voile d'un cône simplicial, analogues du théorème de Lagrange pour les irrationnels de degré quelconque. *Prétirage* № 93–17. Marseille: Laboratoire de Mathématiques Discrètes du C.N.R.S., 1993.