Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Лабовский, О размерности группы биголоморфных автоморфизмов вещественно-аналитических гиперповерхностей, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 349–358

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1509>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:42:12

УДК 517

О РАЗМЕРНОСТИ ГРУППЫ БИГОЛОМОРФНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ ВЕЩЕСТВЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

А. С. Лабовский

В работе изучается зависимость локальной геометрии вещественно-аналитических гиперповерхностей в $\mathbb{C}^n$ от размерности группы биголоморфных автоморфизмов этой поверхности, дается классификация гиперповерхностей в терминах этой группы. Приводится ряд примеров, подтверждающих непустоту классов изложенной конструкции. Дана новая формулировка теоремы Фримана о так называемом распрямлении вещественно-аналитического $\mathbb{C}R$ -подмногообразия в $\mathbb{C}^n$ с вырожденной формой Леви, имеющей постоянный ранг.

Библиография: 12 названий.

Введение. В геометрической теории функций одного комплексного переменного важное место занимают вопросы конформной классификации областей. Ответ на них дает классическая теорема Римана о том, что любая односвязная область конформно эквивалентна либо кругу, либо комплексной плоскости, либо сфере Римана.

Первые результаты о биголоморфной классификации областей в $\mathbb{C}^n$ были получены еще в начале века А. Пуанкаре. Сравнивая группы биголоморфных автоморфизмов евклидова шара и бикруга, он установил неэквивалентность этих областей. Специфика многомерного случая состоит в том, что в достаточно общей ситуации области D_1 и D_2 в $\mathbb{C}^n$ биголоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны их границы. Таким образом, задача классификации областей может быть сведена к задаче классификации границ. Известно, например, что не существует биголоморфного отображения между псевдовыпуклой (определение см. в [1]) ограниченной областью в $\mathbb{C}^n$ с кусочно C^2 -гладкой, но не гладкой границей и ограниченной областью в $\mathbb{C}^n$ с C^2 -гладкой границей [2].

Цель данной работы – изучение вопросов, связанных с зависимостью локальной геометрии вещественных гиперповерхностей от размерности группы локальных автоморфизмов этой поверхности.

Мы рассматриваем в основном однородные гиперповерхности. Приведенные в пункте 5 примеры показывают, что такие гиперповерхности не исчерпываются квадраками (см. также [3]).

Основным результатом работы является геометрический критерий бесконечномерности группы локальных автоморфизмов для регулярных по Танаке однородных поверхностей (теорема 1). Его можно сформулировать следующим образом: размерность этой

группы бесконечна тогда и только тогда, когда поверхность биголоморфно распрямляема в смысле работы [4].

Случай невырожденной формы Леви был изучен в работе [5]. Такакой была получена следующая оценка размерности группы автоморфизмов – размерность этой группы не превосходит $n^2 + 2n$.

Мы приводим ряд примеров (см. п. 5) нераспрямляемых поверхностей со всюду вырожденной формой Леви, что показывает невозможность формулировки аналогичного критерия в терминах формы Леви.

В заключение, основываясь на теореме 1, мы даем формулировку теоремы Фримана [4] о биголоморфном распрямлении в терминах размерности группы автоморфизмов (теорема 3).

1. Инфинитезимальные CR-автоморфизмы. Пусть M – вещественно-аналитическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$. Предположим, что M содержит начало координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Гладкое векторное поле X на M называется *инфинитезимальным CR-автоморфизмом* M , если оно локально порождает однопараметрическую группу локальных CR-автоморфизмов M .

Фиксируем точку $p \in M$ и обозначим через $\text{aut}(M, p)$ пространство инфинитезимальных CR-автоморфизмов M , определенных в некоторой окрестности точки p . Пусть $\text{hol}(M, p) \subset \text{aut}(M, p)$ – пространство таких векторных полей X на M , для которых существует голоморфное векторное поле Z , определенное в некоторой окрестности точки p в $\mathbb{C}^n$ такое, что $X = \text{Re } Z$. Тогда X локально порождает однопараметрическую группу локальных биголоморфных автоморфизмов M [6]. Под голоморфным векторным полем мы понимаем векторное поле типа $(1, 0)$ с голоморфными коэффициентами.

2. Формулировка основных результатов. В данной работе мы всегда будем предполагать, что в некоторой окрестности начала координат вещественно-аналитическая гиперповерхность M имеет следующий вид

$$\text{Im } w = F(z, \bar{z}), \quad (1)$$

где $(z, w) = (z_1, \dots, z_n, w)$ – комплексные координаты в $\mathbb{C}^{n+1}$. Тот факт, что в некоторой окрестности точки $p \in M$ существует система комплексных координат, в которых поверхность представляется в виде (1), эквивалентен существованию трансверсального $(JX_p \notin T_p(M), J$ – комплексная структура в $\mathbb{C}^n)$ инфинитезимального CR-автоморфизма $X \in \text{hol}(M)$. Такая поверхность называется регулярной по Танаке в точке p [5]. Прежде чем формулировать полученные результаты, дадим еще одно определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Поверхность M называется *биголоморфно q -распрямляемой* или просто *q -распрямляемой* в точке $p \in M$, если существует окрестность U точки p и биголоморфное отображение $f: U \rightarrow V \subset \mathbb{C}^{n+1}$ такое, что f переводит $M \cap U$ в $(M_0 \times \mathbb{C}^q) \cap V$.

Основной результат данной работы состоит в следующих двух теоремах.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $M \subset \mathbb{C}^{n+1}$ – однородная вещественно-аналитическая гиперповерхность, которая в окрестности U начала координат задается уравнением (1). Возможны только три следующие ситуации.

а) Форма Леви M не вырождена в некоторой точке из $M \cap U$. Тогда

$$\dim(\operatorname{hol}(M)) = \dim(\operatorname{hol}(M, 0)) \leq (n+1)^2 + 2(n+1).$$

б) Форма Леви M вырождена всюду на $M \cap U$, но $\dim(\operatorname{hol}(M)) < \infty$. Утверждается, что для каждого $n \geq 2$ существуют однородные гиперповерхности в $\mathbb{C}^{n+1}$ с всюду вырожденной формой Леви и $\dim(\operatorname{hol}(M)) < \infty$.

в) $\dim(\operatorname{hol}(M)) = \infty$. Тогда в окрестности начала координат M q -биголоморфно распрямляется. Если предположить дополнительно, что форма Леви M имеет постоянный ранг $n - q$, то M_0 имеет невырожденную форму Леви и локально однородна в следующем смысле: $\forall a, b \in M_0 \cap V$ существует биголоморфное отображение окрестности точки a в $\mathbb{C}^{n-q+1}$ в окрестность b в $\mathbb{C}^{n-q+1}$, которое переводит M_0 в себя.

Основная часть утверждения теоремы 1 следует из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $M \subset \mathbb{C}^{n+1}$ – вещественно-аналитическая гиперповерхность, которая в окрестности U начала координат задается уравнением (1). Предположим, что $\dim(\operatorname{hol}(M)) = \infty$. Тогда $\forall p \in (U \cap M) \setminus \tilde{A}$ существует окрестность U_p в $\mathbb{C}^{n+1}$ и биголоморфное отображение $f: U_p \rightarrow V \subset \mathbb{C}^{n+1}$ такое, что f переводит $M \cap U_p$ в $(M_0 \times \mathbb{C}^q) \cap V$, где $\dim(\operatorname{hol}(M_0)) < \infty$. Здесь $\tilde{A} = \{(z, w) \in M \mid z \in A \subset \mathbb{C}^n, A - \text{некоторое собственное аналитическое подмножество}\}$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – вещественно-аналитическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^{n+1}$, заданная в виде (1). Предположим, что $\dim(\operatorname{hol}(M)) = \infty$. Дальнейшие рассуждения опираются на следующее основное утверждение, дающее необходимое и достаточное условие конечности $\dim(\operatorname{hol}(M))$ [7].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для того чтобы $\operatorname{hol}(M)$ имела конечную размерность необходимо и достаточно, чтобы не существовало нетривиального голоморфного векторного поля, касательного к M в окрестности начала координат.

Из этого утверждения для рассматриваемого случая получаем, что в некоторой окрестности начала координат существует касательное к M голоморфное векторное поле

$$W = \sum_{k=1}^n \rho_k(z, w) \frac{\partial}{\partial z_k} + \rho_{n+1}(z, w) \frac{\partial}{\partial w}.$$

Для дальнейшего доказательства потребуется следующая лемма

ЛЕММА 1. Разложим функцию $F(z, \bar{z})$ из представления (1) по степеням $\bar{z}$:

$$F(z, \bar{z}) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(z) \bar{z}^{\alpha},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $\bar{z}^{\alpha} = \bar{z}_1^{\alpha_1} \dots \bar{z}_n^{\alpha_n}$. Тогда для любого набора мультииндексов $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ матрица Якоби отображения $R_n: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, где $R_n(z) = (f_{\alpha^1}(z), \dots, f_{\alpha^n}(z))$, является вырожденной для всех z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того, что W касательно к M , имеем

$$W\left(\frac{w - \bar{w}}{2i} - F(z, \bar{z})\right)\Big|_M = 0.$$

Получаем

$$\frac{1}{2i}\rho_{n+1}(z, u + iF(z, \bar{z})) - \sum_{k=1}^n \rho_k(z, u + iF(z, \bar{z})) \frac{\partial F(z, \bar{z})}{\partial z_k} = 0.$$

Полагая в этом равенстве $\bar{z} = 0$, получаем ($F(z, 0) = 0$) $\rho_{n+1}(z, u) \equiv 0$, т.е. $\rho_{n+1}(z, w) \equiv 0$. Далее,

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \sum_{k=1}^n \rho_k(z, u + iF(z, \bar{z})) \frac{\partial F(z, \bar{z})}{\partial z_k} = \sum_{\alpha} \sum_{k=1}^n \rho_k(z, u + iF(z, \bar{z})) \frac{\partial f_{\alpha}(z)}{\partial z_k} \bar{z}^{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} G_{\alpha}(z, u + iF(z, \bar{z})) \bar{z}^{\alpha}, \end{aligned}$$

где

$$G_{\alpha}(z, w) = \sum_{k=1}^n \rho_k(z, w) \frac{\partial f_{\alpha}(z)}{\partial z_k}$$

– семейство голоморфных функций. Обозначим через $|\alpha|$ сумму $\sum_{k=1}^n \alpha_k$. Применим к равенству

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=s} G_{\alpha}(z, u + iF(z, \bar{z})) \bar{z}^{\alpha} \equiv 0$$

$\partial/\partial z^{\beta}$, где $|\beta| = 1$, и положим $\bar{z} = 0$. В силу того, что $\forall \alpha \neq \beta \exists i: \alpha^i > \beta^i$, получим, что все слагаемые кроме $G_{\beta}(z, u)$ будут равны нулю. Следовательно, $G_{\beta}(z, u) \equiv 0$, т.е. $G_{\beta}(z, w) \equiv 0$. Проведем эту операцию для всех α , $|\alpha| = 1$, имеем $G_{\alpha}(z, w) \equiv 0$. Аналогично, увеличивая последовательно $|\alpha|$ на 1, получим $\forall \alpha \ G_{\alpha}(z, w) \equiv 0$. Это означает, что

$$\forall \alpha \quad \sum_{k=1}^n \rho_k(z, w) \frac{\partial f_{\alpha}(z)}{\partial z_k} \equiv 0,$$

и лемма доказана.

Пусть $k+1$ – минимальное целое число такое, что $\forall \alpha^1, \dots, \alpha^{k+1}$ матрица Якоби отображения $R_{k+1}(z) = (f_{\alpha^1}(z), \dots, f_{\alpha^{k+1}}(z))$ является вырожденной для всех z . Тогда существует набор мультииндексов $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ таких, что

$$\text{rank} \left\| \frac{\partial f_{\alpha^i}}{\partial z_j} \right\|_{z=z_0} = k \quad (i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, n)$$

для некоторого z_0 . Пусть

$$A = \left\{ z \in U_0 \subset \mathbb{C}^n \mid \text{rank} \left\| \frac{\partial f_{\alpha^i}(z)}{\partial z_j} \right\|_{i=1, \dots, k}^{j=1, \dots, n} < k \right\},$$

где U_0 – область определения $f_{\alpha^1}(z), \dots, f_{\alpha^{k+1}}(z)$. Условие принадлежности z к A выражается равенством нулю миноров, которые являются голоморфными функциями. Следовательно, A – аналитическое множество. Обозначим через $\tilde{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ множество $(z, w) \in M$, где $z \in A$. Пусть в окрестности $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$ действует представление (1). Рассмотрим произвольную точку $p \in (M \cap U) \setminus \tilde{A}$. В некоторой окрестности точки p в $\mathbb{C}^{n+1}$ $\text{rank} \|\partial f_{\alpha^i}(z)/\partial z_j\| = k$, где $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n$.

Дополним k вектор-функций

$$\left(\frac{\partial f_{\alpha^i}}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f_{\alpha^i}}{\partial z_n} \right), \quad i = 1, \dots, k,$$

$n - k$ векторами

$$\left(\frac{\partial z_{i_s}}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial z_{i_s}}{\partial z_n} \right), \quad \text{где } s = 1, \dots, n - k,$$

так чтобы составленная из них матрица $(n \times n)$ была невырождена в точке p . Получили, что отображение $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, где

$$\varphi(z) = (f_{\alpha^1}, \dots, f_{\alpha^k}, z_{i_1}, \dots, z_{i_{n-k}}),$$

обладает матрицей Якоби, невырожденной в точке p . В силу того, что множество нулей якобиана является аналитическим, $\exists U(p) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ – окрестность точки $p \in (M \cap U) \setminus \tilde{A}$ такая, что отображение

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{j_i} &= f_{\alpha^i}(z) - f_{\alpha^i}(p'), & i &= 1, \dots, k, \\ \tilde{z}_{l_s} &= z_{i_s} - p_{i_s}, & s &= 1, \dots, n - k, \\ \tilde{w} &= w - p_{n+1}, & p' &= (p_1, \dots, p_n) \end{aligned} \quad (2)$$

имеет невырожденную матрицу Якоби в $U(p)$. Здесь индексы j_i дополняют индексы l_s до набора $(1, \dots, n)$.

По теореме об обратном отображении [8] (2) осуществляет биголоморфную замену координат. Поэтому существует обратное отображение $z = z(\tilde{z}), w = \tilde{w}$. При этом

$$\tilde{F}(\tilde{z}, \tilde{z}) = \tilde{F}(z(\tilde{z}), \overline{z(\tilde{z})}) = \sum_{\alpha} g_{\alpha}(\tilde{z}) \overline{z_1(\tilde{z})}^{\alpha_1} \cdots \overline{z_n(\tilde{z})}^{\alpha_n}, \quad (3)$$

где $g_{\alpha}(\tilde{z}) = f_{\alpha}(z(\tilde{z}))$.

ЛЕММА 2. $\tilde{F}(\tilde{z}, \tilde{z})$ зависит только от $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k, \overline{\tilde{z}_1}, \dots, \overline{\tilde{z}_k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению биголоморфной замены координат

$$g_{\alpha^1}(\tilde{z}) = \tilde{z}_1, \dots, g_{\alpha^k}(\tilde{z}) = \tilde{z}_k.$$

В силу того, что $\forall \beta^1, \dots, \beta^{k+1}$ якобиан

$$\left\| \frac{\partial f_{\beta^i}(z)}{\partial z^j} \right\|_{i=1, \dots, k+1}^{j=1, \dots, n}$$

был равен нулю для всех $(z, w) \in U(p)$, получаем, что $\forall \alpha$ матрица Якоби отображения $\tilde{R}_{k+1}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}$, где $\tilde{R}_{k+1}(\tilde{z}) = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k, g_\alpha(\tilde{z}))$, является вырожденной для всех $(\tilde{w}, \tilde{z}) \in \varphi(U(p))$, где φ – функция, осуществляющая биголоморфную замену координат. Но последнее условие означает, что

$$\frac{\partial g_\alpha(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}_j} \equiv 0 \quad \text{при } j = k+1, \dots, n.$$

Таким образом, получаем, что в разложении (3) все $g_\alpha(\tilde{z})$ зависят только от $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k$. Так как

$$\frac{\partial \tilde{F}(\tilde{z}, \bar{\tilde{z}})}{\partial \bar{\tilde{z}}_j} = \overline{\left(\frac{\partial \tilde{F}(\tilde{z}, \tilde{z})}{\partial \tilde{z}_j} \right)} = \overline{\left(\frac{\partial \tilde{F}(\tilde{z}, \tilde{z})}{\partial \tilde{z}_j} \right)} \equiv 0,$$

то функция $\tilde{F}$ зависит только от $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k, \bar{\tilde{z}}_1, \dots, \bar{\tilde{z}}_k$, что и требовалось доказать.

Получаем, что биголоморфное отображение φ переводит $M \cap U(p)$ в $(M_0 \times \mathbb{C}^{n-k}) \cap V$, где M_0 – вещественно-аналитическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^{k+1}$, которая в некоторой окрестности начала координат задается уравнением $\text{Im } \tilde{w} = \tilde{F}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k, \bar{\tilde{z}}_1, \dots, \bar{\tilde{z}}_k)$, где $(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k, \tilde{w})$ – комплексные координаты в $\mathbb{C}^{k+1}$.

ЛЕММА 3. В условиях теоремы 2 $\dim(\text{hol}(M_0)) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь разложением (3), имеем

$$\tilde{F}(\tilde{z}, \bar{\tilde{z}}) = \sum_{\alpha} g_{\alpha}(\tilde{z}) \overline{z_1(\tilde{z})}^{\alpha_1} \dots \overline{z_n(\tilde{z})}^{\alpha_n} = \sum_{\beta=(\beta_1, \dots, \beta_k)} \tau_{\beta}(\tilde{z}) \bar{\tilde{z}}_1^{\beta_1} \dots \bar{\tilde{z}}_k^{\beta_k}.$$

Функции $g_{\alpha}(\tilde{z})$ получаются из функций $\tau_{\beta}(\tilde{z})$ бесконечномерным (в общем случае) линейным преобразованием. Поэтому в силу того, что $\exists \alpha^1, \dots, \alpha^k$ такие, что

$$\text{rank} \left\| \frac{\partial g_{\alpha^i}(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}_j} \right\|_{i=1, \dots, k}^{j=1, \dots, k} = k,$$

имеем, что

$$\exists \beta^1, \dots, \beta^k : \text{rank} \left\| \frac{\partial \tau_{\beta^i}(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}_j} \right\|_{i=1, \dots, k}^{j=1, \dots, k} = k$$

для некоторых $\tilde{z}$. Предполагая, что $\dim(\text{hol}(M_0)) = \infty$, и пользуясь выше приведенными рассуждениями, приходим к противоречию. Таким образом, лемма доказана.

Учитывая, что p была произвольной точкой $(M \cap U) \setminus \tilde{A}$, полученные рассуждения доказывают теорему 2.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Мы получим теорему 1 как следствие теоремы 2.

а) Пусть M имеет в некоторой точке p невырожденную форму Леви. Разложим

$$\det \left\| \frac{\partial^2 F(z, \bar{z})}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right\|$$

в ряд по $\tilde{z}$. Если этот ряд обращается в нуль на некотором открытом множестве, то переразлагая этот ряд в каждой точке этого множества, получим, что он равен нулю тождественно. Таким образом, если форма Леви поверхности M невырождена в некоторой

точке $p \in M$, то она невырождена на некотором открытом всюду плотном множестве U_1 в M . Для произвольной точки $p \in U_1$ имеем $\dim(\text{hol}(M, p)) \leq (n+1)^2 + 2(n+1)$ [9]. Предположим, что векторные поля $X_1, \dots, X_l \in \text{hol}(M) = \text{hol}(M, 0)$. Они определены в некоторой окрестности начала координат W . В силу всюду плотности U_1 существует точка $p \in U_1 \cap W$: $\dim(\text{hol}(M, p)) \leq (n+1)^2 + 2(n+1)$, поэтому существует окрестность $U(p)$ точки p такая, что $X_1, \dots, X_l$ линейно зависимы в $U(p)$ при $k > (n+1)^2 + 2(n+1)$. Из-за аналитичности они линейно зависимы и в W , поэтому $\dim(\text{hol}(M)) \leq (n+1)^2 + 2(n+1)$, что доказывает пункт а) теоремы 1.

б) Существование поверхностей с всюду вырожденной формой Леви и конечномерной группой автоморфизмов показывает нижеизложенный пример 1.

в) Пусть $\dim(\text{hol}(M)) = \infty$. В любой окрестности начала координат согласно теореме 2 существует точка $p \in M$, в которой M распрямляется, т.е. M локально эквивалентна $(M_0 \times \mathbb{C}^k) \cap V$ для некоторого $k \geq 1$, где $\dim(\text{hol}(M_0)) < \infty$. В силу однородности M существует биголоморфный автоморфизм M , переводящий начало координат в точку p . Очевидно, композиция этого автоморфизма с отображением, переводящим $M \cap U(p)$ в $(M_0 \times \mathbb{C}^k) \cap V$, распрямляет M в окрестности начала координат.

Предполагая, что для всех точек $z \in M \cap U$ $\dim(\ker_z L_M) = k$, где

$$\ker_z L_M = \{\eta \in T_z^C M \mid L_M(\xi, \bar{\eta}) = 0 \forall \xi \in T_z^C M\}$$

– ядро формы Леви, докажем локальную однородность M_0 .

В силу того, что форма Леви инвариантна относительно биголоморфных отображений, имеем $\dim \ker_z \bar{L}_M = k$, где $\bar{L}$ – форма Леви $(M_0 \times \mathbb{C}^k) \cap V'$. Итак, M_0 имеет невырожденную форму Леви. Дальнейший результат опирается на следующее утверждение [4].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $M_0^1 \subset \mathbb{C}^q$ и $M_0^2 \subset \mathbb{C}^r$ – вещественно-аналитические гиперповерхности с невырожденной формой Леви, $z' \in M_0^1$, $w' \in M_0^2$, и F – биголоморфное отображение окрестностей $z = (z', z'') \in \mathbb{C}^n$ и $w = (w', w'') \in \mathbb{C}^n$, которое переводит $M_0^1 \times \mathbb{C}^{n-q}$ в $M_0^2 \times \mathbb{C}^{n-r}$.

Тогда $q = r$ и существует биголоморфное отображение G окрестности z' в $\mathbb{C}^q$ в окрестность w' в $\mathbb{C}^q$, которое переводит M_0^1 в M_0^2 .

Заменяя M_0^1 и M_0^2 на M_0 , а $n - r$ и $n - q$ на k , получаем утверждение теоремы.

5. Примеры. Примеры 1 и 2 показывают существование однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$, со всюду вырожденной формой Леви и $\dim(\text{hol}(M)) < \infty$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим в $\mathbb{C}^{n+1}$ ($n \geq 3$) гиперповерхность, заданную уравнением

$$\text{Im } w = 2 \text{Re} \left(\sum_{k=2}^n z_k \bar{z}_1^{k-1} \right).$$

Матрица Леви этой поверхности имеет постоянный ранг, в каждой точке равный двум. Поэтому форма Леви вырождена в каждой точке. Эта поверхность однородна. Следую-

щее преобразование переводит начало координат в произвольную точку на поверхности:

$$\begin{aligned} z_1 &\rightarrow z_1 + a_1, & z_i &\rightarrow \sum_{k=0}^{n-i} C_{i+k-1}^{i-1} z_{i+k} \bar{a}_1^k \quad (i = 2, \dots, n), \\ w &\rightarrow w - 2 \left(\sum_{k=2}^n \bar{a}_k (z_1 + a_1)^{k-1} \right). \end{aligned}$$

Разложим $F(z, \bar{z})$ по степеням $\bar{z}$:

$$F(z, \bar{z}) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(z) \bar{z}^{\alpha},$$

$\det \|\partial f_{\alpha_i}(z)/\partial z_j\| \neq 0$ при $\alpha_1 = (0, 1, \dots, 0)$, $\alpha_2 = (1, 0, \dots, 0)$, $\alpha_i = (i-1, 0, \dots, 0)$ при $i = 3, \dots, n$. Из теоремы 1 получаем $\dim(\text{hol}(M)) < \infty$. Очевидной подгруппой группы автоморфизмов этой поверхности является группа преобразований, оставляющих начало координат на месте,

$$z_1 \rightarrow z_1, \quad z_i \rightarrow z_i + \sum a_{ij} z_1^j \quad (i = 2, \dots, n), \quad w \rightarrow w,$$

где матрица $A = \|a_{ij}\|$ удовлетворяет уравнению $A + \bar{A}^T = 0$ ($\bar{A} = \|\bar{a}_{ij}\|$). Размерность группы таких матриц, как легко подсчитать, равна $(n-1)^2$. Естественным образом возникает вопрос о том, существует ли ограничение на $\dim(\text{hol}(M))$ для $M \subset \mathbb{C}^n$, аналогичное ограничению на классе поверхностей с невырожденной формой Леви?

Следующий пример показывает, что в $\mathbb{C}^3$ множество гиперповерхностей пункта б) теоремы 2 не пусто (подробнее см. [10]).

ПРИМЕР 2. Рассмотрим в $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ однородную кубику, заданную уравнением

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0, \quad x_i = \text{Re } z_i.$$

Она локально биголоморфно не распрямляется [10]. В окрестности любой точки из $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ можно выбрать систему координат так, чтобы эта точка была началом координат, ось yz была перпендикулярна поверхности, а xz была направлена по $\mathbb{R}^3$, где кубика $M^5 = M^2 \times \mathbb{R}^3$. Тогда локально кубика задается уравнением

$$\text{Im } z_3 = F(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2).$$

Форма Леви этой поверхности вырождена во всех точках (см. также [10]). Тем самым мы получаем непустоту множества вещественно-аналитических гиперповерхностей пункта б) теоремы 1 в $\mathbb{C}^3$.

Следующий пример показывают, что однородные вещественно-аналитические поверхности не исчерпываются квадратами.

ПРИМЕР 3. Пусть гиперповерхность M в $\mathbb{C}^{n+1}$ задана в следующем виде:

$$\operatorname{Im} w = \langle z, z \rangle + |(H\bar{b}, z)|^4,$$

где

- 1) (z, w) – комплексные координаты в $\mathbb{C}^{n+1}$;
- 2) $\langle z, z \rangle = \sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} z_\alpha \bar{z}_\beta$ – эрмитова форма, $H = \|h_{\alpha\beta}\|$ – невырожденная эрмитова матрица;
- 3) $b \in \mathbb{C}^n$, $(\xi, \gamma) = \sum_{k=1}^n \xi_k \gamma_k$, где $\xi, \gamma \in \mathbb{C}^n$.

ЛЕММА. Если $\langle b, b \rangle = 0$, то поверхность M однородна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно можно проверить, что

$$\sum_{k,l \geq 1} F_{k,l}(z, \bar{z}) = \sum_{k,l \geq 1} F_{k,l}(z + bP(z) + \alpha, \overline{z + bP(z) + \alpha})$$

при $P(z) = -2\overline{(H\bar{b}, \alpha)}((H\bar{b}, z)^2 + 2(H\bar{b}, z)(H\bar{b}, \alpha))$. В силу произвольности выбора $\alpha \in \mathbb{C}^n$ это означает, что существует автоморфизм M , перемещающий начало координат в любую точку поверхности. Тем самым лемма доказана.

Посмотрим, как с помощью полученных результатов можно получить условия на распрямляемость поверхностей, не являющихся однородными.

ТЕОРЕМА 3. Пусть M – вещественно-аналитическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^{n+1}$ вида (1). Пусть

$$F(z, \bar{z}) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(z) \bar{z}^{\alpha}$$

и $k+1 = \inf\{l \in \mathbb{Z} \mid \forall \alpha_1, \dots, \alpha_l \text{ ранг } \|\partial f_{\alpha_i} / \partial z_j\| < l \text{ для всех } z \text{ из окрестности начала координат, } i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, n\}$. Предположим, что $\forall z$ из некоторой окрестности начала координат ранг формы Леви равен $k < n$. Тогда M биголоморфно распрямляется в некоторой окрестности начала координат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подрасслоение в $T^{\mathbb{C}}M \setminus \ker_z L_M$. Это подрасслоение инволютивно (см. [11]). Действительно, пусть X_1, X_2 – сечения этого подрасслоения и X – произвольное сечение $T^{\mathbb{C}}M \setminus \ker_z L_M \forall z[X_i, X]_Z \in T^{\mathbb{C}}_Z M$ ($i = 1, 2$) по определению ядра формы Леви [11]. Аналогично, $[[X_j, X], X_i]$ является сечением $T^{\mathbb{C}}M$. Из тождества Якоби следует, что $[[X_1, X_2], X]$ тоже сечение $T^{\mathbb{C}}M$. В силу произвольности X получаем, что $[X_1, X_2] \in \ker L_M$.

Рассмотрим произвольную точку p из M , в окрестности которой M распрямляется.

В силу биголоморфной инвариантности формы Леви и того, что ранг формы Леви M равен k , получаем, что M_0 имеет невырожденную форму Леви. В каждой точке некоторой окрестности начала координат на M задано отображение в грассманово многообразие

$$z \rightarrow \ker_z L_M \subset T^{\mathbb{C}}_z M.$$

В окрестности точки p это отображение является CR-функцией (см. [12]). По теореме 2 множество таких точек $p \in M$ открыто и всюду плотно в M . Следовательно, на M определено гладкое отображение, которое почти всюду является CR-функцией. Любая

CR-функция является решением дифференциального уравнения первого порядка, поэтому из соображений непрерывности получаем, что отображение $z \rightarrow \ker_z L_M$ будет CR-отображением.

Следовательно (см. [12]), существует окрестность начала координат, в которой M биголоморфно распрямляется. Более общий результат о биголоморфном распрямлении вещественно-аналитических подмногообразий доказан в других терминах в работе Фримена [4].

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15.04.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1985.
- [2] Пинчук С. И. Голоморфные отображения в $\mathbb{C}^n$ и проблемы голоморфной эквивалентности // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 9. М.: ВИНТИ, 1986. С. 195–223.
- [3] Лобода А. В. О некоторых инвариантах трубчатых гиперповерхностей в $\mathbb{C}^n$. Препринт.
- [4] Freeman M. Biholomorphic straightening // Ann. of Math. 1977. V. 106. № 2. P. 319–352.
- [5] Tanaka N. On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables // J. Math. Soc. Japan. 1962. V. 14. P. 397–429.
- [6] Кобаяси С., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Мир, 1981.
- [7] Stanton N. Infinitesimal CR-automorphisms of real hypersurfaces. Preprint.
- [8] Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969.
- [9] Белошапка В. К. Конечномерность группы автоморфизмов вещественно-аналитической поверхности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 2. С. 437–442.
- [10] Freeman M. Real submanifolds with generate Levi form // Proc. Symp. in Pure Math. 1977. V. 30. P. 141–147.
- [11] Чирка Е. М. Введение в геометрию CR-многообразий // УМН. 1991. Т. 46. С. 81–164.
- [12] Пинчук С. И., Цыганов Ш. И. CR-распрямление вещественных многообразий в $\mathbb{C}^n$ // Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 6. С. 106–121.