Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Чанга, О нижних оценках модуля дзета-функции Римана на критической прямой, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 6, 922–927

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm151>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:28:58

УДК 511

О НИЖНИХ ОЦЕНКАХ МОДУЛЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА НА КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

М. Е. Чанга

Установлена связь между нижней оценкой максимума модуля $\zeta(1/2 + iT + s)$ в круге $|s| \leq H$ и нижней оценкой максимума модуля $\zeta(1/2 + iT + it)$ на отрезке $|t| \leq H$ при $0 < H(T) \leq 1/2$. Доказана теорема о нижней оценке максимума модуля $\zeta(1/2 + iT + it)$ на отрезке $|t| \leq H$ при $40 \leq H(T) \leq \log \log T$.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Формулировка результатов. В статье продолжены исследования функций $F(T; H)$ и $G(T; H)$, которые ввел Карацуба в [1] и [2]:

$$F(T; H) = \max_{|t-T| \leq H} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|, \quad G(T; H) = \max_{|s| \leq H} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + iT + s\right) \right|.$$

Здесь устанавливается связь между нижними оценками $F(T; H)$ и $G(T; H)$ при $0 < H \leq 1/2$ и доказывается теорема о нижней оценке $F(T; H)$ при $H \geq 40$. В статье употребляются общепринятые обозначения; в частности, $c_1, c_2, \dots$ – положительные абсолютные постоянные.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < H(T) \leq 1/2$ и при $T \geq T_1 > 0$ имеет место оценка

$$G(T; H) > T^{-c_1}.$$

Тогда при $T \geq T_2 > 0$ справедлива оценка

$$F(T; H) > T^{-c_2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение теоремы при $H = (\log T)^{-1}$ доказано Гараевым в [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из теоремы следует, что гипотезы 1–3 из [1] эквивалентны гипотезам 1–3 из [2].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $40 \leq H(T) \leq \log \log T$. Тогда при $T \geq T_1 > 0$ справедлива оценка

$$F(T; H) > T^{-\exp(-0.1H)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При больших H , а именно, $\log \log T \ll H \ll T$, нижняя оценка вида

$$F(T; H) \geq \exp\left(\frac{3}{4} \sqrt{\frac{\log H}{\log \log H}}\right)$$

получена Баласубраманияном в [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При $H \gg 1$ из теоремы Титчмарша [5, с. 217] следует, что

$$F(T; H) \geq T^{-c_1}. \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Лучшей, чем (1), оценкой является неопубликованная оценка Карачубы

$$F(T; H) \geq T^{-H^{-2}}.$$

Доказательства обеих теорем, приведенные в следующих пунктах, основаны на принципе максимума модуля и используют простейшие теоретико-функциональные свойства $\zeta(s)$ такие, как степенной порядок роста в критической полосе и ограниченность на прямой $\operatorname{Re} s = a > 1$. Таким образом, эти же соображения могут быть применены и к другим аналитическим функциям, например, к L -функциям Дирихле и дзета-функциям Эпштейна.

Нам понадобится следующая теоретико-функциональная лемма, доказательство которой приведено, например, в [6, с. 456].

ЛЕММА (теорема Адамара о трех кругах). Пусть $0 < r_1 < r_2$ и функция $f(s)$ однозначна и аналитична в кольце $r_1 \leq |s| \leq r_2$. Если

$$M(r) = \max_{|s|=r} |f(s)|,$$

то при $r_1 \leq r \leq r_2$ имеет место оценка

$$M(r) \leq (M(r_1))^{(\log(r_2/r))/(\log(r_2/r_1))} (M(r_2))^{(\log(r/r_1))/(\log(r_2/r_1))}.$$

2. Доказательство теоремы 1. Положим $r_1 = H^3$, $r_2 = 1$ и $r = H$. Тогда

$$\frac{\log(r_2/r)}{\log(r_2/r_1)} = \frac{\log H^{-1}}{\log H^{-3}} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)} = \frac{\log H^{-2}}{\log H^{-3}} = \frac{2}{3}.$$

Применяя теорему Адамара о трех кругах к функции $\zeta(1/2 + iT + s)$, получим

$$M(H) \leq M^{1/3}(H^3) M^{2/3}(1).$$

По условию при $T \geq T_1 > 0$

$$M(H) = G(T; H) > T^{-c_1}.$$

С другой стороны, при $T \geq T_3 > 0$

$$M(1) = G(T; 1) \leq T^{c_3}. \quad (2)$$

Таким образом, при $T \geq T_2 = \max(T_1, T_3) > 0$ справедлива оценка

$$M(H^3) = G(T; H^3) > T^{-3c_1-2c_3}.$$

Это означает, что на окружности $|s| = H^3$ существует точка $s_0 = \sigma_0 + it_0$ такая, что

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + iT + s_0\right) \right| > T^{-3c_1-2c_3}. \quad (3)$$

Будем считать, что $\sigma_0 \neq 0$, так как в противном случае утверждение теоремы тривиально следует из этого неравенства.

Рассмотрим функцию

$$f(s) = \frac{1}{H^4}(s^2 - 2H^2s);$$

ее действительная часть имеет вид

$$\operatorname{Re} f(s) = -\frac{t^2}{H^4} + \frac{1}{H^4} \sigma(\sigma - 2H^2).$$

Заметим, что функция $\sigma(\sigma - 2H^2)$ неположительна и монотонно убывает при $0 \leq \sigma \leq H^2$. Выберем прямоугольный контур Γ с вершинами в точках $\pm iH^2$, $H^2 \pm iH^2$. Очевидно выполнение неравенств

$$\operatorname{Re} f(s) \leq 0, \quad s \in \Gamma, \quad \sigma = 0, \quad (4)$$

$$\operatorname{Re} f(s) \leq -1, \quad s \in \Gamma, \quad \sigma > 0. \quad (5)$$

Точка $|\sigma_0|$ попадает внутрь контура Γ . Поскольку $|\sigma_0| \leq H^3 \leq \frac{1}{2}H^2$ имеем также неравенство

$$\operatorname{Re} f(|\sigma_0|) \geq \operatorname{Re} f\left(\frac{1}{2}H^2\right) = -\frac{3}{4}. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$F(s) = \zeta\left(\frac{1}{2} + i(T + t_0) + s \operatorname{sign} \sigma_0\right) T^{12(c_1+c_3)f(s)},$$

которая аналитична в области, ограниченной контуром Γ . Пользуясь неравенствами (3) и (6), находим

$$|F(|\sigma_0|)| > T^{-3c_1-2c_3} \cdot T^{-9(c_1+c_3)} = T^{-12c_1-11c_3}. \quad (7)$$

С другой стороны, поскольку при s , принадлежащем Γ ,

$$|it_0 + s \operatorname{sign} \sigma_0| \leq H^3 + 2H^2 \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \leq 1,$$

пользуясь неравенствами (2) и (5), находим

$$\max_{s \in \Gamma, \sigma > 0} |F(s)| \leq T^{c_3} \cdot T^{-12(c_1+c_3)} = T^{-12c_1-11c_3}.$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\max_{s \in \Gamma, \sigma > 0} |F(s)| < |F(|\sigma_0|)|,$$

откуда получаем

$$|F(|\sigma_0|)| \leq \max_{s \in \Gamma, \sigma=0} |F(s)|.$$

Действительно, в противном случае имело бы место неравенство

$$|F(|\sigma_0|)| > \max_{s \in \Gamma} |F(s)|,$$

которое противоречит принципу максимума модуля. Наконец, пользуясь неравенствами (4) и (7), имеем при $T \geq T_2 > 0$

$$T^{-12c_1-11c_3} < |F(|\sigma_0|)| \leq \max_{|t| \leq H^2} |F(it)| \leq \max_{|t| \leq H^2} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + i(T + t_0 + t)\right) \right|.$$

Этим доказательство завершается, ибо $|t_0 + t| \leq H^3 + H^2 \leq H/4 + H/2 \leq H$.

3. Доказательство теоремы 2. Положим $n = [H/(4e\sqrt{2})] \geq 2$ и рассмотрим функцию

$$f(s) = -\frac{2^{2n}(4n)!}{H^{4n}} \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k s^{2k}}{2^k (2k)!} + s \right);$$

ее действительная часть имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(s) &= -\frac{2^{2n}(4n)!}{H^{4n}} \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{2^k (2k)!} \sum_{m=0}^k C_{2k}^{2m} (-1)^m t^{2m} \sigma^{2k-2m} + \sigma \right) \\ &= -\frac{t^{4n}}{H^{4n}} - \frac{2^{2n}(4n)!}{H^{4n}} \sum_{m=1}^{2n-1} (-1)^m t^{2m} \sum_{k=m}^{2n} \frac{(-1)^k \sigma^{2k-2m}}{2^k (2k)!} C_{2k}^{2m} + f(\sigma) \\ &= -\frac{t^{4n}}{H^{4n}} + \sum_{m=1}^{2n-1} \frac{t^{2m}}{2^m (2m)!} \left(-\frac{2^{2n}(4n)!}{H^{4n}} \sum_{k=0}^{2n-m} \frac{(-1)^k \sigma^{2k}}{2^k (2k)!} \right) + f(\sigma). \end{aligned}$$

Заметим, что при $0 \leq \sigma \leq 2$ последовательность $\sigma^{2k}/(2^k (2k)!)$ монотонно убывает. Действительно, при $k \geq 0$ имеем

$$\frac{\sigma^{2(k+1)}}{2^{k+1}(2k+2)!} = \frac{\sigma^{2k}}{2^k (2k)!} \cdot \frac{\sigma^2}{2(2k+1)(2k+2)} \leq \frac{\sigma^{2k}}{2^k (2k)!}.$$

Следовательно, при $0 \leq \sigma \leq 2$ справедливы оценки

$$\frac{2^{2n}(4n)!}{H^{4n}} \left(-\sigma + \frac{\sigma^2}{4} - \frac{\sigma^4}{96} \right) \leq f(\sigma) \leq \frac{2^{2n}(4n)!}{H^{4n}} \left(-\sigma + \frac{\sigma^2}{4} \right) \leq 0,$$

а также

$$-\frac{2^{2n}(4n)!}{H^{4n}} \sum_{k=0}^{2n-m} \frac{(-1)^k \sigma^{2k}}{2^k (2k)!} \leq 0.$$

Выберем прямоугольный контур Γ с вершинами в точках $\pm iH$, $2 \pm iH$. Очевидно выполнение неравенств

$$\operatorname{Re} f(s) \leq 0, \quad s \in \Gamma, \quad \sigma = 0, \quad (8)$$

$$\operatorname{Re} f(s) \leq -1, \quad s \in \Gamma, \quad t = \pm H, \quad (9)$$

$$\operatorname{Re} f(s) \leq -\frac{2^{2n}(4n)!}{H^{4n}}, \quad s \in \Gamma, \quad \sigma = 2. \quad (10)$$

С другой стороны, имеем

$$\operatorname{Re} f(1) \geq -\frac{73}{96} \frac{2^{2n}(4n)!}{H^{4n}}. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$F(s) = \zeta\left(\frac{1}{2} + iT + s\right) T^{f(s)},$$

которая аналитична в области, ограниченной контуром Γ . При $T \geq T_2 > 0$ на верхней и нижней сторонах Γ имеем

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + iT + s\right) \right| \leq \sqrt{T},$$

откуда, пользуясь неравенством (9), находим

$$|F(s)| \leq T^{-1/2}, \quad s \in \Gamma, \quad t = \pm H.$$

На правой стороне контура Γ имеет место оценка

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + iT + s\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s/2}} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{s/2}} \frac{5}{3},$$

откуда в силу неравенства (10) получаем

$$|F(s)| \leq \frac{5}{3} T^{-2^{2n}(4n)!/H^{4n}}, \quad s \in \Gamma, \quad \sigma = 2.$$

В силу выбора n

$$2^{2n}(4n)! H^{-4n} \leq (4\sqrt{2} n H^{-1})^{4n} \leq e^{-4n} \leq e^{-8},$$

поэтому при $T \geq T_3 > 0$ будет

$$T^{-1/2} < \frac{5}{3} T^{-2^{2n}(4n)!/H^{4n}}.$$

Таким образом, при $T \geq \max(T_2, T_3) > 0$ справедлива оценка

$$\max_{s \in \Gamma, \sigma > 0} |F(s)| \leq \frac{5}{3} T^{-2^{2n}(4n)!/H^{4n}}.$$

Пользуясь неравенством (11), находим

$$|F(1)| \geq \frac{1}{3} T^{-(73/96)(2^{2n}(4n)!/H^{4n})}, \quad (12)$$

ибо

$$\left| \zeta\left(\frac{3}{2} + iT\right) \right|^{-1} = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{3/2+iT}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{3/2}} = 3.$$

В силу выбора n

$$2^{2n}(4n)! H^{-4n} \geq (4\sqrt{2}nH^{-1}e^{-1})^{4n} \geq (2e^2)^{-4n} \geq \exp\left(-\frac{3H}{e\sqrt{2}}\right),$$

ибо $[x] \geq x/2$ при $x \geq 2$. Следовательно, при $T \geq T_4 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} T^{-(73/96)(2^{2n}(4n)!/H^{4n})} &\geq \frac{5}{3} T^{-2^{2n}(4n)!/H^{4n}} \cdot \frac{1}{5} T^{(23/96) \exp(-(3H)/(e\sqrt{2}))} \\ &> \frac{5}{3} T^{-2^{2n}(4n)!/H^{4n}}, \end{aligned}$$

поскольку $H \leq \log \log T$ и $\exp((23/96)(\log T)^{1-3/(e\sqrt{2})}) > 5$ для достаточно больших T . Таким образом, при $T \geq \max(T_2, T_3, T_4) > 0$ имеет место неравенство

$$\max_{s \in \Gamma, \sigma > 0} |F(s)| < |F(1)|,$$

откуда получаем

$$|F(1)| \leq \max_{s \in \Gamma, \sigma=0} |F(s)|.$$

Действительно, в противном случае имело бы место неравенство $|F(1)| > \max_{s \in \Gamma} |F(s)|$, которое противоречит принципу максимума модуля. Наконец, пользуясь неравенствами (8) и (12), имеем при $T \geq \max(T_2, T_3, T_4) > 0$

$$\max_{|t| \leq H} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + iT + it\right) \right| \geq \max_{|t| \leq H} |F(it)| \geq |F(1)| \geq \frac{1}{3} T^{-(73/96) \exp(-H/(2e\sqrt{2}))}.$$

Это завершает доказательство теоремы, поскольку для достаточно большого T имеем

$$\frac{1}{3} T^{-(73/96) \exp(-H/(2e\sqrt{2}))} > T^{-\exp(-0.1H)}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Карацуба А. А. О нижних оценках дзета-функции Римана // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 1. С. 15–16.
- [2] Карацуба А. А. О нижних оценках максимума модуля $\zeta(s)$ в малых областях критической полосы // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 5. С. 796–798.
- [3] Garaev M. Z. Concerning the Karatsuba conjectures // Taiwanese J. Math. 2002. V. 6. № 4. P. 573–580.
- [4] Balasubramanian R. On the frequency of Titchmarsh's phenomenon for $\zeta(s)$. IV // Hardy-Ramanujan J. 1986. V. 9. P. 1–10.
- [5] Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.
- [6] Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.