Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, Клоновая классификация дуально дискриминаторных алгебр с конечным носителем, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 359–366

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1510>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:51:40

УДК 512.57

КЛОНОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ДУАЛЬНО ДИСКРИМИНАТОРНЫХ АЛГЕБР С КОНЕЧНЫМ НОСИТЕЛЕМ

С. С. Марченков

Дуально дискриминаторные алгебры рассматриваются с точностью до клонов, порождаемых операциями алгебры. В терминах двуместных отношений эффективно описываются все клоны операций на конечном множестве, содержащие дуальный дискриминатор Пиксли. В качестве следствия определяется аналогичная клоновая классификация квазипримальных алгебр с конечным носителем.

Библиография: 19 названий.

Для любого множества E дуальным дискриминатором [1] на E называется функция

$$d(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } x = y, \\ z, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Следуя [2], алгебру $\langle E; F \rangle$ с носителем E и множеством операций F называем *дуально дискриминаторной*, если d есть термальная операция в алгебре $\langle E; F \rangle$. Алгебры $\langle E; F \rangle$, $\langle E; G \rangle$ называются *эквивалентными* [3], если совпадают клоны $[F]$, $[G]$ операций, порождаемые множествами F и G .

Дуально дискриминаторные алгебры играют заметную роль в универсальной алгебре и многозначной логике, в частности, в вопросах классификации полноты [1], [2], [4]–[9]. Например, около “половины” всех однородных алгебр [10] (в том числе с бесконечными носителями) эквивалентны подходящим дуально дискриминаторным алгебрам конечного типа [2], [5]–[7].

Дуально дискриминаторные алгебры с конечным носителем в [1] охарактеризованы через проективно прямоугольные подалгебры в декартовых квадратах алгебр. Однако описание из [1] неэффективно даже для алгебр конечного типа, поскольку требует проверки выполнения некоторых условий для множества всех конечноместных операций. Кроме того, как легко видеть, имеется континуальное число попарно неизоморфных дуально дискриминаторных алгебр с конечным неоднородным носителем. В связи с этим возникает вопрос об эффективной классификации таких алгебр.

Другая причина, побуждающая классифицировать дуально дискриминаторные алгебры, состоит в том, что всякая квазипримальная алгебра [11] является дуально дискриминаторной. Таким образом, мы можем получить одновременно и классификацию

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94–01–01625.

квазипримальных алгебр с конечным носителем. Наконец, клон $[d]$ представляет атом в решетке клонов операций на соответствующем множестве (см., например, [2]), а главный фильтр решетки, определяемый клоном $[d]$, содержит большое число важных для приложений клонов.

В данной работе мы проводим классификацию дуально дискриминаторных алгебр с конечным носителем на основе введенного отношения эквивалентности (клоновая классификация). Фактически для любого конечного множества E будут описаны (теорема 1) все клоны операций на E , включающие операцию d . Описание эффективно и базируется на соответствии Галуа для алгебр Поста [12]. Отметим, что для фиксированного конечного множества E конечность клоновой классификации вытекает из результатов работы [4]. В теореме 2 дается аналогичная классификация для квазипримальных алгебр с конечным носителем.

Для любого k , $k \geq 2$, в качестве стандартного k -элементного множества будем рассматривать множество $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Совокупность всех операций на E_k обозначим через P_k . Если $F \subseteq P_k$, то *клон* $[F]$, порожденный множеством F , есть множество всех операций на E_k , термально выражимых через операции из F и селекторные операции $e_n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$, где $1 \leq i \leq n$, $n = 1, 2, \dots$. Через L_k обозначим решетку всех клонов операций на E_k . Наименьшим элементом решетки L_k является клон всех селекторных операций, наибольшим – клон P_k .

Наряду с операциями на E_k будем рассматривать отношения на E_k . Множество всех отношений на E_k обозначим через Π_k . Если $\rho(x_1, \dots, x_m) \in \Pi_k$, то отношение ρ отождествляем с множеством всех тех наборов из E_k^m , на которых оно истинно. В связи с этим используем термины: *полное* (тождественно истинное) отношение, *пустое* (тождественно ложное) отношение, отношение ρ есть *расширение* ($\sigma \subseteq \rho$) или *сужение* ($\rho \subseteq \sigma$) отношения σ .

На множестве Π_k определим ряд операций (см. также [12]). *Конъюнкцией* отношений $\rho(x_1, \dots, x_m)$, $\sigma(x_1, \dots, x_n)$ назовем $(m+n)$ -местное отношение

$$\rho(x_1, \dots, x_m) \& \sigma(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}).$$

Проекцией отношения $\rho(x_1, \dots, x_m)$ по переменной x_i ($1 \leq i \leq m$) назовем $(m-1)$ -местное отношение

$$(\exists x_i) \rho(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m),$$

где областью действия квантора $\exists x_i$ является множество E_k . Операция *перестановки* и *отождествления* переменных предполагаем известными.

Диагоналями называем отношения, которые можно получить из элементарных диагоналей вида $x_i = x_j$ с помощью операций конъюнкции и отождествления переменных. Пустое отношение причисляем к диагоналям.

Пусть $R \subseteq \Pi_k$. *Замыканием* R (обозначение $[R]$) назовем наименьшее множество отношений из Π_k , содержащее все диагонали и замкнутое относительно применения операций конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных. Через $\mathcal{L}_k$ обозначим решетку всех замкнутых множеств отношений на E_k .

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$, $\rho(x_1, \dots, x_m) \in \Pi_k$. Говорим, что операция f *сохраняет* отношение ρ , если ρ , рассматриваемое как подмножество из E_k^m , образует подалгебру алгебры $\langle E_k; f \rangle^m$. Если $F \subseteq P_k$, $R \subseteq \Pi_k$, то говорим, что F сохраняет R , если каждая

операция из F сохраняет любое отношение из R . Множество всех операций из P_k , сохраняющих R , обозначим через $\text{Pol } R$, а множество всех отношений из Π_k , сохраняемых функциями из F , – через $\text{Inv } F$. Если F – множество всех селекторных операций из P_k , а R – множество всех диагоналей из Π_k , то, как нетрудно видеть, $\text{Pol } R = P_k$, $\text{Inv } P_k = R$, $\text{Pol } \Pi_k = F$, $\text{Inv } F = \Pi_k$.

Согласно теории Галуа для алгебр Поста [12] отображения Pol и Inv задают анти-изоморфизм решеток L_k и $\mathcal{L}_k$. Более точно, если $F \subseteq P_k$, $R \subseteq \Pi_k$, то $\text{Pol } R$ – клон из L_k , $\text{Inv } F$ – замкнутое множество из $\mathcal{L}_k$, $[F] = \text{Pol } \text{Inv } F$ и $[R] = \text{Inv } \text{Pol } R$. Таким образом, клоны операций на E_k можно определять через соответствующие замкнутые множества отношений на E_k .

Применим эти результаты для клоновой классификации дуально дискриминантных алгебр $\langle E_k; F \rangle$. С этой целью определим, прежде всего, множество отношений $\text{Inv}[d]$.

Пусть D_k состоит из следующих отношений на E_k : отношения вида $x \in E$, где $E \subseteq E_k$; графики подстановок π на E_k , т.е. отношения вида

$$\pi(x_1) = x_2; \quad (1)$$

отношение

$$x_1 = 0 \vee x_1 = x_2 = k - 1. \quad (2)$$

Нетрудно убедиться в том, что операция d сохраняет каждое отношение из D_k (отметим, что d , будучи структурной однородной операцией [10], по определению сохраняет все отношения $x \in E$ и (1)). Таким образом, $[d] \subseteq \text{Pol } D_k$.

Предположим, что $[d] \neq \text{Pol } D_k$. Так как D_k содержит все отношения вида (1), то клон $\text{Pol } D_k$ состоит из однородных операций [10]. Известно (см. [13], [14] или [15], [16] при $k = 2$ и [5]–[7] при $k \geq 3$), что в случае $[d] \subset \text{Pol } D_k$ клон $\text{Pol } D_k$ содержит хотя бы одну из следующих операций: при $k \geq 2$ – тернарный дискриминатор

$$p(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ x, & \text{если } x \neq y, \end{cases} \quad (3)$$

при $k \geq 3$ – операцию

$$l_k(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} x_1, & \text{если } \{x_1, \dots, x_k\} = E_k, \\ x_k & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

при $k \geq 4$ – операцию

$$d_k(x_1, \dots, x_{k-1}) = \begin{cases} x_k, & \text{если } \{x_1, \dots, x_{k-1}, x_k\} = E_k, \\ d(x_1, x_2, x_3) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Проверяем, что каждая из операций p , l_k , d_k не сохраняет отношения (2). Значит, $[d] = \text{Pol } D_k$ и $\text{Inv}[d] = [D_k]$.

Опишем теперь отношения, входящие в множество $[D_k]$. Покажем сначала, что множеству $[D_k]$ принадлежат все отношения вида

$$x_1 = a \vee x_2 = b. \quad (4)$$

В самом деле, если обозначить через $\rho(x_1, x_2)$ отношение (2) и через π – какую-либо подстановку на E_k , удовлетворяющую равенствам $\pi(0) = k - 1$, $\pi(k - 1) = 0$, то будем иметь

$$(\exists y_1)(\exists y_2)(\rho(y_1, x_1) \& (\pi(y_1) = y_2) \& \rho(x_2, y_2)) \equiv (x_1 = k - 1 \vee x_2 = k - 1).$$

Обозначим последнее отношение через $\sigma(x_1, x_2)$ и возьмем такие подстановки π_1, π_2 на E_k , что $\pi_1(a) = k - 1$ и $\pi_2(k - 1) = b$. Тогда отношение (4) можно задать формулой

$$(\exists y_1)(\exists y_2)((\pi_1(x_1) = y_1) \& \sigma(y_1, y_2) \& (\pi_2(y_2) = x_2)).$$

ЛЕММА 1. *Произвольное отношение из $[D_k]$ представимо в виде конъюнкции (не обязательно с непересекающимися множествами переменных) одноместных отношений и двуместных отношений вида (1) или (4).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по построению отношений в множестве $[D_k]$. Замечаем, что двуместная диагональ имеет вид (1), а отношение (2) представимо в виде конъюнкции отношений $x_1 \in \{0, k - 1\}$ и $(x_1 = 0 \vee x_2 = k - 1)$. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что требуемый в лемме вид будет иметь отношение

$$(\exists x_i)\rho(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n), \quad (5)$$

где отношение ρ представимо в виде конъюнкции K одноместных отношений и двуместных отношений вида (1) или (4). Без ограничения общности можно считать, что $i = n$.

Пусть $(x_n \in G_1), \dots, (x_n \in G_s)$ – все одноместные отношения из K , содержащие переменную x_n . Очевидно, что

$$(x_n \in G_1) \& \dots \& (x_n \in G_s) \equiv (x_n \in G),$$

где $G = G_1 \cap \dots \cap G_s$. Если переменная x_n в конъюнкции K входит только в одноместные отношения, то отношение ρ представимо в виде

$$\rho(x_1, \dots, x_n) \equiv (x_n \in G) \& \sigma(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

где отношение σ реализуется конъюнкцией сомножителей из K , не содержащих переменной x_n . Поэтому отношение (5) совпадает с отношением

$$(\exists x_n)(x_n \in G) \& \sigma(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Так как первый сомножитель этого отношения либо полон (при $G \neq \emptyset$), либо пуст (при $G = \emptyset$), то отношение (5) соответственно либо совпадает с отношением σ , либо пусто (пустое отношение можно представить, например, в виде $(x \in \{0\}) \& (x \in \{1\})$).

Пусть теперь переменная x_n в конъюнкции K входит по крайней мере в одно двуместное отношение. Рассмотрим сначала случай, когда этим отношением является отношение вида (1). Так как

$$(\pi(x_1) = x_2) \equiv (x_1 = \pi^{-1}(x_2)),$$

где π^{-1} – обратная к π подстановка на E_k , то можно предполагать, что переменная x_n входит в отношение $\pi(x_j) = x_n$. Тогда отношение ρ можно представить в форме

$$\rho(x_1, \dots, x_n) \equiv (\pi(x_j) = x_n) \& \sigma(x_1, \dots, x_n),$$

где отношение σ реализуется конъюнкцией сомножителей из K , отличных от $\pi(x_j) = x_n$. Замечаем, что

$$(\exists x_n)((\pi(x_j) = x_n) \& \sigma(x_1, \dots, x_n)) \equiv \sigma(x_1, \dots, x_{n-1}, \pi(x_j)).$$

Далее, легко видеть, что замена переменной x_n на $\pi(x_j)$ в одноместных отношениях и в двуместных отношениях типа (1) или (4) приводит к отношениям тех же самых типов. Таким образом, отношение $\sigma(x_1, \dots, x_{n-1}, \pi(x_j))$ представимо в виде конъюнкции одноместных отношений и двуместных отношений вида (1) или (4).

Предположим, что конъюнкция K не содержит отношений вида (1) с переменной x_n . Так как в дальнейших преобразованиях существенны лишь отношения, содержащие переменную x_n , то будем просто считать, что

$$\rho(x_1, \dots, x_n) \equiv (x_n \in G) \& \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n-1} (x_i = a_i \vee x_n = b_i) \right).$$

Пусть $G = \{c_1, \dots, c_p\}$. Тогда по определению квантора $\exists x_n$ отношение $(\exists x_n) \rho(x_1, \dots, x_n)$ совпадает с отношением

$$\bigvee_{1 \leq j \leq p} \bigwedge_{1 \leq i \leq n-1} (x_i = a_i \vee c_j = b_i).$$

Отношение $x_i = a_i \vee c_j = b_i$ при $c_j = b_i$ полно, а при $c_j \neq b_i$ совпадает с отношением $x_i = a_i$. Положим для любого j , $1 \leq j \leq p$,

$$N_j = \{i : 1 \leq i \leq n-1, c_j = b_i\}.$$

Тогда

$$(\exists x_n) \rho(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigvee_{1 \leq j \leq p} \bigwedge_{i \in \{1, \dots, n-1\} \setminus N_j} (x_i = a_i). \quad (6)$$

Множества $N_1, \dots, N_p$ попарно не пересекаются, а объединение этих множеств совпадает с $\{1, \dots, n-1\}$. Если одно из множеств $N_1, \dots, N_p$ равно $\{1, \dots, n-1\}$, то, очевидно, отношение $(\exists x_n) \rho(x_1, \dots, x_n)$ полно. В противном случае пусть, например, $N_1, \dots, N_q$ – все непустые и отличные от $\{1, \dots, n-1\}$ множества из числа $N_1, \dots, N_p$. Тогда в эквивалентности (6) вместо p можно взять q . С использованием стандартных преобразований из алгебры логики получаем далее

$$\bigvee_{1 \leq j \leq q} \bigwedge_{i \in \{1, \dots, n-1\} \setminus N_j} (x_i = a_i) \equiv \bigwedge_{s, t} (x_s = a_s \vee x_t = a_t),$$

где конъюнкция в правой части распространяется по всем тем значениям s, t из $\{1, \dots, n-1\}$, которые лежат в различных множествах $N_1, \dots, N_q$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть отношение $\rho(x_1, \dots, x_n)$ представимо в виде конъюнкции одноместных отношений и двуместных отношений типа (1) или (4). Тогда ρ можно также представить в виде конъюнкции одноместных отношений и двуместных отношений типов

$$(x_1 \in E) \& (\pi(x_1) = x_2), \quad (7)$$

$$(x_1 \in E) \& (x_2 \in G) \& (x_1 = a \vee x_2 = b), \quad (8)$$

причем каждое из указанных отношений входит в множество $[\rho]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого i , $1 \leq i \leq n$, через $\sigma_i(x_i)$ обозначим проекцию отношения ρ по всем переменным, отличным от x_i . Аналогичным образом определяем отношения $\tau_{ij}(x_i, x_j)$, где $1 \leq i < j \leq n$. Очевидно, что отношения σ_i, τ_{ij} принадлежат множеству $[\rho]$.

Из определения проекции вытекает, что отношения σ_i, τ_{ij} , рассматриваемые от всех переменных $x_1, \dots, x_n$, будут являться расширениями отношения ρ . Расширением ρ будет являться также любая конъюнкция отношений $\sigma_i(x_i), \tau_{ij}(x_i, x_j)$.

С другой стороны, если в конъюнктивное представление отношения ρ входит отношение $\sigma(x_i)$, то, очевидно, отношение $\sigma(x_i)$ может являться лишь расширением отношения $\sigma_i(x_i)$. Аналогично для отношения $\tau(x_i, x_j)$, входящего в конъюнктивное представление ρ , и отношения $\tau_{ij}(x_i, x_j)$. Значит, если образовать конъюнкцию K всех тех отношений $\sigma_i(x_i), \tau_{ij}(x_i, x_j)$, которые отвечают входящим в конъюнктивное представление отношения ρ отношениям $\sigma(x_i)$ и $\tau(x_i, x_j)$, то отношение ρ будет являться расширением отношения κ , реализуемого конъюнкцией K . Однако, как отмечалось выше, отношение κ есть расширение отношения ρ . Следовательно, κ совпадает с ρ .

Если отношение $\tau(x_i, x_j)$, входящее в конъюнктивное представление отношения ρ , имеет вид (1) или (4), то соответствующее ему отношение $\tau_{ij}(x_i, x_j)$, будучи сужением отношения $\tau(x_i, x_j)$, может иметь лишь вид (7) или (8). Лемма доказана.

Пусть R – множество одно- и двуместных отношений на E_k . Будем говорить, что множество R 2-замкнуто, если R совпадает с множеством одно- и двуместных отношений из $[R]$.

ТЕОРЕМА 1. Для любого k , $k \geq 2$, число попарно не эквивалентных дуально дискриминаторных алгебр $\langle E_k; F \rangle$ равно числу различных 2-замкнутых множеств отношений на E_k , все двуместные отношения которых имеют вид (7) или (8) либо представимы в виде конъюнкции двух одноместных отношений. Клоны $[F]$, содержащие дуальный дискриминатор d , и только они представимы в виде $\text{Pol } R$, где R – подходящие 2-замкнутые множества отношений указанного типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как установлено выше, $[d] = \text{Pol } D_k$. Так как $\text{Pol } D_k = \text{Pol}[D_k]$ (см. [12]), то имеем также $[d] = \text{Pol}[D_k]$.

По соответствию Галуа между решетками L_k и $\mathcal{L}_k$ для всякого клона F с условием $d \in F$ имеется единственное замкнутое множество отношений R , где $R \subseteq [D_k]$ и $F = \text{Pol } R$. Согласно лемме 1 множество R состоит из отношений, которые представимы в виде конъюнкции одноместных отношений и двуместных отношений типов (1) или (4). Обозначим через R_2 множество всех одно- и двуместных отношений из R . В силу леммы 2 и ввиду замкнутости множества R множество R_2 2-замкнуто и $[R_2] = R$.

Кроме того, по лемме 2 каждое двуместно отношение из R_2 либо представимо в виде конъюнкции двух одноместных отношений, либо имеет вид (7) или (8). Из $[R_2] = R$ следует (см. [12]), что $\text{Pol } R_2 = \text{Pol } R$. Таким образом, $F = \text{Pol } R_2$ и теорема доказана.

Квазипримальная алгебра может быть определена [11] как алгебра, в которой терминальной операцией является терминальный дискриминатор (3). Так как

$$d(x, y, z) = p(x, p(x, y, z), z),$$

то квазипримальная алгебра является также дуально дискриминаторной.

Мы хотим провести классификацию квазипримальных алгебр с конечным носителем в духе доказанной теоремы 1. С этой целью для любого k , $k \geq 2$, через Q_k обозначим конечное множество отношений на E_k , состоящее из всех отношений вида $x \in E$, где $E \subseteq E_k$, и всех отношений вида (1). Легко видеть, что операция p сохраняет каждое отношение из Q_k . Таким образом, $[p] \subseteq \text{Pol } Q_k$. Так как множество Q_k содержит все отношения (1), то клон $\text{Pol } Q_k$ состоит только из однородных операций на E_k . В [2] показано, что при $\text{Pol } Q_k \neq [p]$ клон $\text{Pol } Q_k$ обязан содержать операцию

$$r_k(x_1, \dots, x_{k-1}) = \begin{cases} x_k, & \text{если } \{x_1, \dots, x_{k-1}, x_k\} = E_k, \\ x_1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Однако, как легко видеть, операция r_k не сохраняет отношения $x \in E_{k-1}$. Значит, на самом деле $[p] = \text{Pol } Q_k$.

Далее действуем по той же схеме и для дуально дискриминаторных алгебр. При этом можно воспользоваться ослабленными версиями лемм 1 и 2 (в случае квазипримальных алгебр отсутствуют отношения вида (4) или (8)). В результате мы приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого k , $k \geq 2$, число попарно не эквивалентных квазипримальных алгебр $\langle E_k; F \rangle$ равно числу различных 2-замкнутых множеств отношений на E_k , все двуместные отношения которых имеют вид (7) либо представимы в виде конъюнкции двух одноместных отношений. Клоны $[F]$, содержащие тернарный дискриминатор p , и только они представимы в виде $\text{Pol } R$, где R – подходящие 2-замкнутые множества отношений указанного типа.*

Отметим, что в [17] указаны представители всех классов эквивалентности квазипримальных алгебр с трехэлементным носителем.

Нетрудно показать, что при $F \subseteq P_k$ клон $[F]$, содержащий тернарный дискриминатор p , является классом функций k -значной логики, замкнутом относительно операции суперпозиции и операции разветвления по предикату равенства [18], [19]. В [18] для любого k , $k \geq 2$, установлена конечность таких замкнутых классов, а в [19] эти классы охарактеризованы в теоретико-категорных терминах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fried E., Pixley A. F. The dual discriminator function in universal algebra // *Acta Sci. Math.* 1979. V. 41. № 1–2. P. 83–100.
- [2] Csákány B., Gavalcová T. Finite homogeneous algebras I // *Acta Sci. Math.* 1980. V. 42. № 1–2. P. 57–65.
- [3] Grätzer G. Universal algebra. Princeton: Van Nostrand, 1968.
- [4] Baker K. A., Pixley A. F. Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems // *Math. Z.* 1975. V. 143. P. 165–174.
- [5] Марченков С. С. О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики // *Проблемы кибернетики.* 1979. № 36. С. 5–22.
- [6] Марченков С. С. Об однородных алгебрах // *Докл. АН СССР.* 1981. Т. 256. № 4. С. 787–790.
- [7] Марченков С. С. Однородные алгебры // *Проблемы кибернетики.* 1982. № 39. С. 85–106.
- [8] Марченков С. С. О классификации алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов // *Докл. АН СССР.* 1982. Т. 265. № 3. С. 533–536.
- [9] Марченков С. С. Классификация алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов // *Матем. вопросы кибернетики.* 1989. № 2. С. 100–122.
- [10] Marczewski E. Homogeneous algebras and homogeneous operations // *Fund. Math.* 1964. V. 56. P. 81–103.
- [11] Pixley A. F. The ternary discriminator function in universal algebra // *Math. Ann.* 1971. V. 191. P. 167–180.
- [12] Бондарчук В. Г., Калужин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста. I // *Кибернетика.* 1969. № 3. С. 1–10; II // *Кибернетика.* 1969. № 5. С. 1–9.
- [13] Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // *Amer. J. Math.* 1921. V. 43. P. 163–185.
- [14] Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic. *Ann. of Math. Stud.* V. 5. Princeton: Univ. Press, 1941.
- [15] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.
- [16] Марченков С. С., Угольников А. Б. Замкнутые классы булевых функций. Препринт. М.: ИПМ АН СССР, 1990.
- [17] Csákány B., Gavalcová T. Three-element quasi-primal algebras // *Studia Sci. Math. Hungar.* 1981. V. 16. P. 167–180.
- [18] Тайманов В. А. О функциональных системах k -значной логики с операциями замыкания программного типа // *Докл. АН СССР.* 1983. Т. 268. № 6. С. 1307–1310.
- [19] Соловьев В. Д. Замкнутые классы в k -значной логике с операцией разветвления по предикату // *Дискретная математика.* 1990. Т. 2. № 4. С. 19–25.