Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Седлецкий, О целых функциях класса С.Н. Бернштейна,
являющихся преобразованиями Фурье–Стилтьеса, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 367–380

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1511>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 15:10:23

УДК 517.5

О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ КЛАССА С.Н. БЕРНШТЕЙНА, НЕ ЯВЛЯЮЩИХСЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ ФУРЬЕ–СТИЛТЬЕСА

А.М. Седлецкий

Рассматриваются некоторые подклассы в классе целых функций экспоненциального типа, ограниченных на вещественной прямой. Строятся функции, принадлежащие этим подклассам и не являющиеся преобразованиями Фурье–Стилтьеса. Особое внимание уделяется распределению нулей этих функций. Полученные результаты применяются к вопросу об устойчивости полноты систем экспонент в C и L^p при малых возмущениях их показателей.

Библиография: 16 названий.

Пусть B обозначает класс целых функций экспоненциального типа $(\text{ЦФЭТ}) \leq \pi$, ограниченных на вещественной прямой (класс С.Н. Бернштейна). Этот класс часто встречается в различных вопросах анализа (см., например, [1]). Хорошо известно [2], что если функция $F(z) \in B$ является преобразованием Фурье–Стилтьеса, то соответствующая мера сосредоточена на $[-\pi, \pi]$, т.е. $F(z)$ имеет вид

$$F(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} d\sigma(t), \quad \text{var } \sigma(t) < \infty. \quad (1)$$

Класс целых функций вида (1) обозначаем через $\mathcal{F}$.

В статье рассматриваются некоторые подклассы класса B , характеризующиеся особой правильностью поведения входящих в них функций. Строятся функции, принадлежащие этим подклассам и не являющиеся преобразованиями Фурье–Стилтьеса. При этом особое внимание уделяется распределению нулей этих функций. Полученные результаты применяются к вопросу об устойчивости полноты систем экспонент $\exp(i\lambda_n t)$ в пространствах $C[-\pi, \pi]$ и $L^p(-\pi, \pi)$ при малых возмущениях показателей λ_n .

1. Целая функция экспоненциального типа $F(z)$ называется *функцией типа синуса* [3], если вне некоторой горизонтальной полосы

$$|F(z)| \asymp \exp(\pi|y|), \quad y = \text{Im } z,$$

где символ ' $\asymp$ ' означает, что отношение правой и левой частей отделено от нуля и бесконечности. Класс функций типа синуса обозначаем через S , $S \subset B$.

Пусть $S\mathcal{F} = S \cap \mathcal{F}$. Имеет место строгое включение $S\mathcal{F} \subset S$. Это подтверждается специально построенным в [4] примером функции класса S , не входящей в класс (1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96–01–00877.

В [5] отмечается, что в качестве такой функции достаточно взять почти периодическую функцию $F(z)$ с равномерно, но не абсолютно сходящимся рядом Фурье и со спектром, лежащим на $[-\pi, \pi]$ так, чтобы точки $\pm\pi$ входили в спектр. Заметим, что при таком подходе, по-видимому, не легко следить за нулями $F(z)$. В [6] был развит прием, предложенный в [4], он позволил контролировать нули соответствующей функции $F(z)$.

Вопрос о строгом включении $S\mathcal{F} \subset S$ важен с точки зрения негармонического анализа. Дело в том, что в L^2 -теории систем $\exp(i\lambda_n t)$ большую роль играют функции класса S [3], в то время, как для C -теории существенно, что показатели λ_n системы экспонент порождаются нулями функции класса $S\mathcal{F}$ [7]. Именно аппроксимационный аспект и побудил автора в данной статье вновь вернуться к вопросу о собственном включении $S\mathcal{F} \subset S$. Построенная нами здесь функция типа синуса, не входящая в класс $\mathcal{F}$, в известном смысле близка “самому” синусу (т.е. функции $\sin \pi z$, входящей в $\mathcal{F}$), причем с точки зрения распределения нулей эта близость в определенной шкале окончательна.

В наших построениях важную роль играет ЦФЭТ $G(z)$, задаваемая интерполяционным рядом Лагранжа

$$G(z) = \sin \pi z \sum_1^{\infty} \frac{\pm l(n)}{(-1)^n n^{1/2}(z-n)}, \quad (2)$$

где ‘ $\pm$ ’ – произвольная последовательность знаков, а $l(t)$ – медленно меняющаяся функция [8], т.е. $l(t)$ положительна и измерима на некоторой полупрямой $t > A$ и при всех $\lambda > 0$

$$\frac{l(\lambda t)}{l(t)} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Класс медленно меняющихся функций обозначаем через L .

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть $l(t) \in L$, $G(z)$ – функция (2) и пусть

$$F(z) = \sin \pi z + aG(z), \quad a \neq 0, \quad a \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Тогда

- 1) $F(z) \in S$;
- 2) все нули z_n функции $F(z)$ можно перенумеровать так, что $n \in \mathbb{Z}$ и верна асимптотическая формула

$$z_n = n + O\left(\frac{l(|n|) \log |n|}{|n|^{1/2}}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty; \quad (5)$$

- 3) если a вещественно и $|a|$ достаточно мал, то все нули функции $F(z)$ являются простыми и вещественными и располагаются по одному в интервалах $(n - 1/2, n + 1/2)$, $n \in \mathbb{Z}$, и только в них;
- 4) если

$$\sum_1^{\infty} \frac{l^2(n)}{n} = \infty, \quad (6)$$

то при надлежащем выборе знаков в (2) $F(z) \notin \mathcal{F}$.

2. Свойства функций класса L . Обозначим через LZ класс медленно меняющихся функций в смысле Зигмунда. По определению [8] функция $b(t) \in LZ$, если $b(t)$ положительна на некоторой полупрямой $t > A$ и если при любом $\varepsilon > 0$ функция $b(t)t^\varepsilon$ возрастает, а функция $b(t)t^{-\varepsilon}$ убывает при всех достаточно больших t . Справедливо включение $LZ \subset L$ [8].

ЛЕММА 1. Если $l(t) \in L$, то найдется функция $b(t) \in LZ$ такая, что $l(t) \sim b(t)$, $t \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 2. Если $l(t) \in L$, то при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ соотношение (3) равномерно по $\lambda \in [\varepsilon, 1/\varepsilon]$.

ЛЕММА 3. Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ функция $f(t)t^{-\varepsilon} \in L^1(0, a)$ (функция $f(t)t^\varepsilon \in L^1(a, \infty)$), $0 < a < \infty$. Пусть $l(t) \in L$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^a l(x)f(x) dx &\sim l(x) \int_0^a f(x) dx, & x \rightarrow \infty \\ \left(\int_a^\infty l(x)f(x) dx \sim l(x) \int_a^\infty f(x) dx, & x \rightarrow \infty \right). \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. Пусть $l(t) \in L$. Тогда найдется функция $A(z)$, аналитическая и без нулей в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$ и такая, что

$$A(z) \sim l(r), \quad r = |z| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} z \geq 0. \quad (7)$$

Леммы 1–3 содержатся в [8]. Лемма 4 доказана в [9] для $l(t) \in LZ$. В силу леммы 1 она верна и для $l(t) \in L$.

3. Основная лемма о функции $G(z)$.

ЛЕММА 5. Пусть $G(z)$ – функция (2), где $l(t) \in L$. Тогда

1) $G(z)$ – ЦФЭТ $\leq \pi$, и справедлива оценка

$$|G(z)| \leq C e^{\pi|y|} \frac{l(r) \log r}{r^{1/2}}, \quad r = |z| \geq 2, \quad y = \operatorname{Im} z; \quad (8)$$

2) если выполнено условие (6), то при надлежащем выборе знаков в (2) выполнено $G(z) \notin \mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 можно считать, что $l(t) \in LZ$. В [3] доказано, в частности, что если $(c_n) \in \ell^p$, $1 < p < \infty$, то сумма интерполяционного ряда Лагранжа

$$\sin \pi z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{(-1)^n (z - n)} \quad (9)$$

есть ЦФЭТ $\leq \pi$. Функция $G(z)$ имеет вид (9), где $(c_n) \in \ell^p$, $p > 2$, по определению класса LZ . Значит, $G(z)$ – ЦФЭТ $\leq \pi$.

Оценим $|G(z)|$ на прямой $\operatorname{Im} z = 1$. Считая без ограничения общности, что $l(t) > 0$ при $t \geq 1$, имеем

$$|G(x + i)| \leq (\operatorname{sh} \pi + \operatorname{ch} \pi) \sum_1^\infty \frac{l(n)}{n^{1/2} ((n - x)^2 + 1)^{1/2}}. \quad (10)$$

Фиксируем $A \in \mathbb{N}$ из условия, что функция $l(t)t^{-1/2}$ убывает на (A, ∞) . Пусть x — достаточно большое положительное число. Запишем сумму ряда (10) в виде

$$\sum_1^A + \sum_{A < n \leq x/2} + \sum_{x/2 < n \leq 2x+1} + \sum_{n > 2x+1} = \sum_{i=1}^4 S_i.$$

Ясно, что $S_1(x) = O(1/x)$. Суммы S_2, S_4 мажорируем интегралами, пользуясь убыванием функции $l(t)t^{-1/2}$. В S_2 $x - n \geq x/2$ и потому

$$S_2 < \frac{2}{x} \sum_{A < n \leq x/2} \frac{l(n)}{n^{1/2}} < \frac{2}{x} \int_0^{x/2} \frac{l(t)}{t^{1/2}} dt = \frac{2}{x^{1/2}} \int_0^{1/2} \frac{l(ux)}{u^{1/2}} du \sim C \frac{l(x)}{x^{1/2}}, \quad x \rightarrow \infty$$

(мы применили лемму 3). Также с применением леммы 3 получаем, что

$$S_4 < \int_{2x}^{\infty} \frac{l(t) dt}{t^{1/2}(t-x)} = \frac{1}{x^{1/2}} \int_2^{\infty} \frac{l(ux) du}{u^{1/2}(u-1)} \sim C \frac{l(x)}{x^{1/2}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Далее, по лемме 2 $\max(l(t) : x/2 \leq t \leq 3x) \sim l(x)$, $x \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\begin{aligned} S_3 &< C \frac{l(x)}{x^{1/2}} \sum_{x/2 < n \leq 2x+1} \frac{1}{((x-n)^2 + 1)^{1/2}} \leq 2C \frac{l(x)}{x^{1/2}} \int_{x/3}^{3x} \frac{dt}{((t-x)^2 + 1)^{1/2}} \\ &\leq C_1 \frac{l(x) \log x}{x^{1/2}}, \end{aligned}$$

если $x > x_1$. Объединяя полученные оценки для S_i , видим, что

$$|G(x+i)| \leq Cl(x)(\log x)x^{-1/2}, \quad x > x_0.$$

Но если $x > 0$ и если в ряде (10) заменить x на $-x$, то сумма ряда уменьшится. Значит,

$$|G(x+i)| \leq Cl(|x|)(\log |x|)|x|^{-1/2}, \quad |x| \geq 2. \quad (11)$$

Пусть $A(z)$ — функция из леммы 4. Рассмотрим аналитические функции

$$G_+(z) = \frac{G(z)z^{1/2}}{A(z) \log z}, \quad G_-(z) = \frac{G(z)(z-2i)^{1/2}}{A(i-z) \log(z-2i)}$$

соответственно в полуплоскостях $y = \operatorname{Im} z \geq 1$ и $y \leq 1$ (зафиксировав в этих полуплоскостях какие-нибудь однозначные ветви степени и логарифма). Подобно $G(z)$, функция $G_+(z)$ ($G_-(z)$) имеет $\Theta T \leq \pi$ в полуплоскости $y \geq 1$ ($y \leq 1$), и в силу (11) и (7) ограничена по модулю на прямой $y = 1$. По теореме Фрагмена–Линделёфа

$$|G_{\pm}(z)| \leq Ce^{\pi|y|}, \quad y \geq 1.$$

С учетом (7) это и означает, что верна оценка (8). Утверждение 1) доказано.

По условию (6) последовательность $(l(n)n^{-1/2}) \notin \ell^2$. Следовательно [10, с. 246], при некоторой расстановке знаков ‘ $\pm$ ’ ряд

$$\sum_1^{\infty} \pm (l(n)n^{-1/2}) e^{inx}$$

не является рядом Фурье–Стилтьеса. Другими словами, последовательность

$$c_n = 0, \quad n \leq 0, \quad c_n = \pm l(n)n^{-1/2}, \quad n \geq 1, \quad (12)$$

не является последовательностью коэффициентов Фурье–Стилтьеса. В силу (2) последовательность $G(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) совпадает с (12). Если бы $G(z) \in \mathcal{F}$, то последовательность $G(-n)/2\pi$ была бы последовательностью коэффициентов Фурье–Стилтьеса. Но это не так. Значит, $G(z) \notin \mathcal{F}$. Утверждение 2) верно. Лемма 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение 2) в лемме 5 неконструктивно. Однако, при $l(t) \equiv 1$ можно указать явный вид функции $G(z)$, для которой справедливы оба утверждения леммы 5. А именно, в этом случае такой функцией может служить функция

$$G(z) = \sin \pi z \sum_1^{\infty} \frac{\exp(icn \log n)}{(-1)^n n^{1/2}(z-n)}, \quad c > 0.$$

Действительно, замена в (2) ‘ $\pm$ ’ на $\exp(icn \log n)$ на доказательство утверждения 1) не влияет. Далее, тригонометрический ряд

$$\sum_1^{\infty} \exp(icn \log n) \frac{e^{inx}}{n^{1/2}}$$

не является рядом Фурье [11, с. 320]. Так как этот ряд есть ряд степенного типа, то по теореме братьев Рисс [12] заключаем, что он не является рядом Фурье–Стилтьеса. А именно этот факт и использовался в доказательстве утверждения 2) леммы 5.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Так как $\sin \pi z = (\exp(i\pi z) - \exp(-i\pi z))/2i \in \mathcal{F}$, а по лемме 5 $G(z) \notin \mathcal{F}$ при надлежащем выборе знаков, то $F(z) = \sin \pi z + aG(z) \notin \mathcal{F}$. Утверждение 4) верно.

Фиксируем $\delta \in (0, 1/2)$. Пусть $K_n = \{z : |z - n| < \delta\}$. Тогда

$$0 < m(\delta)e^{\pi|y|} \leq |\sin \pi z| \leq e^{\pi|y|}, \quad z \notin \cup K_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (13)$$

Объединяя эти оценки с оценкой (8) и учитывая определение класса LZ , заключаем, что если натуральное N достаточно велико, то

$$\frac{|aG(z)|}{|\sin \pi z|} \leq \frac{1}{2}, \quad |z| = N + \frac{1}{2}, \quad |z - n| = \delta, \quad |n| > N, \quad (14)$$

$$0 < Ae^{\pi|y|} \leq |F(z)| \leq Be^{\pi|y|}, \quad |z| > N + \frac{1}{2}, \quad z \notin \cup K_n, \quad |n| > N. \quad (15)$$

Оценки (15) показывают, что $F(z)$ – функция типа синуса. Утверждение 1) также верно.

Левая оценка (15) показывает, что при $|z| > N + 1/2$ вне кружков K_n нет нулей $F(z)$. Далее, на основании (14), (4) и теоремы Руше делаем вывод, что число нулей функции $F(z)$ как в круге $|z| < N + 1/2$, так и в кружках K_n , $|n| > N$, равно числу нулей функции $\sin \pi z$. Но все нули функции $\sin \pi z$ просты и совпадают с последовательностью $\mathbb{Z}$. Значит, мы можем так пронумеровать последовательность z_n ($n \in \mathbb{Z}$) всех нулей функции $F(z)$, что $z_n = n + \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{Z}$, причем $|\varepsilon_n| < \delta$, $|n| > N$. Подставляя $z_n = n + \varepsilon_n$ в формулу (4), находим с применением лемм 5 и 2, что

$$|\sin \pi \varepsilon_n| = O\left(l(|n|)(\log |n|)|n|^{-1/2}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty.$$

Так как $\varepsilon_n = O(\sin \pi \varepsilon_n)$ при $|\varepsilon_n| < 1/2$, то асимптотика (5) доказана. Утверждение 2) имеет место.

Если $|a|$ достаточно мал, то неравенства (14) имеют место на границах всех кружков K_n , $n \in \mathbb{Z}$. По теореме Руше в каждом из них лежит ровно один нуль функции $F(z)$. По доказанному других нулей у $F(z)$ нет. Если бы у $F(z)$ был невещественный нуль z_m , то в силу вещественности $F(x)$ комплексно сопряженное число $\bar{z}_m$ также было бы нулем $F(z)$. Но тогда в кружке K_m лежало бы не менее двух нулей функции $F(z)$, а это не так. Значит, все нули функции $F(z)$ вещественны. Утверждение 3) верно. Теорема 1 доказана.

5. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $b(t) \in LZ$. Обозначим через $S(\alpha; b(r))$ класс ЦФЭТ, для которых вне некоторой горизонтальной полосы

$$|F(z)| \asymp e^{\pi|y|} \frac{b(r)}{r^\alpha}, \quad r = |z|.$$

Ясно, что $S(0; 1) = S$. Нас будут интересовать функции классов $S(\alpha; b(r))$, не входящие в класс $\mathcal{F}$. Предварительно заметим, что при $\alpha < 0$ все функции класса $S(\alpha; b(r))$ не ограничены на горизонтальных прямых и потому не входят в класс B , а, тем более, и в класс $\mathcal{F}$. Если же $\alpha > 1/2$, то по теореме Пэли–Винера $S(\alpha; b(r)) \subset \mathcal{F}$.

На роль канонической функции (которой в теореме 1 служила функция $\sin \pi z$) теперь введем функцию

$$B(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} \frac{b(1/(\pi - |t|))}{(\pi - |t|)^{1-\alpha}} k(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (16)$$

где фиксированные функции $b(t)$, $k(t)$ удовлетворяют условиям

$$b(t) \in LZ, \quad \text{var} \left(b(t) : \frac{1}{\pi} \leq t \leq A \right) < \infty \quad \forall A \in \left(\frac{1}{\pi}, \infty \right), \quad (17)$$

$$\text{var} \left(k(t) : -\pi \leq t \leq \pi \right) < \infty, \quad k(\pm\pi) \stackrel{\text{df}}{=} k(\pm\pi \mp 0) \neq 0. \quad (18)$$

ЛЕММА 6. Пусть выполнены условия (17), (18). Тогда

- 1) все нули w_n функции $B(z)$ можно пронумеровать так, что $n \in \mathbb{Z}$ и верна асимптотическая формула

$$w_n = n + \frac{\alpha}{2} \text{sign } n + c + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty, \quad c = \frac{1}{2\pi i} \log \left(\frac{-k(-\pi)}{k(\pi)} \right); \quad (19)$$

- 2) вне кружков радиуса δ с центрами в точках w_n и 0

$$0 < C_1(\delta) \leq \frac{|B(z)|r^\alpha}{e^{\pi|y|}b(r)} \leq C_2(\delta) < \infty, \quad r = |z|; \quad (20)$$

- 3) если функция

$$\frac{b(1/(\pi - t))k(t)}{(\pi - t)^{1-\alpha}} \quad (21)$$

положительна и не убывает на $(0, \pi)$, а функция $k(t)$ четна или нечетна, то все нули функции $B(z)$ вещественны и просты.

Лемма 6 показывает, что в ее условиях $B(z) \in S(\alpha; b(r))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 2) и асимптотика (19) доказаны в статье [9]. Нам остается проверить часть утверждения 1), касающуюся согласованности этой асимптотики с нумерацией $n \in \mathbb{Z}$, и справедливость утверждения 3).

Утверждение 3) следует из теоремы Поля [13]: если функция $f(t)$ положительна и не убывает на $(0, \pi)$, то все нули каждой из функций

$$U(z) = \int_0^\pi f(t) \cos zt dt, \quad V(z) = \int_0^\pi f(t) \sin zt dt$$

вещественны и просты. Действительно, если $k(t)$ четна (нечетна), то $B(z)$ записывается в виде $2U(z)$ ($2iV(z)$), где $f(t)$ совпадает с функцией (21), для которой выполнены условия теоремы Поля.

Возвратимся к утверждению 1). Удобно считать, что участвующая в (19) константа $c = 0$. Этого всегда можно добиться, переходя к функции $B(z + c)$; для дальнейшего важно, что этот переход не нарушит оценки (20). Итак, $c = 0$. Тогда из (19) следует, что недостающая часть утверждения 1) о согласованности нумерации и асимптотики равносильна следующему утверждению: при всех достаточно больших натуральных N в круге $|z| < N + 1/2$ лежит ровно $2N + 1$ нулей функции $B(z)$. Априори, в силу (19) можно утверждать только, что число нулей $B(z)$ в круге $|z| < N + 1/2$ при достаточно больших N равно $2N + 1 + m$, где m – некоторое целое число. Нам остается показать, что $m = 0$.

Пусть $W(t)$ есть число точек w_n в круге $|z| < t$, пусть $Z(t)$ и $N(t)$ играют ту же роль по отношению к последовательностям (z_n) и $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \cup \{1/2\}$ соответственно, где

$$z_n = n + \frac{\alpha}{2} \operatorname{sign} n, \quad n \neq 0, \quad z_0 = \frac{1}{2}. \quad (22)$$

Дальнейшие рассуждения основаны на формуле Иенсена

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(re^{i\theta})| d\theta, \quad (23)$$

в которой $F(z)$ – целая функция с условием $F(0) = 1$, а $n(t)$ – число нулей $F(z)$ в круге $|z| < t$.

Пусть $F(z) = Cz^{-1}(z - 1/2) \sin \pi z$, где C выбрано так, чтобы $F(0) = 1$. Тогда $n(t) = N(t)$, и с учетом неравенств (13) формула (23) дает

$$\int_0^r \frac{N(t)}{t} dt = 2r + O(1), \quad r = N + \frac{1}{2} \rightarrow \infty.$$

Далее, $Z(t) = N(t)$ при $n + \alpha/2 < t < n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, и $0 < t < 1$. Если же $n < t < n + \alpha/2$, то $Z(t) = N(t) - 2$. Значит, если $r = N + 1/2$, то

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{Z(t)}{t} dt &= \int_0^r \frac{N(t)}{t} dt - 2 \sum_{n=1}^N \int_n^{n+\alpha/2} \frac{dt}{t} = 2r + O(1) - 2 \sum_1^N \log \left(1 + \frac{\alpha}{2n}\right) \\ &= 2r - \alpha \log r + O(1). \end{aligned} \quad (24)$$

Будем считать, что $B(0) = 1$. Этого условия можно добиться, переходя к функции $CB(z)(z - 1/2)^s/z^s$, где s – кратность нуля $z = 0$ функции $B(z)$; этот переход не нарушит оценки (20), а функцию $W(t)$ изменит лишь на конечном интервале. В круге

$|z| < N + 1/2$ при достаточно большом N содержится $2N + 1$ точек z_n и $2N + 1 + m$ точек w_n . Сравнивая (19) и (22), заключаем, что

$$W(t) = Z(t) + m, \quad t \in I = \cup \left(n + \frac{\alpha}{2} + o(1), n + 1 + \frac{\alpha}{2} + o(1) \right), \quad n \geq n_0,$$

где n_0 достаточно велико, и $W(t) = Z(t) + O(1)$ при всех $t > 0$.

Дополнительные к I интервалы (до полупрямой $t > n_0$) имеют вид $(n + \alpha/2 + o(1), n + \alpha/2 + o(1))$. Такой же вид имеют интервалы, полученные в результате возможного наложения друг на друга составляющих интервалов в I . Объединение тех и других интервалов обозначаем (I_n) . Тогда $(r = N + 1/2)$

$$\left| \int_0^r \frac{W(t)}{t} dt - \int_0^r \frac{Z(t) + m}{t} dt \right| \leq C + C_1 \sum_{n_0}^N \int_{I_n} \frac{dt}{t}.$$

Но

$$\sum_{n_0}^N \int_{I_n} \frac{dt}{t} = \sum_{n_0}^N \log \left(1 + \frac{o(1)}{n + \alpha/2 + o(1)} \right) = o(\log r), \quad r = N + \frac{1}{2} \rightarrow \infty,$$

и, следовательно, с учетом (24) получаем, что

$$\int_0^r \frac{W(t)}{t} dt = 2r - (\alpha - m + o(1)) \log r + O(1), \quad r = N + \frac{1}{2} \rightarrow \infty. \quad (25)$$

С другой стороны, в силу (20)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |B(re^{i\theta})| d\theta = 2r - \alpha \log r + \log b(r) + O(1). \quad (26)$$

Так как $b(t) \in L$, то $\log b(r) = o(\log r)$ [8]. Теперь, полагая в формуле (23) $F(z) = B(z)$, $n(t) = W(t)$ и учитывая оценки (25) и (26), видим, что $m = 0$. Лемма 6 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как нумерация нулей целой функции ведется с учетом их кратностей, то утверждение 2) леммы 6 показывает, в частности, что все достаточно большие по модулю нули функции $B(z)$ простые.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < \alpha < 1/2$ и для функций $b(t), k(t)$ выполнены условия (17), (18). Пусть $B(z)$ — функция (16), $G(z)$ — функция (2), где $l(t) \in L$, и пусть

$$F(z) = B(z) + aG(z), \quad a \neq 0, \quad a \in \mathbb{C}. \quad (27)$$

Тогда

- 1) $F(z) \in S(\alpha; b(r))$;
- 2) все нули z_n функции $F(z)$ можно пронумеровать так, что $n \in \mathbb{Z}$ и

$$z_n = w_n + O\left(\frac{l(|n|) \log |n|}{b(|n|)|n|^{1/2-\alpha}}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty,$$

где w_n — нули функции $B(z)$;

- 3) если функция (21) положительна и не убывает на $(0, \pi)$, причем $k(t)$ четна или нечетна, а $a \in \mathbb{R}$ и $|a|$ достаточно мал, то все нули функции $F(z)$ вещественны и просты;
- 4) если выполнено условие (6), то при надлежащем выборе знаков в (2) выполнено $F(z) \notin \mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K_n = (z : |z - w_n| < \delta)$, где δ фиксировано столь малым, что $K_n \cap K_m = \emptyset$ при $n \neq m$; это возможно в силу асимптотики (19). Тогда оценки (20) верны вне $\cup K_n$ и вне окрестности точки $z = 0$. Объединим оценки (20) и (8). Так как $\alpha < 1/2$, то с учетом определения класса LZ получим: если натуральное N достаточно велико, то

$$\frac{|aG(z)|}{|B(z)|} < \frac{1}{2}, \quad |z| = N + \frac{1}{2}, \quad |z - w_n| = \delta, \quad |n| > N, \quad (28)$$

$$|F(z)| \asymp e^{\pi|y|} \frac{b(r)}{r^\alpha}, \quad r = |z| > N + \frac{1}{2}, \quad z \notin \cup K_n, \quad |n| > N. \quad (29)$$

Оценка (29) показывает, что $F(z) \in S(\alpha; b(r))$, т.е. утверждение 1) имеет место. Далее, по построению (см. (16)) $B(z) \in \mathcal{F}$. По лемме 5 $G(z) \notin \mathcal{F}$ при должном выборе знаков. Значит, $F(z) = B(z) + aG(z) \notin \mathcal{F}$ и утверждение 4) также верно.

Из (28) и теоремы Руше вытекает, что функции $F(z)$ и $B(z)$ имеют одинаковое число нулей в круге $|z| < N + 1/2$, и что в кружке K_n ($|n| > N$) содержится ровно один нуль функции $F(z)$, как и у функции $B(z)$ (см. замечание 2). Других нулей у $F(z)$ при $|z| > N + 1/2$ нет, как показывает (29). Отсюда с помощью утверждения 1) леммы 6 выводим: можно так пронумеровать последовательность z_n нулей $F(z)$, что $n \in \mathbb{Z}$ и $z_n = w_n + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ в силу произвольности δ . Подставим $z_n = w_n + \varepsilon_n$ в (27). Так как $F(z_n) = 0$, то с учетом оценки (8) и леммы 2 получаем

$$B(w_n + \varepsilon_n) = O\left(\frac{l(|n|) \log |n|}{|n|^{1/2}}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty. \quad (30)$$

Нам предстоит извлечь из этой оценки оценку для ε_n (в теореме 1, где роль $B(z)$ играла функция $\sin \pi z$, такой трудности не было). Для этого мы покажем, что

$$|B(w_n + \varepsilon_n)| \asymp |B'(w_n)\varepsilon_n|, \quad n \rightarrow \pm\infty, \quad (31)$$

а затем воспользуемся вытекающими из леммы 6 оценками для $B'(w_n)$.

Сначала рассмотрим функцию $S(z)$ типа синуса, у которой нули λ_n отделены и, начиная с некоторого, просты. Утверждается, что

$$S(\lambda_n + \varepsilon_n) \sim S'(\lambda_n)\varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Для доказательства разложим $S(\lambda_n + \varepsilon_n)$ в ряд Тейлора ($S(\lambda_n) = 0$)

$$S(\lambda_n + \varepsilon_n) - S'(\lambda_n)\varepsilon_n = \sum_{k=2}^{\infty} S^{(k)}(\lambda_n) \frac{\varepsilon_n^k}{k!}. \quad (33)$$

По неравенству С.Н. Бернштейна и по теореме Фрагмена–Линделёфа

$$|S^{(k)}(\lambda_n)| \leq e^{\pi h} \pi^k \sup(|S(x)| : x \in \mathbb{R}) = C \pi^k, \quad h = \sup |\operatorname{Im} \lambda_n|.$$

Значит, модуль правой части в (33) не превосходит

$$C \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\pi |\varepsilon_n|)^k}{k!} = C(e^{\pi |\varepsilon_n|} - 1 - \pi |\varepsilon_n|) = o(\varepsilon_n).$$

Остается учесть свойство $|S'(\lambda_n)| \geq \Delta > 0$, $n \rightarrow \infty$, справедливое для функции класса S при условии отделимости ее нулей [3]. Промежуточное утверждение (32) доказано.

Теперь рассмотрим целую функцию

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} \frac{k_1(t) dt}{(\pi - |t|)^{\alpha} b(1/(\pi - |t|))}. \quad (34)$$

Обозначим ее через $B_1(z)$, если $k_1(t) \equiv 1$. Мы уже знаем, что все нули функции $B(z)$ лежат в горизонтальной полосе. По лемме 6 для нулей функции $B_1(z)$ верна асимптотика (19) с заменой α на $1 - \alpha$. Значит, при достаточно большом $h \in \mathbb{R}$ нули функции $H(z) = B_1(z + ih)$ находятся на положительном расстоянии от нулей функции $B(z)$. Функция $H(z)$ имеет вид (34) с $k_1(t) = \exp(-ht)$. По лемме 6 $H(z) \in S(1 - \alpha; 1/b(r))$. Поэтому $(z/2)B(z/2)H(z/2) \in S$. Далее, нули функции $(z/2)B(z/2)H(z/2)$ отделимы и, начиная с некоторого, просты. Применим к этой функции свойство (32) для последовательности $2w_n$ ее нулей, помня, что $B(w_n) = 0$. Получим

$$(w_n + \varepsilon_n)B(w_n + \varepsilon_n)H(w_n + \varepsilon_n) \sim w_n B'(w_n)H(w_n)\varepsilon_n. \quad (35)$$

По построению точки $w_n, w_n + \varepsilon_n$ при всех достаточно больших $|n|$ лежат вне кружков одинакового радиуса с центрами в нулях функции $H(z)$. По лемме 6 и с применением леммы 2 находим

$$|H(w_n + \varepsilon_n)| \asymp \frac{1}{|n|^{1-\alpha} b(|n|)} \asymp |H(w_n)|.$$

И так как $w_n + \varepsilon_n \sim w_n$, то из (35) получаем (31).

Далее, функция $-iB'(z)$ имеет вид (16), где $k(t)$ следует заменить на $tk(t)$. По утверждению 1) леммы 6 нули функции $B'(z)$ находятся на положительном расстоянии от нулей w_n функции $B(z)$. Применяя утверждение 2) леммы 6 к функции $B'(z)$ в точках $z = w_n \sim n$, получаем, что

$$|B'(w_n)| \asymp \frac{b(|n|)}{|n|^{\alpha}}, \quad n \rightarrow \pm\infty.$$

Подставляя это в (31), а затем полученное в (30), видим, что

$$\varepsilon_n = z_n - w_n = O\left(\frac{l(|n|) \log |n|}{|n|^{1/2-\alpha} b(|n|)}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty.$$

Утверждение 2) доказано.

Утверждение 3) доказывается так же, как в теореме 1. Если $|a|$ достаточно мал, то неравенства (28) имеют место на границах всех кружков K_n , $n \in \mathbb{Z}$. По теореме Руше в каждом кружке K_n содержится ровно один нуль функции $F(z)$, как и у функции $B(z)$ (см. утверждение 3) леммы 6). Других нулей у $F(z)$ по доказанному нет. Но $F(x)$ по условию вещественна, и потому нули $F(z)$ располагаются комплексно сопряженными парами. И так как центры w_n кружков K_n лежат на вещественной прямой, то все нули функции $F(z)$ вещественны. Утверждение 3) верно. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условие $\alpha < 1/2$ применялось в ходе доказательства теоремы 2 только для установления оценок (28) и (29). Однако, для справедливости этих оценок достаточно, чтобы $G(z) = o(B(z))$ при $|z| \rightarrow \infty$ вне кружков K_n . Поэтому доказательство теоремы 2 и ее утверждения сохраняются и при $\alpha = 1/2$, если в этом случае дополнительно потребовать, чтобы

$$l(t) \log t = o(b(t)), \quad t \rightarrow \infty. \quad (36)$$

Действительно, леммы 5 и 6 показывают, что (36) влечет оценку $G(z) = o(B(z))$. Добавим, что в этом случае функция $b(t)$ не может быть произвольной, так как оценку (36) следует совместить с условием (6).

6. Обозначим через $\mathcal{F}L^q$ подкласс в B , состоящий из преобразований Фурье функций из $L^q(-\pi, \pi)$, $1 \leq q \leq \infty$, т.е. класс функций

$$\Phi(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} \varphi(t) dt, \quad \varphi \in L^q.$$

Как известно, функция $\Phi(z) \in B$ представима в виде

$$\Phi(z) = ce^{ikz} z^m \prod \left(1 - \frac{z}{w_n}\right), \quad (37)$$

где $k \in \mathbb{R}$ (в наиболее употребительных случаях $k = 0$, например, это так, если $\Phi(z) \in S(\alpha; b(r))$), а w_n – все ненулевые корни $\Phi(z)$.

Пусть теперь

$$F(z) = ce^{ikz} (z - z_0)^m \prod \left(1 - \frac{z}{z_n}\right), \quad z_n = w_n + \alpha_n. \quad (38)$$

Поставим следующий вопрос. Пусть $\Phi(z) \in \mathcal{F}$ ($\Phi(z) \in \mathcal{F}L^q$) и $\Phi(z)$ имеет вид (37). Какие возмущения α_n нулей w_n функции $\Phi(z)$ не выводят из класса $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}L^q$) в том смысле, что также и $F(z) \in \mathcal{F}$ ($F(z) \in \mathcal{F}L^q$), где $F(z)$ – функция (38)? В [14] доказано, что условие $(\alpha_n) \in \ell^1$ сохраняет классы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}L^q$. Предположим теперь, что все точки w_n лежат в горизонтальной полосе $|\operatorname{Im} z| \leq h$ и не сгущаются; последнее означает, что число точек w_n в прямоугольнике $|\operatorname{Im} z| \leq h, t < \operatorname{Re} z < t + 1$, равномерно ограничено по $t \in \mathbb{R}$. Тогда условие $(\alpha_n) \in \ell^s$ при $s < \infty$ (но не при $s = \infty$) сохраняет класс $\mathcal{F}L^2$ [15].

С вопросом о сохранении классов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}L^q$ при возмущении нулей принадлежащих им функций тесно связан вопрос об устойчивости полноты (минимальности) в $C[-\pi, \pi]$ и $L^p(-\pi, \pi)$ систем экспонент при возмущении их показателей. В [16] доказана

ТЕОРЕМА А. Пусть $w_n, \alpha_n \in \mathbb{R}$, причем последовательность w_n не сгущается. Тогда

1) если $(\alpha_n) \in \ell^2$, то системы

$$\exp(iw_n t), \quad \exp(i(w_n + \alpha_n)t) \quad (39)$$

полны (минимальны) в $C[-\pi, \pi]$ одновременно;

2) если $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, а $1/s = |1/p - 1/2|$, то при условии $(\alpha_n) \in \ell^s$ системы (39) полны (минимальны) в $L^p(-\pi, \pi)$ одновременно.

Следующая теорема доказана (но не выделена в отдельное утверждение) в ходе доказательства теоремы А в [16].

ТЕОРЕМА Б. Пусть $w_n, \alpha_n \in \mathbb{R}$, причем последовательность w_n не сгущается. Тогда

- 1) условие $(\alpha_n) \in \ell^2$ сохраняет класс $\mathcal{F}$;
- 2) если $1 \leq q \leq \infty$, $q \neq 2$, а $1/s = |1/q - 1/2|$, то условие $(\alpha_n) \in \ell^s$ сохраняет класс $\mathcal{F}L^q$.

7. Сопоставим теоремы 1, 2 с теоремами А, Б.

Пусть $F(z)$ – функция (4), где $a \in \mathbb{R}$ и $|a|$ достаточно мал; пусть z_n – нули $F(z)$. По теореме 1 $F(z) \in S$, при должном выборе знаков в (2) $F(z) \notin \mathcal{F}$ и $(z_n - n) \in \ell^{2+\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$. Теорема Б показывает, что эта близость точек z_n и n в шкале классов ℓ^s является наилучшей из возможных, т.е. не существует функции $F(z)$ с вещественными нулями z_n и такой, что $F(z) \in S$, $F(z) \notin \mathcal{F}$, $(z_n - n) \in \ell^2$.

Точно так же близость нулей

$$(\alpha_n) = (z_n - w_n) \in \ell^{1/(1/2-\alpha)+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0,$$

описываемая теоремой 2, неулучшаема в силу теоремы Б.

Однако, не менее важным является тот факт, что, наоборот, теоремы 1, 2 подтверждают неулучшаемость теорем Б, А (соответственно при $1 < q < 2$ и $p > 2$) в шкале классов ℓ^s .

СЛЕДСТВИЕ 1. В теореме Б утверждение 1) теряет силу при замене ℓ^2 на $\ell^{2+\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$, а утверждение 2) теряет силу при замене ℓ^s на $\ell^{s+\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$ в случае $1 < q < 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$, пусть $z_n = w_n + \alpha_n$ – нули функции $F(z)$ из теоремы 1, где $a \in \mathbb{R}$ и $|a|$ достаточно мал. Пусть $\Phi(z) = \sin \pi z$. В данном случае $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $(\alpha_n) \in \ell^{2+\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$, $\Phi(z) \in \mathcal{F}$, $F(z) \notin \mathcal{F}$. Значит, условие $(\alpha_n) \in \ell^{2+\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$ уже выводит из класса $\mathcal{F}$.

Перейдем к утверждению 2). Пусть $k(t) = 1$, $l(t) = 1$, $1 - \alpha = 1/q$, $1 < q < 2$; тогда $0 < \alpha < 1/2$. Фиксируем $b(t) \in LZ$ так, чтобы

$$\frac{b(1/(\pi - |t|))}{(\pi - |t|)^{1/q}} \in L^q(-\pi, \pi)$$

и чтобы функция (21) была положительной на $(0, \pi)$ и не убывала. Тогда функция $B(z)$ (см. (16)) лежит в $\mathcal{F}L^q$. Пусть $F(z)$ – функция из теоремы 2, причем $a \in \mathbb{R}$ и $|a|$ достаточно мал. Пусть w_n и z_n – нули функций $B(z)$ и $F(z)$ соответственно. По теореме 2 $\alpha_n = z_n - w_n \in \mathbb{R}$ и

$$\alpha_n = z_n - w_n = O\left(\frac{\log |n|}{|n|^{1/s} b(|n|)}\right), \quad n \rightarrow \pm \infty.$$

Значит, $(\alpha_n) \in \ell^{s+\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$. Но $\Phi(z) = B(z) \in \mathcal{F}L^q$, а при должном выборе знаков по теореме 2 $F(z) \notin \mathcal{F}L^q$. Значит, условие $(\alpha_n) \in \ell^{s+\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$ выводит из класса $\mathcal{F}L^q$. Следствие 1 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. В теореме А утверждение 1) теряет силу при замене ℓ^2 на $\ell^{2+\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$, а утверждение 2) теряет силу при замене ℓ^s на $\ell^{s+\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$ в случае $p > 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть в первом случае $w_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$, а во втором w_n – нули функции $B(z)$, участвующей в доказательстве следствия 1. Так как $\sin \pi z \in \mathcal{F}$, а $B(z) \in \mathcal{FL}^q$, то первая система (39) неполна в $C[-\pi, \pi]$ (во втором случае – в $L^p(-\pi, \pi)$, $1/p + 1/q = 1$, $p > 2$). Пусть $z_n = w_n + \alpha_n$ – нули функции $F(z)$ из теоремы 1 (теоремы 2). Напомним, что $F(z) \in S$ ($F(z) \in S(\alpha; b(r))$) и в обоих случаях $F(z) \notin \mathcal{F}$. Так как в первом случае $(\alpha_n) \in \ell^{2+\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$, а во втором $(\alpha_n) \in \ell^{s+\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$, как мы видели при доказательстве следствия 1, то остается проверить, что вторая система (39) полна в $C[-\pi, \pi]$ (в $L^p(-\pi, \pi)$).

Если бы это было не так, то некоторая нетривиальная функция $H(z) \in \mathcal{F}$ ($\in \mathcal{FL}^q$) обращалась бы в нуль в точках $w_n + \alpha_n$. Значит,

$$H(z) = F(z)E(z), \quad (40)$$

где $E(z)$ – некоторая целая функция. Подобно функциям $H(z)$ и $F(z)$, функция $E(z)$ имеет экспоненциальный тип. Так как $H(z) \in \mathcal{F}$, то $|H(z)| \leq C e^{\pi|y|}$, и, вспоминая определение класса S (классов $S(\alpha; b(r))$), из (40) получаем оценку

$$|E(z)| \leq C < \infty \quad \left(|E(z)| \leq \frac{C|z|^{1/p}}{b(|z|)}, \quad \frac{1}{p} < 1 \right),$$

справедливую вне горизонтальной полосы (мы учли, что $\alpha = 1 - 1/q = 1/p$, см. доказательство второй части следствия 1). В обоих случаях

$$|E(z)| = o(|z|), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad |\operatorname{Im} z| \geq h. \quad (41)$$

Значит, индикатор функции $E(z)$ равен нулю при $\theta \neq 0, \pi$. В силу непрерывности индикатора он есть тождественный нуль, т.е. $E(z)$ – функция минимального типа. По теореме Фрагмена–Линделёфа из (41) следует, что $E(z) \equiv C$. Если $C = 0$, то из (40) следует, что $H(z) \equiv 0$, а это противоречит предположению. Если $C \neq 0$, то (40) также дает противоречие: левая часть лежит в $\mathcal{F}$, а правая нет. Следствие 2 верно.

Первая часть следствия 2 доказана возмущением тригонометрической системы $\exp(int)$, $n \in \mathbb{Z}$, которое диктуется теоремой 1. Так как тригонометрическая система (неполная в $C[-\pi, \pi]$) занимает исключительное место среди систем экспонент, то этот факт вместе с первой частью теоремы А заслуживает отдельной формулировки.

СЛЕДСТВИЕ 3. 1) Если $\alpha_n \in \mathbb{R}$ и $(\alpha_n) \in \ell^2$, то система

$$\exp(i(n + \alpha_n)t), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (42)$$

неполна в $C[-\pi, \pi]$.

2) Пусть $l(t) \in L$, пусть выполнено условие (6). Тогда найдется последовательность $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, такая, что

$$\alpha_n = O\left(\frac{l(|n|) \log |n|}{|n|^{1/2}}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty,$$

и система (42) полна в $C[-\pi, \pi]$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
- [2] Boas R. P. Entire functions. N. Y.: Acad. Press, 1954.
- [3] Левин Б. Я. Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа // Матем. физика, функцион. анализ. Вып. 1. Харьков: ФТИНТ АН УССР, 1969. С. 136–146.
- [4] Седлецкий А. М. О биортогональных разложениях по показательным функциям // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 3. С. 583–590.
- [5] Левин Б. Я., Любарский Ю. И. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. № 3. С. 657–702.
- [6] Sedleckiĭ A. M. On completeness of the systems $\{\exp(ix(n + ih_n))\}$ // Anal. Math. 1978. V. 2. № 2. P. 125–143.
- [7] Седлецкий А. М. Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 51–95.
- [8] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
- [9] Седлецкий А. М. О равномерной сходимости негармонических рядов Фурье // Тр. МИАН. 1991. Т. 200. С. 299–309.
- [10] Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. М.: Мир, 1985.
- [11] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
- [12] Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984.
- [13] Polya G. Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen // Math. Z. 1918. V. 2. P. 352–383.
- [14] Alexander W. O., Redheffer R. The excess of sets of complex exponentials // Duke Math. J. 1967. V. 34. № 1. P. 59–72.
- [15] Седлецкий А. М. Об устойчивости полноты и минимальности в L^2 системы показательных функций // Матем. заметки. 1974. Т. 15. № 2. С. 213–219.
- [16] Седлецкий А. М. Избытки близких систем экспонент в L^p // Сиб. матем. ж. 1983. Т. 24. № 4. С. 164–175.