Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. И. Сухочева, О некоторых спектральных свойствах квадратичного самосопряженного пучка матриц с доминирующими главными диагоналями, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 381–390

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1512>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:16:39

УДК 517

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ КВАДРАТИЧНОГО САМОСОПРЯЖЕННОГО ПУЧКА МАТРИЦ С ДОМИНИРУЮЩИМИ ГЛАВНЫМИ ДИАГОНАЛЯМИ

Л. И. Сухочёва

Найдены достаточные условия “разделения спектра” квадратичного матричного пучка с самосопряженными коэффициентами. Получен критерий представления положительного оператора в конечномерном пространстве в виде матрицы с доминирующей главной диагональю в каждом ортонормированном базисе.

Библиография: 3 названия.

В [1, гл. 7] при изучении задачи конвекции в частично заполненном сосуде исследуются спектральные свойства пучка вида

$$L(\lambda) = \varepsilon K - I + \lambda A + \frac{1}{\lambda} B,$$

где K, A, B – компактные самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве H , ε – положительный параметр и оператор $\varepsilon K - I$ в правой полуплоскости имеет конечное число κ собственных значений с учетом кратности.

Точка $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется собственным значением пучка L , если найдется вектор $x_0 \neq \theta$, такой, что $L(\lambda_0)x_0 = \theta$.

Если $\varepsilon \leq 1/\|K\|$, то все собственные значения пучка L лежат в правой полуплоскости. При $\varepsilon > 1/\|K\|$ не исключена возможность появления собственных значений пучка L и в открытой левой полуплоскости. Вообще говоря, количество N_- таких собственных значений пучка не связано с числом κ . В этой работе будут описаны матричные пучки, для которых $N_- = 2\kappa$.

Ниже будем считать $H = \mathbb{C}^n$, $L(\lambda) = \lambda A + \frac{1}{\lambda} B - J_\kappa$, где эрмитовы матрицы A, B и J_κ удовлетворяют дополнительным условиям:

$$\begin{aligned} A &= \|a_{ij}\|_{i,j=1,2,\dots,n}, \quad A > 0, \quad a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| + \varepsilon_i^A, \quad \varepsilon_i^A > 0, \\ & \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots, n; \\ B &= \|b_{ij}\|_{i,j=1,2,\dots,n}, \quad B > 0, \quad b_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{ij}| + \varepsilon_i^B, \quad \varepsilon_i^B > 0, \\ J_\kappa &= \|J_{ij}\|_{i,j=1,2,\dots,n}, \quad J_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad J_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n - \kappa, \\ & \qquad \qquad \qquad J_{ii} = -1, \quad i = n - \kappa + 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда, грант NZP000.

Если A, B – положительные диагональные матрицы, $J_{\varkappa}$ – как указано выше, то выполняются условия (1) и соответствующий матричный пучок L имеет $2\varkappa$ собственных значений в открытой левой полуплоскости и $2(n - \varkappa)$ – в открытой правой.

Однако, не все матричные пучки, удовлетворяющие условиям (1), обладают таким свойством “разделения спектра”.

В самом деле, пусть матрицы $A, B, J_{\varkappa}$ заданы следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5\sqrt{2}}{8} \\ \frac{5\sqrt{2}}{8} & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{\varkappa} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$L(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 2 & \frac{5\sqrt{2}}{8} \\ \frac{5\sqrt{2}}{8} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условиям (1), $\varkappa = 1$, но все четыре собственные значения пучка L расположены в левой полуплоскости.

Действительно, рассмотрим уравнение

$$\det L(\lambda) = \begin{vmatrix} 3\lambda + \frac{2}{\lambda} - 1 & \frac{5\sqrt{2}}{8\lambda} \\ \frac{5\sqrt{2}}{8\lambda} & \lambda + \frac{1}{\lambda} + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

После ряда алгебраических преобразований оно будет иметь вид

$$96\lambda^4 + 64\lambda^3 + 128\lambda^2 + 32\lambda + 39 = 0.$$

Для исследования расположения корней этого многочлена на комплексной плоскости воспользуемся критерием Рауса–Гурвица [2, теорема XVI.6.5]. Выпишем определители Гурвица:

$$\Delta_1 = 64 > 0, \quad \Delta_2 = 5120 > 0, \quad \Delta_3 = 4096 > 0, \quad \Delta_4 = 159744 > 0.$$

Итак, все корни многочлена, а значит и все четыре собственные значения пучка L имеют отрицательные вещественные части, т.е. лежат в открытой левой полуплоскости.

Отметим, что “диагональ” L_d пучка L :

$$L_d(\lambda) = \lambda \operatorname{diag} A + \frac{1}{\lambda} \operatorname{diag} B - J_{\varkappa} = \lambda \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

имеет невещественные собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{23}}{6}, \quad \lambda_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Оказывается, что расположение собственных значений “диагонали” L_d весьма существенно влияет на расположение спектра соответствующего пучка L .

ТЕОРЕМА 1. Пусть матрицы A, B, J_{κ} , определяющие пучок L , удовлетворяют условиям (1). Если все собственные значения L_d лежат в угле

$$\Phi \subseteq \bigcap_{i=1}^n \{ \Psi_i : |\operatorname{tg} \Psi_i| \leq 2(\varepsilon_i^A \cdot \varepsilon_i^B)^{1/2} \},$$

то 2κ собственных значений пучка L лежат в открытой левой полуплоскости, а $2(n - \kappa)$ – в открытой правой полуплоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ_0 – собственное значение пучка L . Тогда существует вектор $x_0 \neq \theta$, являющийся решением уравнения $L(\lambda_0)x_0 = \theta$. Как известно, это уравнение имеет ненулевые решения x_0 , если $\det L(\lambda_0) = 0$.

Из теоремы Адамара [2, XIV.1], применительно к нашему случаю, следует, что найдется такой номер i , что λ_0 удовлетворяет хотя бы одному из неравенств

$$\left| \lambda_0 a_{ii} + \frac{1}{\lambda_0} b_{ii} - 1 \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \lambda_0 a_{ij} + \frac{1}{\lambda_0} b_{ij} \right|, \quad i = 1, 2, \dots, n - \kappa, \quad (2)$$

$$\left| \lambda_0 a_{ii} + \frac{1}{\lambda_0} b_{ii} + 1 \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \lambda_0 a_{ij} + \frac{1}{\lambda_0} b_{ij} \right|, \quad i = n - \kappa + 1, \dots, n. \quad (3)$$

Рассмотрим множества M_+^i собственных значений λ_0 , удовлетворяющих неравенствам (2), и множества M_-^i собственных значений λ_0 , удовлетворяющих неравенствам (3), а также

$$M_+ = \bigcup_{i=1}^{n-\kappa} M_+^i, \quad M_- = \bigcup_{i=n-\kappa+1}^n M_-^i.$$

Проверим, что $M_+ \cap M_- = \emptyset$.

Пусть λ_0 удовлетворяет условию вида (2), тогда из (1) следует

$$\begin{aligned} \left| \lambda_0 a_{ii} + \frac{1}{\lambda_0} b_{ii} - 1 \right| &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \lambda_0 a_{ij} + \frac{1}{\lambda_0} b_{ij} \right| \leq |\lambda_0| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| + \frac{1}{|\lambda_0|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{ij}| \\ &< |\lambda_0|(a_{ii} - \varepsilon_i^A) + \frac{1}{|\lambda_0|}(b_{ii} - \varepsilon_i^B). \end{aligned} \quad (4)$$

После возведения выражений из (4) в квадрат получим

$$\begin{aligned} &|\lambda_0|^2 a_{ii} + \left(\frac{\lambda_0}{\bar{\lambda}_0} + \frac{\bar{\lambda}_0}{\lambda_0} \right) a_{ii} b_{ii} + \frac{b_{ii}^2}{|\lambda_0|^2} - (\lambda_0 + \bar{\lambda}_0) a_{ii} - \left(\frac{1}{\bar{\lambda}_0} + \frac{1}{\lambda_0} \right) b_{ii} + 1 \\ &< |\lambda_0|^2 a_{ii} - 2a_{ii}(|\lambda_0|^2 \varepsilon_i^A + \varepsilon_i^B) + 2a_{ii} b_{ii} + \left(|\lambda_0| \varepsilon_i^A + \frac{1}{|\lambda_0|} \varepsilon_i^B \right)^2 \\ &\quad - 2b_{ii} \left(\varepsilon_i^A + \frac{\varepsilon_i^B}{|\lambda_0|^2} \right) + \frac{b_{ii}^2}{|\lambda_0|^2}. \end{aligned}$$

Это соотношение запишем в виде

$$\frac{2(\operatorname{Re}^2 \lambda_0 - \operatorname{Im}^2 \lambda_0)}{|\lambda_0|^2} a_{ii} b_{ii} - 2 \operatorname{Re} \lambda_0 \left(a_{ii} + \frac{b_{ii}}{|\lambda_0|^2} \right) + 1 \\ < -2a_{ii}(|\lambda_0|^2 \varepsilon_i^A + \varepsilon_i^B) + 2a_{ii} b_{ii} + \left(|\lambda_0| \varepsilon_i^A + \frac{1}{|\lambda_0|} \varepsilon_i^B \right)^2 - 2b_{ii} \left(\varepsilon_i^A + \frac{\varepsilon_i^B}{|\lambda_0|^2} \right).$$

Отсюда следует

$$1 - \frac{4 \operatorname{Im}^2 \lambda_0}{|\lambda_0|^2} a_{ii} b_{ii} + 2a_{ii}(|\lambda_0|^2 \varepsilon_i^A + \varepsilon_i^B) + 2b_{ii} \left(\varepsilon_i^A + \frac{\varepsilon_i^B}{|\lambda_0|^2} \right) \\ - 2 \operatorname{Re} \lambda_0 \left(a_{ii} + \frac{b_{ii}}{|\lambda_0|^2} \right) - \left(|\lambda_0| \varepsilon_i^A + \frac{\varepsilon_i^B}{|\lambda_0|^2} \right)^2 < 0. \quad (5)$$

Пусть λ_0 удовлетворяет соотношениям вида (3). Произведем преобразования, аналогичные описанным выше:

$$\left| \lambda_0 a_{ii} + \frac{1}{\lambda_0} b_{ii} + 1 \right| < |\lambda_0| (a_{ii} - \varepsilon_i^A) + \frac{1}{|\lambda_0|} (b_{ii} - \varepsilon_i^B), \\ \left| \lambda_0 a_{ii} + \frac{1}{\lambda_0} b_{ii} + 1 \right|^2 = |\lambda_0|^2 a_{ii} + \frac{2(\operatorname{Re}^2 \lambda_0 - \operatorname{Im}^2 \lambda_0)}{|\lambda_0|^2} a_{ii} b_{ii} \\ + 2 \operatorname{Re} \lambda_0 \left(a_{ii} + \frac{b_{ii}}{|\lambda_0|^2} \right) + 1 + \frac{b_{ii}^2}{|\lambda_0|^2}. \quad (6)$$

Из (3) и (6) следует

$$1 - \frac{4 \operatorname{Im}^2 \lambda_0}{|\lambda_0|^2} a_{ii} b_{ii} + 2a_{ii}(|\lambda_0|^2 \varepsilon_i^A + \varepsilon_i^B) + 2b_{ii} \left(\varepsilon_i^A + \frac{\varepsilon_i^B}{|\lambda_0|^2} \right) \\ - \left(|\lambda_0| \varepsilon_i^A + \frac{\varepsilon_i^B}{|\lambda_0|} \right)^2 + 2 \operatorname{Re} \lambda_0 \left(a_{ii} + \frac{b_{ii}}{|\lambda_0|^2} \right) < 0. \quad (7)$$

Предположим, что

$$1 - \frac{4 \operatorname{Im}^2 \lambda_0}{|\lambda_0|^2} a_{ii} b_{ii} + 2a_{ii}(|\lambda_0|^2 \varepsilon_i^A + \varepsilon_i^B) + 2b_{ii} \left(\varepsilon_i^A + \frac{\varepsilon_i^B}{|\lambda_0|^2} \right) - \left(|\lambda_0| \varepsilon_i^A + \frac{\varepsilon_i^B}{|\lambda_0|} \right)^2 > 0. \quad (8)$$

Поскольку $a_{ii} + b_{ii}/|\lambda_0|^2 > 0$, то из (5) вытекает, что $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$, а из (7) получим $\operatorname{Re} \lambda_0 < 0$, т.е. множество M_+ расположено в правой полуплоскости, а M_- – в левой, и M_+ и M_- не пересекаются. Таким образом, при выполнении условия (8) каждое собственное значение пучка L принадлежит только одному из этих множеств.

Покажем, что в наших предположениях имеет место неравенство (8).

Предварительно получим оценку, из которой будет следовать (8).

Из (1) имеем $a_{ii} > \varepsilon_i^A$ и $b_{ii} > \varepsilon_i^B$ и потому

$$1 - 4a_{ii} b_{ii} \frac{\operatorname{Im}^2 \lambda_0}{|\lambda_0|^2} + 2a_{ii}(\varepsilon_i^A |\lambda_0|^2 + \varepsilon_i^B) + 2b_{ii} \left(\varepsilon_i^A + \frac{\varepsilon_i^B}{|\lambda_0|} \right) - \left(|\lambda_0| \varepsilon_i^A + \frac{\varepsilon_i^B}{|\lambda_0|} \right)^2 \\ > 1 - 4a_{ii} b_{ii} + \left(\varepsilon_i^A |\lambda_0| + \frac{\varepsilon_i^B}{|\lambda_0|} \right)^2 \geq 1 - 4a_{ii} b_{ii} + \left[\min \left(\varepsilon_i^A |\lambda| + \frac{\varepsilon_i^B}{|\lambda|} \right) \right]^2.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = (\varepsilon_i^A x + \varepsilon_i^B/x)$, $x \in (0, \infty)$. Она достигает минимума в точке $x = \sqrt{\varepsilon_i^B/\varepsilon_i^A}$ и $f(\sqrt{\varepsilon_i^B/\varepsilon_i^A}) = 2\sqrt{\varepsilon_i^A \varepsilon_i^B}$.

Отсюда

$$1 - 4a_{ii}b_{ii} + \left(\varepsilon_i^A |\lambda_0| + \frac{\varepsilon_i^B}{|\lambda_0|} \right)^2 \geq 1 - 4a_{ii}b_{ii} + (2\sqrt{\varepsilon_i^A \varepsilon_i^B})^2 = 1 - 4a_{ii}b_{ii} + 4\varepsilon_i^A \varepsilon_i^B.$$

По условию собственные значения $\lambda_i = (\pm 1 \pm \sqrt{1 - 4a_{ii}b_{ii}})/(2a_{ii})$, “диагонали” пучка L расположены в углах Ψ_i : $|\operatorname{tg} \Psi_i| \leq 2(\varepsilon_i^A \varepsilon_i^B)^{1/2}$. Так как $|\operatorname{tg} \Psi_i| = |\operatorname{Im} \lambda_i / \operatorname{Re} \lambda_i| = \operatorname{Re} \sqrt{4a_{ii}b_{ii} - 1}$, то $\operatorname{Re} \sqrt{4a_{ii}b_{ii} - 1} < 2(\varepsilon_i^A \varepsilon_i^B)^{1/2}$, а значит, $1 - 4a_{ii}b_{ii} + 4\varepsilon_i^A \varepsilon_i^B > 0$.

Итак, неравенство (8) действительно имеет место, и потому собственное значение λ_0 пучка L принадлежит и при этом только одному из непересекающихся множеств M_+ (справа от мнимой оси), M_- (слева от мнимой оси).

Введем матричные пучки

$$A(t) = tA + (1-t)\operatorname{diag} A, \quad B(t) = tB + (1-t)\operatorname{diag} B, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Рассмотрим пучки $L_t(\lambda) = \lambda A(t) + (1/\lambda)B(t) - J_\varkappa$ и по ним, следуя (2) и (3), построим множества $M_+(t)$ и $M_-(t)$, задаваемые неравенствами

$$\left| \lambda a_{ii} + \frac{1}{\lambda} b_{ii} - 1 \right| \leq t \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \lambda a_{ij} + \frac{1}{\lambda} b_{ij} \right|, \quad i = 1, 2, \dots, n - \varkappa,$$

$$\left| \lambda a_{ii} + \frac{1}{\lambda} b_{ii} + 1 \right| \leq t \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \lambda a_{ij} + \frac{1}{\lambda} b_{ij} \right|, \quad i = n - \varkappa + 1, \dots, n.$$

По построению $M_\pm(t_1) \subseteq M_\pm(t_2)$ при $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$. Таким образом, $M_\pm(t) \subseteq M_\pm$ при $t \in [0, 1]$.

Отметим, что $L_t = L_d$ при $t = 0$ и $L_t = L$ при $t = 1$. Так как корни уравнения $\det L_t(\lambda) = 0$ непрерывно зависят от t (т.е. собственные значения $\lambda(t)$ пучков L_t непрерывно зависят от t), а M_+ и M_- — замкнутые непересекающиеся множества, то количество собственных значений пучков L_t , находящихся внутри этих множеств, постоянно и для всех $t \in [0, 1]$ одинаково. Поэтому справа от мнимой оси исходный пучок L и “диагональный” L_d имеют равное количество собственных значений, а именно, как отмечалось выше, $2(n - \varkappa)$, а слева от мнимой оси исходный пучок L , как и L_d , имеет $2\varkappa$ собственных значений.

Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $A, B, J_\varkappa$ удовлетворяют условиям (1), пучок L_d имеет только вещественные собственные значения, тогда пучок L обладает указанным выше “разделением спектра”.

Говорят, что матрица $A = \|a_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, имеет доминирующую главную диагональ, если для $i = 1, 2, \dots, n$

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

Если матрица A симметричная и положительная, то это соотношение можно переписать в виде

$$a_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

Заметим, что матрицы A, B , удовлетворяющие условиям (1), являются матрицами с доминирующей главной диагональю.

Как известно, каждый линейный оператор, действующий в конечномерном пространстве, представляется в заданном базисе в виде матрицы. Из того, что одно из таких представлений является матрицей с доминирующей главной диагональю, вообще говоря, не следует, что матрицы этого оператора в других базисах будут обладать этим свойством.

В самом деле, пусть $\{e_1, e_2\}$ – ортонормированный базис двумерного пространства E . Рассмотрим оператор A : $A(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = (5\alpha_1 + 2\alpha_2)e_1 + (2\alpha_1 + \alpha_2)e_2$. Этот оператор в указанном базисе будет представляться матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, не имеющей доминирующей главную диагональ, в то время как в базисе из собственных векторов $\{f_1, f_2\}$ (f_1 – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 3 + \sqrt{8}$, а f_2 – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 3 - \sqrt{8}$) оператор A представляется матрицей $\begin{pmatrix} 3+\sqrt{8} & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{8} \end{pmatrix}$, с доминирующей главной диагональю.

В связи с этим представляет интерес следующая задача: описать положительные операторы, матрицы которых в произвольном ортонормированном базисе будут иметь доминирующую главную диагональ.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (соответственно $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$) симметрический положительный оператор, $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ соответственно наименьшее и наибольшее его собственные значения. Тогда матрицы этого оператора имеют доминирующую главную диагональ в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$) тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \leq 2\sqrt{\frac{n}{n-1}}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего рассмотрим случай $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и покажем эквивалентность двух вспомогательных неравенств для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ с $\|x\| = 1$:

$$(Ax, x) \geq \max_{\{e_i\}_{i=1,2,\dots,n} \subset \{x\}^\perp} \{(Ae_2, x) + \dots + (Ae_n, x)\}, \quad (10)$$

где $\{e_i\}_{i=2,\dots,n}$ – множество всех ортонормированных базисов в $\{x\}^\perp$;

$$(Ax, x) \geq \sqrt{\frac{n-1}{n}} \|Ax\|. \quad (11)$$

В самом деле, пусть имеет место неравенство (10). Заметим, что оно выполняется тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=2,\dots,n} \subset \{x\}^\perp$

$$(x - e_2 - \dots - e_n, Ax) \geq 0. \quad (12)$$

Рассмотрим линейную оболочку векторов x и $e_2 + e_3 + \dots + e_n$ и P – ортпроектор на подпространство, образованное этими векторами. Тогда соотношение (12) будет эквивалентно условию $(x - e_2 - e_3 - \dots - e_n, PAx) \geq 0$. Так как

$$\begin{aligned} & (x - e_2 - e_3 - \dots - e_n, PAx) \\ &= \cos\{x - e_2 - e_3 - \dots - e_n, PAx\} \|x - e_2 - e_3 - \dots - e_n\| \cdot \|PAx\|, \end{aligned}$$

то (12) равносильно неравенству $\cos\{x - e_2 - e_3 - \dots - e_n, PAx\} \geq 0$ в любом ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=2, \dots, n}$ из $\{x\}^\perp$, иными словами, угол между векторами $x - e_2 - \dots - e_n$ и PAx меньше либо равен $\pi/2$ для любого ортонормированного базиса $\{e_i\}_{i=2, \dots, n} \subset \{x\}^\perp$.

Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что угол между векторами PAx и x меньше либо равен углу между векторами $x - e_2 - e_3 - \dots - e_n$ и $-(e_2 + \dots + e_n)$, т.е.

$$\cos\{\widehat{PAx, x}\} \geq \cos\{x - e_2 - e_3 - \dots - e_n, -(e_2 + \dots + e_n)\} \quad (13)$$

в любом ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=2, \dots, n} \subset \{x\}^\perp$.

Так как

$$\cos\{x - e_2 - e_3 - \dots - e_n, -(e_2 + \dots + e_n)\} = \frac{\|e_2 + \dots + e_n\|}{\|x - e_2 - \dots - e_n\|} = \sqrt{\frac{n-1}{n}},$$

то соотношение (13) эквивалентно условию $\cos\{\widehat{PAx, x}\} \geq \sqrt{(n-1)/n}$ или $(PAx, x) \geq \sqrt{(n-1)/n} \|PAx\|$. Поскольку $Px = x$, то последнее неравенство переписывается в виде

$$(Ax, x) \geq \sqrt{\frac{n-1}{n}} \|PAx\|. \quad (14)$$

Остается заметить, что $\|Ax\| = \max_P \|PAx\|$.

В самом деле, $\max_P \|PAx\| \leq \|Ax\|$. С другой стороны,

$$\|Ax\| = \max_{\|y\|=1} |(Ax, y)| = |(Ax, y_0)|.$$

Пусть $y_0 = \alpha x + \beta z_0$, где $z_0 \in \{x\}^\perp$, $\|z_0\| = \sqrt{n-1}$. Отсюда следует существование в $\{x\}^\perp$ такого ортонормированного базиса $\{e_i\}_{i=2, \dots, n}$, что $z_0 = \sum_{i=2}^n e_i$. Следовательно, $y_0 = P_0 y_0$, где P_0 – ортпроектор на линейную оболочку $\{x, z_0\}$.

Тогда $\|Ax\| = |(Ax, y_0)| = |(P_0 Ax, y_0)| = \|P_0 Ax\|$ и потому $\|Ax\| = \|P_0 Ax\| = \max_P \|PAx\|$. В силу произвольности проектора P в неравенстве (14) имеем

$$(Ax, x) \geq \sqrt{\frac{n-1}{n}} \max_P \|PAx\| = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \|Ax\|.$$

Таким образом, эквивалентность условий (10) и (11) доказана.

Перейдем к доказательству утверждения теоремы. Пусть в любом ортонормированном базисе оператор A имеет матрицу с доминирующей главной диагональю. Тогда для любого x , $\|x\| = 1$, выполняется соотношение

$$(Ax, x) \geq \max_{\{e_i\}_{i=2, \dots, n} \subset \{x\}^\perp} \left\{ \sum_{i=2}^n (Ae_i, x) \right\} = \max_{\{e_i\}_{i=2, \dots, n} \subset \{x\}^\perp} \left\{ \sum_{i=2}^n (Ae_i, x) \right\},$$

т.е. имеет место неравенство (10), а значит, и неравенство (11). Из (11) получим, что

$$\frac{(Ax, x)}{\|Ax\|} \geq \sqrt{\frac{n-1}{n}} \quad \text{для любого } x \in \mathbb{R}^n \text{ с } \|x\| = 1.$$

Воспользовавшись равенством Канторовича [3, III.V.2.1], получим оценку

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \frac{(Ax, x)}{\|Ax\|} = \frac{2\sqrt{\lambda_{\max}\lambda_{\min}}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} \geq \sqrt{\frac{n-1}{n}} \quad (15)$$

или

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}} \leq 2\sqrt{\frac{n}{n-1}},$$

т.е. выполняется условие (9).

Пусть теперь имеет место неравенство (9), а значит, будут выполняться неравенства (15), (11) и (10). Следовательно,

$$(Ax, x) \geq \max_{\{e_i\}_{i=2, \dots, n} \subset \{x\}^\perp} \{(Ae_2, x) + \dots + (Ae_n, x)\} \geq \sum_{i=2}^n |(Ae_i, x)|. \quad (16)$$

В самом деле, поскольку вместе с $\{e_i\}_{i=2, \dots, n}$ ортонормированным базисом в $\{x\}^\perp$ будут векторы $\{\varepsilon_i e_i\}_{i=2, \dots, n}$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, то

$$\max_{\{e_i\}_{i=2, \dots, n} \subset \{x\}^\perp} \left\{ \sum_{i=2}^n (Ae_i, x) \right\} = \max_{\{\varepsilon_i e_i\}_{i=2, \dots, n} \subset \{x\}^\perp} \left\{ \sum_{i=2}^n |(Ae_i, x)| \right\} \geq \sum_{i=2}^n |(Ae_i, x)|.$$

Пусть $\{\varphi_i\}_{i=2, \dots, n}$ — произвольный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Полагая последовательно $x = \varphi_1, x = \varphi_2, \dots, x = \varphi_n$, из (16) получим неравенства

$$(A\varphi_i, \varphi_i) \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |(A\varphi_i, \varphi_j)|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, оператор A будет иметь матрицу с доминирующей главной диагональю в произвольном ортонормированном базисе $\mathbb{R}^n$.

Перейдем теперь к комплексному случаю $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Пусть оператор A представим матрицей с доминирующей главной диагональю в каждом ортонормированном базисе пространства $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим вещественное пространство $\mathbb{R}_n$, являющееся вещественной линейной оболочкой ортонормированного базиса

$\{e_j\}_{j=2,\dots,n}$, составленного из собственных векторов оператора A . Пространство $\mathbb{R}_n$ инвариантно относительно оператора A . Обозначим $A|_{\mathbb{R}_n} = \tilde{A}$. Так как любой ортонормированный базис в $\mathbb{R}_n$ будет ортонормированным и в $\mathbb{C}^n$, то матрица оператора $\tilde{A}$ будет иметь доминирующую диагональ в любом ортонормированном базисе $\mathbb{R}_n$. Следовательно, как доказано выше, для собственных значений оператора $\tilde{A}$ имеет место оценка (9). Поскольку спектры операторов A и $\tilde{A}$ совпадают, то и для собственных значений оператора A верна эта же оценка.

Пусть выполнено неравенство (9). Докажем, что матрица оператора A в каждом ортонормированном базисе пространства $\mathbb{C}^n$ имеет доминирующую главную диагональ. Для этого достаточно проверить, что в каждом ортонормированном базисе $\{e_j\}_{j=2,\dots,n}$ имеет место неравенство $(Ae_1, e_1) \geq \sum_{j=2}^n |(Ae_1, e_j)|$. Без ограничения общности можно считать, что $|(Ae_1, e_j)| = (Ae_1, e_j)$. (Действительно, заменим, если это необходимо, ортонормированный базис $\{e_j\}_{j=1,\dots,n}$ на ортонормированный базис $\{e^{i\alpha_j} e_j\}_{j=1,2,\dots,n}$, где $\alpha_j = \arg(Ae_1, e_j)$.)

Пусть $A = \|a_{kj}\|_{k,j=1,2,\dots,n}$ — матрица оператора A в выделенном базисе. Рассмотрим матрицу $\bar{A} = \|\bar{a}_{kj}\|_{k,j=1,2,\dots,n}$. Она положительна (как оператор в $\mathbb{C}^n$) и имеет те же собственные значения, что и матрица A . Введем вспомогательную положительную матрицу $B = (A + \bar{A})/2$. Поскольку

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(A) &= \frac{\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\min}(\bar{A})}{2} = \frac{\min_{\|x\|=1} (Ax, x) + \min_{\|x\|=1} (\bar{A}x, x)}{2} \\ &\leq \min_{\|x\|=1} (Bx, x) = \lambda_{\min}(B), \\ \lambda_{\max}(A) &= \frac{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(\bar{A})}{2} = \frac{\max_{\|x\|=1} (Ax, x) + \max_{\|x\|=1} (\bar{A}x, x)}{2} \\ &\geq \max_{\|x\|=1} (Bx, x) = \lambda_{\max}(B),\end{aligned}$$

то

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(B)}{\lambda_{\max}(B)}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(B)}{\lambda_{\min}(B)}} \leq 2\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Так как матрица B является вещественной, то она порождает оператор с доминирующей главной диагональю в вещественном пространстве $\mathbb{R}_n$, являющемся вещественной линейной оболочкой векторов рассматриваемого базиса. В частности, имеет место неравенство $(Be_1, e_1) \geq \sum_{j=2}^n |(Be_1, e_j)|$. Остается заметить, что по построению $(Ae_1, e_j) = (Be_1, e_j)$ при каждом $j = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях теоремы 2 неравенство (9) эквивалентно неравенству

$$\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \leq \frac{(\sqrt{n}+1)^2}{n-1}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\sqrt{\lambda_{\max}/\lambda_{\min}} = r$. Из неравенства (9) имеем систему

$$\begin{cases} r + \frac{1}{r} \leq 2\sqrt{\frac{n}{n-1}}, \\ r \geq 1. \end{cases}$$

Она эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} r^2 - 2\sqrt{\frac{n}{n-1}}r + 1 \leq 0, \\ r \geq 1. \end{cases}$$

Число r будет решением этой системы тогда и только тогда, когда

$$1 \leq r \leq \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n-1}}.$$

Следовательно, (9) имеет место одновременно с соотношением (17).

Следствие 2 доказано.

Институт математики
Воронежского государственного университета

Поступило
10.02.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы линейной гидродинамики. М.: Наука, 1989.
- [2] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
- [3] Крейн С. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.