Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Кольца, над которыми каждый модуль обладает максимальным подмодулем, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 407–415

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:23:38

УДК 512.55

КОЛЬЦА, НАД КОТОРЫМИ КАЖДЫЙ МОДУЛЬ ОБЛАДАЕТ МАКСИМАЛЬНЫМ ПОДМОДУЛЕМ

А. А. Туганбаев

Исследуются правые кольца Басса, т.е. кольца, над которыми каждый ненулевой правый модуль имеет максимальный подмодуль. В частности, доказано, что если все первичные факторкольца кольца A алгебраичны над своим центром, то A – совершенное справа кольцо $\iff A$ – правое кольцо Басса, не содержащее бесконечного множества ортогональных идемпотентов.

Библиография: 13 названий.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Кольца, над которыми каждый ненулевой правый модуль обладает максимальным подмодулем, называются *правыми кольцами Басса*. В [1] Басс доказал, что совершенные справа кольца являются правыми кольцами Басса и выдвинул следующую гипотезу: правое кольцо Басса, не содержащее бесконечного множества ортогональных идемпотентов, является совершенным справа. В [2] и [3] получено положительное решение гипотезы Басса в случае коммутативных колец и соответственно Р.И.-колец. Отрицательный ответ на гипотезу Басса в общем случае получен в [4] и [5] (см. также [6, теорема 7.42]). Основным результатом данной работы является теорема 1, дающая положительный ответ на гипотезу Басса для колец, у которых все первичные факторкольца являются алгебраическими над своим центром (этот класс включает в себя как кольца, целые над своим центром, так и Р.И.-кольца). В работе доказан также ряд других результатов о правых кольцах Басса. Отметим также, что в [7] получено описание правых Р.И.-колец Басса.

ТЕОРЕМА 1. Пусть все первичные факторкольца кольца A являются алгебраическими над своими центрами. Тогда равносильны условия:

- (1) A – совершенное справа кольцо;
- (2) A – правое кольцо Басса, не содержащее бесконечного множества ортогональных идемпотентов.

Из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть либо кольцо A цело над своим центром, либо все факторкольца кольца A по минимальным первичным идеалам являются Р.И.-кольцами. Тогда равносильны условия:

- (1) A – совершенное справа кольцо;
- (2) A – правое кольцо Басса, не содержащее бесконечного множества ортогональных идемпотентов.

Доказательство теоремы 1 разбито на ряд утверждений. Приведем необходимые определения и обозначения. Идеал B кольца A называется *исчезающим слева*, если для любой последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ найдется такой номер n , что $b_n \cdots b_1 = 0$. Кольцо A называется *совершенным справа*, если A – полулокальное кольцо и $J(A)$ – исчезающий слева идеал. *Редуцированным* кольцом называется кольцо без ненулевых нильпотентных элементов. *Правым V -кольцом* называется кольцо, над которым все простые правые модули инъективны. Кольцо A называется *строго π -регулярным* (*π -регулярным*), если для любого элемента $a \in A$ найдется такое натуральное число n , что $a^n = a^{n+1}b$ ($a^n = a^n b a^n$) для некоторого элемента $b \in A$. Каждое строго π -регулярное кольцо является π -регулярным. Через $J(A)$ и $C(A)$ обозначается соответственно радикал Джекобсона и центр кольца A . Через $r_A(B)$ и $\ell_A(B)$ обозначаются соответственно правый и левый аннуляторы подмножества B кольца A (в ясных ситуациях индекс может отсутствовать). Элемент $a \in A$ называется *регулярным справа* (слева), если $r(a) = 0$ ($\ell(a) = 0$). Кольцо, у которого индексы нильпотентности всех нильпотентных элементов ограничены в совокупности, называется *кольцом ограниченного индекса*. Кольцо называется *квазиинвариантным справа*, если все его максимальные правые идеалы являются идеалами. Кольцо A называется *целым над своим центром* (*алгебраическим над своим центром*), если для любого элемента $a \in A$ найдется такой многочлен $f \in C(A)[x]$, что $f(a) = 0$, причем старший коэффициент многочлена $f(x)$ является обратимым (регулярным) элементом кольца A .

ЛЕММА 1. *Равносильны условия:*

- (1) A – правое кольцо Басса;
- (2) все факторкольца кольца A являются правыми кольцами Басса;
- (3) $A/J(A)$ – правое кольцо Басса, $J(A)$ – исчезающий слева идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\implies$ (2) проверяется непосредственно. Импликация (2) $\implies$ (3) следует из [6, предложение 22.7В]. Импликация (3) $\implies$ (1) следует из того, что по теореме 11.5.5 из [8] $M/MJ(A)$ – ненулевой $A/J(A)$ -модуль для любого ненулевого модуля M_A .

ЛЕММА 2. *Пусть радикал $J(A)$ кольца A является исчезающим слева идеалом. Тогда*

- (1) *если $A/J(A)$ – правое V -кольцо, то A – правое кольцо Басса;*
- (2) *если $A/J(A)$ – регулярное кольцо, у которого все примитивные справа факторкольца являются артиновыми, то A – правое кольцо Басса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По лемме 1 достаточно доказать, что произвольное правое V -кольцо R является правым кольцом Басса. Пусть M_R – модуль с ненулевым циклическим подмодулем N . Тогда существует эпиморфизм $f: N \rightarrow T$, где T – простой модуль. Так как T – инъективный модуль, то эпиморфизм f продолжается до эпиморфизма $g: M \rightarrow T$. Поэтому M обладает простым фактормодулем и все доказано.

(2) следует из (1) и того, что регулярное кольцо, у которого все примитивные справа факторкольца являются артиновыми, является V -кольцом [9, предложение 6.18].

ЛЕММА 3. *Пусть A – правое кольцо Басса, у которого все примитивные справа факторкольца являются строго π -регулярными кольцами. Тогда*

- (1) *каждый регулярный справа элемент $a \in A$ обратим в кольце A ;*
- (2) *если A – область, то A – тело;*

- (3) если каждый существенный правый идеал кольца A содержит регулярный справа элемент, то A – артиново полупервичное кольцо;
 (4) если A – редуцированное кольцо, то A – строго регулярное кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 все факторкольца кольца A являются правыми кольцами Басса.

(1) Пусть $F_A \equiv \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_A/a^i A$. Тогда $F = \bigoplus_{i=0}^{\infty} f_i A$, где $r(f_i) = a^i A$. Пусть

$$G \equiv \sum_{i=1}^{\infty} (f_{i+1}a - f_i)A, \quad H \equiv F/G.$$

Допустим, что $H = 0$. Тогда найдутся такие элементы $b_1, \dots, b_n \in A$, что

$$f_1 = \sum_{i=1}^n (f_{i+1}a - f_i)b_i = -f_1b_1 + \sum_{i=2}^n f_i(ab_{i-1} - b_i) + f_{n+1}ab_n.$$

Так как сумма модулей $f_1A, \dots, f_nA$ – прямая сумма, то $f_1 = -f_1b_1, ab_{i-1} - b_i \in r(f_i) = a^i A$ при $2 \leq i \leq n, ab_n \in r(f_{n+1}) = a^{n+1}A$. Поскольку $r(a) = 0$, то из включения $ab_n \in a^{n+1}A$ следует включение $b_n \in a^n A$. Кроме того, $ab_{n-1} - b_n \in a^n A$. Поэтому $ab_{n-1} \in a^n A$, причем $r(a) = 0$. Тогда $b_{n-1} \in a^{n-1}A$. Повторяя эти рассуждения, мы приходим к включению $b_1 \in aA = r(f_1)$. Кроме того, $f_1 = -f_1b_1$. Поэтому $f_1 = 0, A = r(f_1) = aA$ и элемент a обратим справа. Кроме того, a не является левым делителем нуля. Тогда a – обратимый элемент. Рассмотрим теперь случай, когда $H \neq 0$. Ненулевой модуль H обладает по условию максимальным подмодулем M . Пусть $h: F \rightarrow H, w: H \rightarrow H/M$ – естественные эпиморфизмы. Так как $h(f_{i+1})a = h(f_i)$ для всех i , то $w(h(f_0))A \subseteq w(h(f_1))A \subseteq \dots$, причем H/M – простой модуль и

$$H/M = \sum_{i=0}^{\infty} w(h(f_i))A.$$

Поэтому найдется такое $n \geq 0$, что $h(f_0), \dots, h(f_n) \in M, h(f_{n+1}), h(f_{n+2}), \dots \notin M$. Тогда $w(h(f_{n+j}))A = H/M$ для всех натуральных чисел j . Пусть $B_j \equiv r(w(h(f_{n+j})))$ при $1 \leq j < \infty$. Тогда все B_j – максимальные правые идеалы кольца A , содержащие примитивный идеал $D \equiv r(H/M)$. Пусть $t: A \rightarrow A/D$ – естественный кольцевой эпиморфизм. Так как A/D строго π -регулярно, то найдется такое натуральное число m и элемент $c \in A$, что $t(a^m) = t(a^{m+1}c)$. По построению $h(f_{n+j})a^j = h(f_n) \in M$ для всех натуральных чисел j . Так как $h(f_{n+m+1})a^{m+1} = h(f_n) \in M$, то

$$w(h(f_{n+1})) = w(h(f_{n+m+1})a^m) = w(h(f_{n+m+1})a^{m+1}c) = 0.$$

Получено противоречие, поскольку $w(h(f_{n+1}))A = H/M$.

(2) вытекает из (1) и того, что каждый ненулевой центральный элемент первичного кольца является регулярным элементом.

(3) Из (1) следует, что кольцо A не имеет собственных существенных правых идеалов. Поэтому A – артиново полупростое кольцо.

(4) Из леммы 1 и из (2) следует, что A – редуцированное кольцо, в котором каждое факторкольцо по вполне первичному идеалу является телом. Поэтому A – строго регулярное кольцо [9, теорема 1.21].

ЛЕММА 4. Пусть A – полупервичное кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, D – минимальный первичный идеал кольца A . Тогда

- (1) A содержит лишь конечное число минимальных первичных идеалов (следовательно, A – подпрямое произведение конечного числа первичных факторколец), и существует такой ненулевой идеал B кольца A , что $B = r_A(D) = \ell_A(D)$, $D = r_A(B) = \ell_A(B)$, $B \cap D = 0$, причем $B \oplus D$ является существенным правым идеалом и существенным левым идеалом;
- (2) A/D – кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов;
- (3) если A – кольцо с условием максимальности для левых аннуляторов, то каждый существенный правый идеал L кольца A/D содержит регулярный справа элемент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) известно (см. [10, § 4.1, теоремы 2, 3, 4]).

(2) Пусть $h: A \rightarrow A/D$ – естественный эпиморфизм. Допустим, что (2) не верно. Тогда существует такая строго возрастающая цепь $R_0 = D \subset R_1 \subset R_2 \subset \dots$ правых идеалов кольца A и такая строго убывающая цепь $L_0 = A \supset L_1 \supset L_2 \supset \dots$ левых идеалов кольца A , что $r_{h(A)}(h(L_n)) = h(R_n)$, $\ell_{h(A)}(h(R_n)) = h(L_n)$ для всех n . Так как $B \cap D = 0$ и $B = r_A(D)$, то $r_{h(A)}(h(X)) = h(r_A(X))$ для любого подмножества $X \subseteq B$. Кроме того, кольцо A удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторов и условию минимальности для левых аннуляторов. Поэтому найдется такое натуральное число n , что

$$h(B) \cap r_{h(A)}(R_{n+1}) = h(B) \cap r_{h(A)}(R_n), \quad h(B) \cap \ell_{h(A)}(L_{n+1}) = h(B) \cap \ell_{h(A)}(L_n).$$

Кроме того, существуют элементы $x \in R_{n+1} \setminus R_n$, $y \in L_{n+1} \setminus L_n$, причем

$$\begin{aligned} h(xB) &\in h(B) \cap r_{h(A)}(R_{n+1}) = h(B) \cap r_{h(A)}(R_n), \\ h(By) &\in h(B) \cap \ell_{h(A)}(L_{n+1}) = h(B) \cap \ell_{h(A)}(L_n). \end{aligned}$$

Тогда $h(yx) \neq h(0)$, $h(Byx) = 0$. Поэтому $Byx \subseteq B \cap \text{Ker}(h) = B \cap D = 0$. Тогда $(yx)^2 = 0$, $yx = 0$, $yx \in \ell_A(B) = D$, $h(yx) = 0$. Получено противоречие.

(3) Приведенное ниже доказательство повторяет, в основном, доказательство леммы 2 [11], но для полноты изложения приводится полностью. Так как по (2) A/D – кольцо с условиями максимальности как для правых аннуляторов, так и для левых аннуляторов, то будем считать, что $D = 0$, A – первичное кольцо. Выберем элемент $a \in L$ так, чтобы правый аннулятор $r_A(a)$ был минимальным. Допустим, что aA – существенный правый идеал. Так как A – полупервичное кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, то a – регулярный элемент [12, § 7.2, следствие 2]. Допустим, что aA не является существенным правым идеалом. Пусть M – такой ненулевой правый идеал, что $M \cap aA = 0$. Так как L – существенный правый идеал, то $N \equiv M \cap L \neq 0$. Пусть $x \in N$ и $b \in r(a + x)$. Тогда $(a + b)x = 0$ и $ab = -xb \in N \cap aA$. Поэтому $b \in r(a) \cap r(x)$ и $r(a + x) = r(a) \cap r(x)$. В силу минимальности правого аннулятора $r(a)$ получаем, что $r(a) \subseteq r(x)$ для всех $x \in N$. Но тогда $Nr(a) = 0$. Так как N – ненулевой правый идеал и A – первичное кольцо, то $r(a)$ и все доказано.

ЛЕММА 5. Для кольца A равносильны условия:

- (1) A строго π -регулярное кольцо;
- (2) все первичные факторкольца кольца A строго π -регулярны;
- (3) факторкольцо кольца A по его первичному радикалу является строго π -регулярным кольцом;
- (4) все факторкольца кольца A по минимальным первичным идеалам строго π -регулярны;
- (5) все факторкольца кольца A строго π -регулярны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В лемме 5 эквивалентность условий (1) и (2) доказана в [13]. Импликации (1) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (4), (4) $\Rightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (5), (5) $\Rightarrow$ (2) следуют из того, что факторкольца строго π -регулярных колец являются строго π -регулярными кольцами, причем каждый первичный идеал содержит минимальный первичный идеал.

ЛЕММА 6. Пусть A – полупервичное кольцо ограниченного индекса. Тогда

- (1) каждое факторкольцо кольца A по минимальному первичному идеалу является кольцом ограниченного индекса;
- (2) если кольцо A первично, то A удовлетворяет условиям максимальности как для правых, так и для левых аннуляторов;
- (3) каждое факторкольцо кольца A по минимальному первичному идеалу удовлетворяет условиям максимальности как для правых, так и для левых аннуляторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1), (2) доказаны в [11, теорема 2, лемма 1], а (3) следует из (1) и (2).

ЛЕММА 7. Для кольца A равносильны условия:

- (1) все первичные факторкольца кольца A являются артиновыми;
- (2) факторкольцо кольца A по любому минимальному первичному идеалу является артиновым кольцом;
- (3) для любого минимального первичного идеала D кольца A каждый существенный справа идеал факторкольца A/D содержит обратимый справа элемент;
- (4) для любого минимального первичного идеала D кольца A факторкольцо A/D является кольцом ограниченного индекса, причем каждый регулярный справа элемент кольца A/D обратим справа;
- (5) для любого минимального первичного идеала D кольца A факторкольцо A/D является кольцом с условиями максимальности для правых и левых аннуляторов, причем каждый регулярный справа элемент кольца A/D обратим справа;
- (6) для любого минимального первичного идеала D кольца A факторкольцо A/D является правым кольцом Басса с условиями максимальности для правых и левых аннуляторов, причем каждое примитивное справа факторкольцо кольца A/D является строго π -регулярным;
- (7) A – строго π -регулярное кольцо, у которого факторкольцо по любому минимальному первичному идеалу является правым кольцом Басса с условиями максимальности для правых и левых аннуляторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В лемме 7 эквивалентность условий (1), (2), (3) и импликация (2) $\Rightarrow$ (4) проверяются непосредственно. Импликация (4) $\Rightarrow$ (5) следует из леммы 6 (2). Импликация (5) $\Rightarrow$ (3) следует из леммы 4 (3). Импликации (1) $\Rightarrow$ (7) и (7) $\Rightarrow$ (6) следуют из леммы 5. Импликация (6) $\Rightarrow$ (5) следует из леммы 3 (1).

ЛЕММА 8. Пусть факторкольцо кольца A по его первичному радикалу N является кольцом ограниченного индекса. Равносильны условия:

- (1) все первичные факторкольца кольца A являются артиновыми;
- (2) для любого минимального первичного идеала D кольца A факторкольцо A/D является правым кольцом Басса, а каждое примитивное справа факторкольцо кольца A/D является строго π -регулярным;
- (3) каждое факторкольцо кольца A по любому минимальному первичному идеалу является строго π -регулярным правым кольцом Басса;
- (4) A строго π -регулярное кольцо, у которого факторкольцо по любому минимальному первичному идеалу является правым кольцом Басса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая лемму 5, можно без ограничения общности считать, что $N = 0$. По лемме 6 (3) каждое факторкольцо кольца A по минимальному первичному идеалу удовлетворяет условиям максимальности для правых и левых аннуляторов. Теперь применяем лемму 7.

ЛЕММА 9. Для кольца A равносильны условия:

- (1) A полупервичное артиново кольцо;
- (2) A полупримитивное π -регулярное кольцо, не содержащее бесконечного множества ортогональных идемпотентов;
- (3) A – π -регулярное кольцо, не содержащее бесконечного множества ортогональных идемпотентов и ненулевых правых нильидеалов;
- (4) A не содержит бесконечного множества ортогональных идемпотентов, и каждый ненулевой правый идеал кольца A содержит ненулевой идемпотент;
- (5) A не содержит бесконечного множества ортогональных идемпотентов, и каждый ненулевой правый идеал кольца A содержит ненулевой идемпотент, порождающий минимальный правый идеал;
- (6) A полупервично, имеет лишь конечное число минимальных первичных идеалов, и все факторкольца по минимальным первичным идеалам кольца A являются артиновыми;
- (7) A – полупервичное кольцо с условиями максимальности для правых и левых аннуляторов, причем для любого минимального первичного идеала D кольца A факторкольцо A/D является правым кольцом Басса, а каждое примитивное справа факторкольцо кольца A/D является строго π -регулярным;
- (8) A – полупервичное строго π -регулярное кольцо с условиями максимальности для правых и левых аннуляторов, причем для любого минимального первичного идеала D кольца A факторкольцо A/D является правым кольцом Басса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) следует из того, что все правые нильидеалы лежат в радикале Джекобсона. Импликации (3) $\Rightarrow$ (4), (4) $\Rightarrow$ (5), (5) $\Rightarrow$ (1),

(1) $\implies$ (2), (6) $\implies$ (1), (1) $\implies$ (8), (8) $\implies$ (7) проверяются непосредственно. Импликация (7) $\implies$ (6) следует из лемм 4 (1) и 8.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для кольца A равносильны условия:*

- (1) A – совершенное справа кольцо;
- (2) A – правое кольцо Басса, не содержащее бесконечного множества ортогональных идемпотентов, причем $A/J(A)$ – π -регулярное кольцо;
- (3) A – правое кольцо Басса, причем $A/J(A)$ – π -регулярное кольцо, не содержащее бесконечного множества ортогональных идемпотентов;
- (4) A – правое кольцо Басса, $A/J(A)$ – кольцо с условиями максимальности для правых и левых аннуляторов, причем каждое примитивное справа факторкольцо кольца $A/J(A)$ является строго π -регулярным;
- (5) A – правое кольцо Басса, не содержащее бесконечного множества ортогональных идемпотентов, $A/J(A)$ – кольцо ограниченного индекса, причем каждое примитивное справа факторкольцо кольца $A/J(A)$ является строго π -регулярным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 можно считать, что радикал $J(A)$ исчезает слева. Так как идемпотенты можно поднимать по модулю нильидеала $J(A)$, причем условие максимальности для правых аннуляторов влечет отсутствие бесконечного множества ортогональных идемпотентов, то можно считать, что в кольцах A и $A/J(A)$ нет бесконечного множества ортогональных идемпотентов. Теперь применяем леммы 9 и 6 (3).

ЛЕММА 10. *Пусть A – полупервичное кольцо. Тогда*

- (1) *если для любого элемента $c \in C(A)$ найдется такое натуральное число m , что $c^m \in c^{m+1}A$, то $C(A)$ – коммутативное регулярное кольцо;*
- (2) *если центр каждого первичного факторкольца кольца A является полем, то $C(A)$ – коммутативное регулярное кольцо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $c \in C(A)$, $x \in A$, m – натуральное число, причем $c^m = c^{m+1}x$. Если a – произвольный элемент кольца A , то

$$(ac(1 - cx))^m = c^m a(1 - cx)(a(1 - cx))^{m-1} = a(c^m - c^{m+1}x)(a(1 - cx))^{m-1} = 0.$$

Следовательно, $(Ac(1 - cx))^m = 0$ и из полупервичности кольца A получаем, что $c = c^2x = cxx = cc^2x = c(cx^2)c$. Остается проверить, что $cx^2 \in C(A)$. Но

$$cx^2a = x^2ac = x^2ac^3x^2 = c^3x^2ax^2 = acx^2$$

для любого элемента $a \in A$.

(2) Пусть $c \in C(A)$. Множество $U \equiv \{c^m - c^{m+1}x \mid x \in A, m = 1, 2, \dots\}$ является мультипликативной системой. Допустим, что $0 \notin U$. Тогда множество всех идеалов кольца A , имеющих пустое пересечение со множеством U , не пусто и содержит по лемме Цорна максимальный элемент P . Очевидно, что P – первичный идеал. По условию ненулевой центральный элемент $c + P$ первичного кольца A/P является обратимым элементом. Поэтому существует такой элемент $y \in A$, что $1 - cy \in P$. Тогда $c - c^2y \in P \cap U$ и получаем противоречие. Поэтому $c^m = c^{m+1}x$ для некоторого натурального числа m и элемента $x \in A$. По пункту (1) $C(A)$ – регулярное кольцо.

ЛЕММА 11. Пусть C – центр кольца A , причем для каждого элемента $a \in A$ найдется такой многочлен $f \in C[x]$, что $f(a) = 0$ и младший коэффициент многочлена $f(x)$ обратим в кольце A . Тогда A – строго π -регулярное кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in A$. Из условия следует, что существуют такие $n \geq 0$, обратимый элемент $b \in C$ и многочлен $g(x) \in C[x]$, что $a^n(b - ag(a)) = 0$ (здесь многочлен $f(x)$ из условия записан в виде $x^n(b - xg(x))$). Тогда $a^n = a^{n+1}g(a)b^{-1}$. Поэтому A – строго π -регулярное кольцо.

ЛЕММА 12. Пусть A – правое кольцо Басса, B – факторкольцо кольца A . Тогда

- (1) каждый центральный регулярный элемент кольца B обратим в кольце B ;
- (2) если B – первичное кольцо, то его центр является полем;
- (3) если B – полупервичное кольцо, то его центр является регулярным кольцом;
- (4) если каждый существенный правый идеал кольца B содержит центральный регулярный элемент, то B – артиново полупервичное кольцо;
- (5) если B – первичное кольцо, алгебраическое над своим центром, то B – строго π -регулярная алгебраическая алгебра над полем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по лемме 1 все факторкольца кольца A являются правыми кольцами Басса, то все утверждения достаточно доказать для случая $B = A$.

(1) Достаточно доказать, что кольцо A совпадает с кольцом частных Q кольца A относительно множества T всех центральных регулярных элементов. Допустим противное. Тогда ненулевой модуль $(Q/A)_A$ обладает максимальным $(M/A)_A$. Поэтому M – максимальный подмодуль модуля Q_A . Пусть $h: Q \rightarrow Q/M$ – естественный эпиморфизм. Простой модуль Q/M обладает образующим $h(at^{-1})$, где $a \in A$, $t \in T$. Поэтому найдется такой элемент $b \in A$, что $h(at^{-2}) = h(at^{-1})b$. Тогда

$$h(at^{-1}) = h(at^{-2})t = h(at^{-1})bt = h(ab) \in h(A) \subseteq h(M) = 0.$$

Поэтому $Q/M = 0$ и получено противоречие.

(2) вытекает из (1) и того, что каждый ненулевой центральный элемент первичного кольца является регулярным элементом.

(3) следует из леммы 10 (2) и из (2).

(4) Из (1) следует, что кольцо A не имеет собственных существенных правых идеалов. Поэтому A – артиново полупростое кольцо.

(5) следует из (2) и из леммы 12.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть A – правое кольцо Басса. Если каждое первичное факторкольцо кольца A алгебраично над своим центром (это так, например, если все факторкольца кольца A по минимальным первичным идеалам являются Р.І.-кольцами), то A – строго π -регулярное кольцо.

Предложение 2 следует из лемм 5 и 12 (5).

СЛЕДСТВИЕ 2 [3, теорема 2]. Если A – правое Р.І.-кольцо Басса, то A – π -регулярное кольцо.

Следствие 2 вытекает из предложения 2 и леммы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Следует из предложений 1 и 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Существует простое V -кольцо без делителей нуля, не являющееся телом [6, теорема 7.42]. Кольцо A не является совершенным справа. По лемме 2 (1) A – правое кольцо Басса. Это показывает, что в предложении 1 нельзя отбросить условие строгой π -регулярности всех примитивных справа факторколец и что редуцированное правое кольцо Басса, не содержащее бесконечного множества ортогональных идемпотентов, не обязано быть совершенным справа кольцом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для кольца A равносильны условия:

- (1) A – правое кольцо Басса, $A/J(A)$ – редуцированное кольцо, у которого все примитивные справа факторкольца строго π -регулярны;
- (2) A – квазиинвариантное справа правое кольцо Басса;
- (3) $A/J(A)$ – строго регулярное кольцо и $J(A)$ – исчезающий слева идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (3) $\Rightarrow$ (2) следует из леммы 2 (2). Так как подпрямое произведение областей является редуцированным кольцом, то импликация (2) $\Rightarrow$ (1) следует из того, что любое примитивное справа факторкольцо квазиинвариантного справа кольца является телом. Импликация (1) $\Rightarrow$ (3) следует из лемм 1 и 3 (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В [7] построено полупервичное правое кольцо Басса A с полиномиальным тождеством, не являющееся регулярным кольцом. Каждое примитивное справа факторкольцо Р. I.-кольца A является артиновым. Так как полупервичное Р. I.-кольцо A не имеет ненулевых нильидеалов, то из леммы 1 следует, что $J(A) = 0$. Отсюда следует, что в условии (1) предложения 3 редуцированность кольца $A/J(A)$ опустить нельзя.

Московский энергетический институт
E-mail: askar@exodus.mirea.ac.ru

Поступило
05.09.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bass H. Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 95. № 3. P. 466–488.
- [2] Hamsher R. M. Commutative rings over which every module has a maximal submodule // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. V. 18. № 6. P. 1133–1137.
- [3] Armendariz E. P., Fisher J. V. Regular P.I.-rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 39. № 2. P. 247–251.
- [4] Cozzens J. H. Homological properties of the of differential polynomials // Bull. Amer. Math. Soc. 1970. V. 76. P. 75–79.
- [5] Койфман Л. А. Кольца, над которыми каждый модуль имеет максимальный подмодуль // Матем. заметки. 1970. Т. 7. № 3. С. 359–367.
- [6] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. М.: Мир, 1979.
- [7] Марков В. Т. О B -кольцах с полиномиальным тождеством // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1981. Т. 7. С. 232–238.
- [8] Каш Ф. Модули и кольца. М.: Мир, 1981.
- [9] Goodearl K. R. Von Neumann regular rings. London: Pitman, 1979.
- [10] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука, 1979.
- [11] Бейдар К. И., Михалёв А. В. Полупервичные кольца с ограниченными индексами нильпотентных элементов // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1988. Т. 13. С. 237–249.
- [12] Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972.
- [13] Fisher J. V., Snider R. L. On the Von Neumann regularity of rings with regular prime factor rings // Pacif. J. Math. 1974. V. 54. № 1. P. 135–144.