Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Филиппов, Об условии равностепенной непрерывности последовательности пространств решений, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 416–423

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:42:37

УДК 517

ОБ УСЛОВИИ РАВНОСТЕПЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРОСТРАНСТВ РЕШЕНИЙ

В. В. Филиппов

Проверка выполнения должным образом сформулированного условия равностепенной непрерывности последовательности пространств решений является одним из двух ключевых моментов теории задачи Коши для уравнений с особенностями правой части. В заметке получен соответствующий достаточный признак.

Библиография: 9 названий.

В [1]–[3] было начато развитие нового подхода к теории обыкновенных дифференциальных уравнений, направленного, в частности, на применение к исследованию уравнений с разрывной правой частью и соответствующих дифференциальных включений и основанного на систематическом использовании введенных там топологических структур. В [4]–[9] этот подход получил дальнейшее развитие. В центре исследования оказывается понятие сходимости последовательности пространств решений, адекватное идее о непрерывной зависимости решений от параметров уравнений, а вместе с ним – вопрос об указании достаточных условий такой сходимости. Общая схема доказательства такой сходимости обсуждена в [3], [4], [7]–[9]. Наша цель в этой заметке – получение утверждения, удобного для проверки условия равностепенной непрерывности последовательности пространств решений, что является одним из двух ключевых моментов при доказательстве сходимости. Мы получим результат, положение которого аналогично положению теоремы 4 из [3] и теоремы 1 из [4].

Частью обозначений из [1]–[9] будем пользоваться без дополнительных пояснений.

Пусть U – открытое подмножество произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Выделим класс многозначных отображений $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию

- (1) значения отображения F – непустые выпуклые (односторонние) конусы с вершиной в начале координат (при этом $\{0\}$ допускается в качестве значения).

Приступая к основной части изложения, зафиксируем

- (2) $F, F_i: U \rightarrow \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots$, – многозначные отображения, каждое из которых удовлетворяет условию (1), причем
- (3) для любой точки $x \in U$

$$F(x) \supseteq \cap \left\{ \text{cc} \left(\bigcup \{ F_i(Ox) : i = k, k+1, \dots \} \cup F(Ox) \right) : k = 1, 2, \dots, \right. \\ \left. Ox \text{ пробегает множество всех окрестностей точки } x \text{ в } U \right\}$$

(здесь $\text{cc}(M)$ обозначает замкнутую выпуклую оболочку множества $M \subseteq \mathbb{R}^n$).

Пусть также

- (4) $\alpha_i: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[, i = 1, 2, \dots$, – интегрируемые по Лебегу функции, их первообразные составляют равностепенно непрерывное семейство, $S_i(t) = \{u : u \in \mathbb{R}, \|u\| \leq \alpha_i(t)\}$,
 (5) $G_i(t, y) = F_i(t, y) + S_i(t) = \{u + v : u \in F_i(t, y), v \in S_i(t)\}$ для $(t, y) \in U$, $i = 1, 2, \dots$.

Для конуса V с вершиной в начале координат и $\varepsilon > 0$ обозначим через P_ε ε -окрестность множества $\{u : u \in V, \|u\| = 1\}$ на единичной сфере S и через V_ε – конус

$$\{\bar{0}\} \cup \left\{ u : u \in \mathbb{R}^n, u \neq \bar{0}, \frac{u}{\|u\|} \in P_\varepsilon \right\}.$$

Обозначим через $\tau(F, t)$ топологию на множестве $U_t = \{y : y \in \mathbb{R}^n, (t, y) \in U\}$, базу которой в текущей точке $y \in U_t$ составляет семейство

$$\{y \pm (F(t, y))_\varepsilon \cap O_\delta \bar{0} : \varepsilon, \delta > 0\}.$$

Обозначим через $C_s(U)$ множество всех определенных на всевозможных отрезках и одноточечных подмножествах действительной прямой $\mathbb{R}$ непрерывных функций со значениями в пространстве $\mathbb{R}^n$, графики которых лежат в множестве U .

Пусть $\pi(z)$ обозначает область определения, а $\text{Gr}(z)$ – график функции z .

Мы рассматриваем $C_s(U)$ в качестве метрического пространства, считая расстоянием между двумя его элементами расстояние Хаусдорфа между их графиками (при этом расстояние Хаусдорфа является метризацией топологии Виеториса, и поэтому возникающая топология на самом деле не зависит от того, какая конкретно метрика рассматривается на множестве $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (см. [1]–[3], [7]).

Пусть $G: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ – многозначное отображение (соответственно $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ – однозначное отображение). Следуя [1]–[3], функцию $z \in C_s(U)$ называем *решением* дифференциального включения $y' \in G(t, y)$ (соответственно уравнения $y' = g(t, y)$), если либо

- а) функция z обобщенно абсолютно непрерывна и $z'(t) \in G(t, z(t))$ (соответственно $z'(t) = g(t, z(t))$), здесь и ниже речь идет об аппроксимативных (обобщенных) производных) почти при всех $t \in \pi(z)$, либо
- б) область определения $\pi(z)$ функции z состоит из одной точки.

Множество всех определенных таким образом решений включения $y' \in G(t, y)$ (уравнения $y' = g(t, y)$) обозначим через $D(G)$ ($D(g)$). Будем называть его *пространством решений* включения $y' \in G(t, y)$ (уравнения $y' = g(t, y)$).

Для любого пространства $Z \subseteq C_s(U)$ и $M \subseteq U$ обозначим

$$Z_M = \{z : z \in Z, \text{Gr}(z) \subseteq M\}.$$

Положим $D(G, M) = (D(G))_M$.

Наша цель – исследовать, когда последовательность пространств

$$Z_i \subseteq D(G_i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

удовлетворяет условию

- (s) для любого компакта $K \subseteq U$ любая последовательность функций $z_j \in (Z_{i_j})_K$ ($i_1 < i_2 < \dots$) равностепенно непрерывна.

Множество всех последовательностей $\{Z_i : i = 1, 2, \dots\} \subseteq R^i(U)$, удовлетворяющих условию (s), обозначим через $s(U)$.

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия (1)–(6), γ – семейство подмножеств множества U , для любого элемента V которого $\{(Z_i)_V : i = 1, 2, \dots\} \in s(V)$, $E = U \setminus (\cup \gamma)$, и для любого $t \in \mathbb{R}$ множество E_t не содержит (неодноточечных) континуумов, на которых топология $\tau(F, t)$ индуцирует ту же топологию, что и евклидова топология пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда $\{(Z_i) : i = 1, 2, \dots\} \in s(U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Допустим противное. Тогда найдутся компакт $K \subseteq U$ и последовательность функций $z_j \in (Z_{i_j})_K$, не являющаяся равностепенно непрерывной, т.е. при некотором $\varepsilon > 0$ и любом $m = 1, 2, \dots$ бесконечно множество $A_m \subseteq \mathbb{N}$ индексов $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию

$$(7) \text{ найдутся такие точки } s < t \text{ области определения } \pi(z_m) \text{ функции } z_m, \text{ что } t - s < 2^{-m} \text{ и } \|z_k(t) - z_k(s)\| \geq \varepsilon.$$

Так как $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$, то формула

$$j_1 = \min A_1, \quad j_i = \min(A_i \setminus \{j_1, \dots, j_{i-1}\}) \quad \text{для } i = 2, 3, \dots$$

задает бесконечную последовательность индексов $A = \{j_1, j_2, \dots\}$. Для $j_m \in A$ укажем пару точек $s_{j_m} < t_{j_m}$ из $\pi(z_{j_m})$ в соответствии с условием (7):

$$t_{j_m} - s_{j_m} < 2^{-m} \quad \text{и} \quad \|z_{j_m}(t_{j_m}) - z_{j_m}(s_{j_m})\| \geq \varepsilon.$$

Таким образом,

$$t_j - s_j \rightarrow 0 \quad \text{при } j \in A \text{ и } j \rightarrow \infty, \quad (8)$$

$$\|z_j(t_j) - z_j(s_j)\| \geq \varepsilon \quad \text{при } j \in A. \quad (9)$$

Проекция P компакта K на первый сомножитель произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ компактна, и поэтому из последовательности $\{s_j : j \in A\}$ мы можем выбрать подпоследовательность $\{s_j : j \in B\}$, сходящуюся к некоторой точке $s \in P$. Из условия (8) следует, что $s = \lim_{j \in B, j \rightarrow \infty} t_j$.

Пространство замкнутых подмножеств $\text{ехр } K$ компакта K компактно (см., например, [8, теорема 4.5.1]), и поэтому из последовательности $\{z_j : j \in B\}$ мы можем выбрать подпоследовательность $\{z_j : j \in B_1\}$ таким образом, чтобы последовательность множеств $\{\text{Gr}(z_j) : j \in B_1\}$ имела в пространстве $\text{ехр } K$ некоторый предел H . Так как проекция множества $\text{Gr}(z_j|_{[s_j, t_j]})$ на первый сомножитель произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ совпадает с отрезком $[s_j, t_j]$, то в силу условия $s = \lim_{i \rightarrow \infty} s_j = \lim_{i \rightarrow \infty} t_j$ проекция компакта H на первый сомножитель произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ совпадает с точкой s . Из условия (9) следует, что диаметр компакта H не меньше ε , поэтому он неодноточечен. Будучи пределом связанных компактов, компакт H связан, (см. [8, теорема 4.8.8]).

II. Покажем, что $H \subseteq U \setminus (\cup \gamma)$.

Допустим противное, т.е. существование точки $(t, y_0) \in H \setminus (\cup \gamma)$. При некотором $\eta > 0$

$$(10) \quad H \setminus O_\eta y_0 \neq \emptyset,$$

$$(11) \quad \text{множество } [O_\eta y_0] \text{ лежит в некотором элементе } V \text{ семейства } \gamma.$$

В силу условия $(s, y_0) \in H$ мы можем так отметить точки $p_j \in [s_j, t_j]$, что $z_j(p_j) \rightarrow y_0$ при $j \in B_1$ и $j \rightarrow \infty$.

Из последней сходимости следует бесконечность множества

$$B_2 = \{j : j \in B_1, (p_j, z_j(p_j)) \in O_\eta(s, y_0)\}.$$

Пусть для $j \in B_2$ I_j обозначает максимальный отрезок, лежащий в $[s_j, t_j]$ и удовлетворяющий условиям $p_j \in I_j$, $\text{Gr}(z_j|_{I_j}) \subseteq [O_\eta(s, y_0)]$.

Из условия (10) следует, что у последовательности множеств $\{\text{Gr}(z_j|_{I_j}) : j \in B_2\}$ есть предельные точки вне $O_\eta y_0$, но отсюда вытекает, что последовательность функций $\{z_j|_{I_j} : j \in B_2\}$ не является равномерно непрерывной.

Последнее противоречит условиям (11) и $\{(Z_i)_V : i = 1, 2, \dots\} \in s(V)$.

III. Предположим, что континуум H лежит в плоскости λ , Λ – пространство векторов плоскости λ . Если во всех точках множества H или хотя бы его непустого открытого подмножества их указанные выше окрестности в U_s относительно топологии $\tau(F, s)$ содержат δ -шары плоскости λ , то индуцированные топологии совпадают, и в этом случае теорема доказана.

Проанализируем случай, когда для некоторой точки $x_1 = (t, y_1) \in H$ конус $F(t, y_1)$ не содержит полупространства пространства Λ .

Множество $\text{cc}(\cup\{F_i(Ox_1) : i = k, k+1, \dots\} \cup F(Ox_1))$ в формуле, фигурирующей в условии (3), является замкнутым конусом, и поэтому у нас есть две возможности.

А. Начало координат $\bar{0}$ не принадлежит внутренности множества

$$\text{cc}(\cup\{F_i(Ox_1) : i = k, k+1, \dots\} \cup F(Ox_1)).$$

Б. Начало координат принадлежит внутренности множества

$$\text{cc}(\cup\{F_i(Ox_1) : i = k, k+1, \dots\} \cup F(Ox_1))$$

и тогда, как легко видеть,

$$\text{cc}(\cup\{F_i(Ox_1) : i = k, k+1, \dots\} \cup F(Ox_1)) = \Lambda.$$

Если условие Б справедливо для любой окрестности Ox_1 точки x_1 и любого $k = 1, 2, \dots$, то в силу (3) $F(x_1) \supseteq \Lambda$, но тогда база в точке y_1 топологии $\tau(F, s)$ совпадает с базой евклидовой топологии, что выходит за рамки рассматриваемого случая. Таким образом, для некоторой окрестности Ox_1 точки x_1 выполнено условие А.

При некотором $\mu > 0$ $[s - \mu, s + \mu] \times [O_\mu y_1] \subseteq Ox_1$.

Пусть e_0 – точка единичной сферы пространства Λ , наиболее удаленная от конуса

$$\text{cc}\left(\cup\left\{F_i([s - \mu, s + \mu] \times [O_\mu y_1]) : i = k, k+1, \dots\right\} \cup F([s - \mu, s + \mu] \times [O_\mu y_1])\right). \quad (*)$$

Покажем, что $(e_0, u) \leq 0$ для любого вектора

$$u \in \text{cc}\left(\cup\left\{F_i([s - \mu, s + \mu] \times [O_\mu y_1]) : i = k, k+1, \dots\right\} \cup F([s - \mu, s + \mu] \times [O_\mu y_1])\right). \quad (12)$$

Допустив противное, получим, что условию (12) удовлетворяет вектор u_0 , являющийся ближайшим к e_0 элементом множества $(*)$. У нас есть две возможности.

1. Есть еще один (отличный от u_0) вектор u_1 , для которого $\|e_0 - u_1\| = \|e_0 - u_0\|$. Но тогда кратчайшая дуга, соединяющая точки u_0 и u_1 на сфере S целиком лежит в конусе $(*)$ и любая ее неконцевая точка будет ближе к e_0 , чем u_0 и u_1 , что противоречит указанию этих векторов.

2. Вектор u_0 является единственным ближайшим к e_0 вектором из $(*)$. В этом случае можно удаляясь от u_0 по дуге большого круга, проходящего через u_0 и u_1 , указать вектор e_1 , более удаленный от конуса $(*)$, чем вектор e_0 .

Таким образом, сделанное допущение неверно, и в силу доказанного для вектора $e = -e_0$ и указанного $\mu > 0$

$$(13) (e, u) \geq 0 \text{ для любого вектора (12).}$$

IV. Вернемся к обозначениям I, сохраняя обозначения III. Пусть выполнено условие (13).

По [8, теорема 4.3.10] мы можем так отметить точки $r_j \in [s_j, t_j]$, что $z_j(r_j) \rightarrow y_1$ при $j \in B_1, j \rightarrow \infty$.

Множество $B_2 = \{j : j \in B_1, r_j \in [s - \mu, s + \mu], z_j(r_j) \in O_\mu y_1\}$ бесконечно.

Пусть множество $B_3 \subseteq B_2$ бесконечно и для $j \in B_3$ отмечены точки

$$p_j \in [s_j, r_j] \cap [s - \mu, s + \mu] \quad \text{и} \quad q_j \in [r_j, t_j] \cap [s - \mu, s + \mu]$$

таким образом, что $z_j([p_j, q_j]) \subseteq [O_\mu y_1]$.

Пусть $\varphi_j(t) = (e, z_j(t))$ для $t \in [p_j, q_j]$.

Функция φ_j обобщенно абсолютно непрерывна, а в силу (13), (4) и (5)

$$(14) \varphi'_j(t) \geq -\alpha_j(t) \text{ почти при всех } t \in [p_j, q_j].$$

Докажем, что

$$(15) \text{ если } \varphi_j(p_j) \rightarrow C, \varphi_j(q_j) \rightarrow D \text{ при } j \in B_3 \text{ и } j \rightarrow \infty, \text{ то } C \leq D.$$

Из (14) следует, что функция

$$\psi_j(t) = \varphi_j(t) + \int_{p_j}^t \alpha_j(s) ds$$

является неубывающей, поэтому $\psi_j(q_j) - \psi_j(p_j) \geq 0$,

$$\varphi_j(q_j) - \varphi_j(p_j) \geq - \int_{p_j}^{q_j} \alpha_j(s) ds \rightarrow 0 \quad (\text{при } j \in B_3 \text{ и } j \rightarrow \infty)$$

в силу равномерной непрерывности первообразных функций α_j . Таким образом,

$$D - C = \lim_{j \in B_3, j \rightarrow \infty} (\varphi_j(q_j) - \varphi_j(p_j)) \geq 0,$$

что и дает выполнение (15).

V. Сохраняя обозначения III и IV, предположим теперь дополнительно, что

$$\text{Gr}(z_j|_{[p_j, q_j]}) \rightarrow H_1 \subseteq H \cap (\{t\} \times [O_\mu y_1]) \cap \lambda \quad \text{при } j \in B \text{ и } j \rightarrow \infty$$

и отображение $f(u) = (e, u)$ инъективно на компакте H_1 .

Покажем, что топология $\tau(F, s)$ и евклидова топология индуцируют на H_1 одну и ту же топологию.

Из непрерывности отображения f , связности и компактности множества H_1 относительно евклидовой топологии следует, что множество $f(H_1)$ является отрезком (или одноточечно). Обозначим его через I .

В силу компактности множества H_1 , непрерывности и взаимной однозначности отображения $f: H_1 \rightarrow I$ обратное отображение $g: I \rightarrow H_1$ непрерывно относительно евклидовой топологии на множестве H_1 .

Для достижения поставленной цели нам достаточно проверить непрерывность отображения g относительно топологии $\tau(F, s)$.

Допустим противное. Тогда существуют такая точка (s, a) множества H_1 и такое число $\varepsilon > 0$, что для любого $j = 1, 2, \dots$ (в силу непрерывности отображения g относительно евклидовой топологии) найдется точка $a_j \in \lambda$, удовлетворяющая условию

$$(s, a_j) \in H_1 \cap \left(\{s\} \times \left(O_{2-j} a \setminus (a \pm (F(s, a))_{2\varepsilon}) \right) \right).$$

В силу компактности единичного шара мы можем перейти к подпоследовательности $\{(a_j - a)/\|a_j - a\| : j \in C\}$ последовательности $\{(a_j - a)/\|a_j - a\| : j = 1, 2, \dots\}$, сходящейся к некоторому вектору $u_0 \in \Lambda$.

Для последнего

$$\|u_0\| = 1 \quad \text{и} \quad u_0 \notin \pm(F(t, a))_{2\varepsilon}.$$

Из условий (1) и (3) легко выводится, что

$$(F(s, a))_\varepsilon \supseteq \text{cc}(\cup\{F_i(O(s, a)) : i = k, k+1, \dots\})$$

для некоторого $k = 1, 2, \dots$ и некоторой окрестности $O(s, a)$ точки (s, a) в U .

В силу непрерывности отображения g относительно евклидовой топологии $g([f(a) - \delta, f(a) + \delta]) \subseteq O(s, a)$ при некотором $\delta > 0$.

Вектор u_0 не принадлежит ни множеству $L_0 = \text{cc}(\cup\{F_i(O(s, a)) : i = k, k+1, \dots\})$, ни множеству $L_1 = -\text{cc}(\cup\{F_i(O(s, a)) : i = k, k+1, \dots\})$.

По теореме Хана–Банаха существуют линейные функционалы $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие условию

$$f_i(L_i) \subseteq [0, \infty[, \quad f_i((-1)^i u_0) < 0.$$

В силу сходимости $a_i \rightarrow a$ относительно евклидовой топологии и непрерывности отображения f $f(a_i) \rightarrow f(a)$ и

$$f(a_i) \in [f(a) - \delta, f(a) + \delta], \quad (16)$$

начиная с некоторого $i = k$.

Но тогда отрезок M_i с концами $f(a_i)$ и $f(a)$ лежит в отрезке $[f(a) - \delta, f(a) + \delta]$ и поэтому

$$g(M_i) \subseteq O(s, a). \quad (17)$$

Таким образом, $|f(a_k) - f(a)| < \delta$, $a_k \in O(s, a)$, $g(M_i) \subseteq O(s, a)$,

$$f_0(a_k - a) < 0, \quad f_1(a_k - a) > 0. \quad (18)$$

Так как отображение f инъективно, то $f(a_k) \neq f(a)$.

Рассмотрим случай, когда $f(a_k) > f(a)$.

По [8, теорема 4.3.10] мы можем так указать бесконечное множество $B_4 \subseteq B_3$ и для $j \in B_4$ — точки $c_j, d_j \in [p_j, q_j]$, что $z_j(c_j) \rightarrow a$, $z_j(d_j) \rightarrow a_k$.

Кроме того, начиная с некоторого $j_0 \in B_4$, график функции z_j на отрезке с концами c_j, d_j лежит в множестве $O(s, a)$ (если бы это было не так, то гомеоморфный отрезку континуум H_1 выходил бы между точками a и a_k за пределы $O(s, a)$, что противоречит (17)).

Таким образом, в силу (15) $c_j < d_j$, начиная с некоторого $j \in B_4$.

Отсюда, из включения $\text{Gr}(z_j|_{[c_j, d_j]}) \subseteq O(s, a)$ и (13) следует, что $f_0(a) \leq f_0(a_k)$, что противоречит (18).

Случай $f(a_k) < f(a)$ рассматривается аналогично с заменой f_0 на f_1 .

VI. Вернемся к обозначениям III и положим для $j \in B_2$

$$p_j = \inf\{p : p \in [s_j, r_j], p \geq s - \mu, z_j([p, r_j]) \subseteq [O_\mu y_1]\},$$

$$q_j = \sup\{q : q \in [r_j, t_j], q \leq s + \mu, z_j([r_j, q]) \subseteq [O_\mu y_1]\}.$$

Тогда определенное в V множество H_1 будет неодноточечным. Если соответствующее отображение f инъективно, мы получаем требуемое из V. В противном случае при некотором $m \in f(H_1)$ множество $H_2 = f^{-1}(m) \cap H_1$ неодноточечно. Пусть a и b — любые две его различные точки. В соответствии с теоремой 4.3.10 из [8] отметим точки $p'_j, q'_j \in [p_j, q_j]$ таким образом, что $z_j(p'_j) \rightarrow a$, $z_j(q'_j) \rightarrow b$.

Положим для определенности (перейдя, если необходимо, к подпоследовательности), что $p'_j < q'_j$.

Если

(19) при любом $y \in H_2$ множество $F(s, y)$ содержит целиком полупространство линейного пространства L ,

то, очевидно, на H_2 топология $\tau(F, t)$ индуцирует ту же топологию, что и евклидова топология. В противном случае возвращаемся к началу рассуждения в VI с заменой λ на $\lambda \cap f^{-1}(m)$, s_j на p'_j , t_j на q'_j и будем делать это до тех пор, пока не добьемся выполнения условия (19). Так как при каждом шаге размерность соответствующей плоскости λ уменьшается на единицу, то менее чем за n шагов процесс закончится. При этом мы не можем спуститься до размерности нуль, так как в этом случае нетривиальный континуум оказался бы подмножеством плоскости размерности нуль. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Филиппов В. В. Аксиоматическая теория пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. № 2. С. 304–308.
- [2] Филиппов В. В. К теории пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 5. С. 1073–1077.
- [3] Филиппов В. В. Об обыкновенных дифференциальных уравнениях с особенностями в правой части // Матем. заметки. 1985. Т. 38. № 6. С. 832–851.
- [4] Филиппов В. В. Два замечания к теории пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1988. № 4. С. 53–55.
- [5] Филиппов В. В. Об асимптотическом интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывами в правой части // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 3. С. 482–485.
- [6] Филиппов В. В. О стационарных точках и некоторых геометрических свойствах решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1992. Т. 323. № 6. С. 1043–1047.
- [7] Филиппов В. В. Топологическое строение пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1993. Т. 48. № 1. С. 103–154.
- [8] Филиппов В. В., Федорчук В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [9] Филиппов В. В. Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1994.