Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Янченко, О мере алгебраической независимости значений производных модулярной функции (p -адический случай), *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 431–440

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1517>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:32:09

УДК 511.3

О МЕРЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ПРОИЗВОДНЫХ МОДУЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ (p -АДИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ)

А. Я. Янченко

В работе для значений в алгебраических точках производных модулярной функции Вейля–Лютца $J(q)$ (в p -адическом случае) получена оценка меры взаимной трансцендентности.

Библиография: 11 названий.

Будем обозначать через $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел, p – простое число, Ω_p – полное относительно p -адической нормы $|\cdot|_p$ -алгебраически замкнутое поле. Через $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ обозначается, как обычно, кольцо многочленов от n переменных с коэффициентами из $\mathbb{Z}$. Для каждого многочлена $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ будем обозначать через $\deg P$ его степень по совокупности переменных, через $H(P)$ – максимум модулей коэффициентов. Положим также $t(P) = \deg P + \ln H(P)$.

В ряде работ ([1]–[4] и др.) получены оценки меры трансцендентности и взаимной трансцендентности значений модулярных и связанных с ними эллиптических функций в комплексных точках.

Аналогично комплексному случаю можно рассматривать подобные функции и в p -адическом случае. Пусть $J(q)$ – модулярная p -адическая функция Вейля–Лютца (см. [5]), дифференциальный оператор δ определен равенством $\delta = q \frac{\partial}{\partial q}$.

В 1979 г. Д. Бертран впервые получил оценку меры алгебраической независимости для $\delta J(q)$, $\delta^2 J(q)$; точнее, им была доказана

ТЕОРЕМА 1 [6]. Пусть $q_0 \in \Omega_p$, $0 < |q_0|_p < 1$, $J(q_0) \neq 0, 1728$ алгебраично над $\mathbb{Q}$. Тогда существует действительное $\sigma = \sigma(q_0) > 0$ такое, что для всякого многочлена $P \in \mathbb{Z}[x_1, x_2]$, $P \neq 0$, справедлива оценка

$$|P(\delta J(q_0), \delta^2 J(q_0))|_p > \exp\{-\sigma t^6(P) \ln^{24} t(P)\}.$$

Основой доказательства этой теоремы является метод А. О. Гельфонда 1949 г. [7, гл. 3]. Многомерная техника исключения, разработанная Ю. В. Нестеренко, существенно усиливает этот метод. С помощью этой техники результат теоремы 1 был улучшен [8]. Показатель в правой части был доведен до $t^3(P) \ln^{7.5} t(P)$.

В настоящей работе доказывается усиленная по сравнению с анонсированной в [8] оценка.

ТЕОРЕМА 2. В условиях теоремы 1 существует действительное $\sigma_1 = \sigma_1(q_0) > 0$ такое, что для всякого многочлена $P \in \mathbb{Z}[x_1, x_2]$, $P \neq 0$, справедливо неравенство

$$|P(\delta J(q_0), \delta^2 J(q_0))|_p > \exp\{-\sigma_1 t^3(P) \ln^6 t(P)\}.$$

1. Вспомогательные утверждения. Для каждого $q \in \Omega_p$, $0 < |q|_p < 1$, положим (см. [1]) при $k = 2, 3$

$$E_{2k} = 1 + (-1)^k \frac{4k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{2k-1} \frac{q^n}{1-q^n} \right),$$

$$J(q) = 1728 \left(1 - \frac{E_6^2(q)}{E_4^3(q)} \right)^{-1},$$

где B_k — k -е число Бернулли.

Положим $\Gamma^2(q) = E_4(q)/E_6(q)$. Если через δ обозначен оператор $q \frac{\partial}{\partial q}$, то имеет место равенство (см. [6])

$$\mathbb{Q}(J(q), E_2(q), \Gamma(q)) \equiv \mathbb{Q}(J(q), \delta J(q), \delta^2 J(q)).$$

Фиксируем теперь некоторое $q_0 \in \Omega_p$, $0 < |q_0|_p < 1$, такое, что $J(q_0) \neq 0, 1728$. Положим при $z \in \Omega_p \setminus \{0\}$

$$\Theta(z) = (1 - z^{-1}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q_0^n z)(1 - q_0^n z^{-1}).$$

Обозначим через Δ оператор $\Gamma z \frac{\partial}{\partial z}$ и определим функции $\zeta(z), \varphi(z)$ следующим образом:

$$\zeta(z) = -\frac{\Delta \Theta(z)}{\Theta(z)}, \quad \varphi(z) = -\Delta \zeta(z) + \frac{\Gamma^2 E_2}{12}.$$

Можно показать, что функции $\Theta(z), \Theta(z)\zeta(z), \Theta^2(z)\varphi(z)$ регулярны в $\Omega_p \setminus \{0\}$.

Будем обозначать в дальнейшем при $N \in \mathbb{N}$

$$C_N = \{z \in \Omega_p, |q_0|_p^N \leq |z|_p \leq |q_0|_p^{-N}\},$$

а через γ_i ($i = 1, 2, \dots$) — положительные постоянные, зависящие от q_0 .

ЛЕММА 1.1 (см. [6]). 1. Если $z \neq q_0^n$ ни при каком $n \in \mathbb{Z}$, то

$$(\Delta \varphi(z))^2 = 4\varphi^3(z) + g_2\varphi(z) + g_3,$$

где g_2, g_3 алгебраичны над $\mathbb{Q}(J(q_0))$.

2. Для всякого целого n имеют место равенства

$$\zeta(-q_0^n) = -n\Gamma, \quad \varphi(-q_0^n) = \varphi(-1), \quad \Delta \varphi(-q_0^n) = 0.$$

3. Существует γ_1 такая, что при всяком натуральном M

$$\sup_{z \in C_M} \max\{|\Theta(z)|_p, |\Theta(z)\zeta(z)|_p, |\Theta^2(z)\varphi(z)|_p\} \leq \exp\{\gamma_1 M^2\}.$$

4. Для любого натурального n при всяком $z \in \Omega_p$ с условием $|z + q_0^{-n}| \leq 1$ имеет место оценка $|\Theta(z)|_p \geq 1$.

Справедлива также (см. [6])

ЛЕММА 1.2. *Существует γ_2 такая, что для всяких $s, l \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned}\Delta^s(\varphi^l(z)) &= R_{sl}(\varphi(z), \Delta\varphi(z), g_2, g_3), \\ \Delta^s(\zeta^l(z)) &= Q_{sl}\left(\Gamma(q_0), \frac{E_2(q_0)}{12}, \zeta(z), \varphi(z), \Delta\varphi(z), g_2, g_3\right), \\ R_{sl}, Q_{sl} &\in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_7],\end{aligned}$$

$$\deg R_{sl}, \deg Q_{sl} \leq \gamma_2(s + l + 1), \quad \ln H(R_{sl}), \ln H(Q_{sl}) \leq \gamma_2(s + l) \ln(s + l + 2).$$

В дальнейших рассуждениях потребуются лемма, которая следует из [6, лемма 2, § 3].

ЛЕММА 1.3. *Пусть $L \in \mathbb{N}$. Существует γ_3 такая, что для любого многочлена*

$$P \in \Omega_p[x, y], \quad P = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{L-1} A_{lm} x^l y^m$$

при всех $0 \leq l, m \leq L - 1$ имеет место оценка

$$|A_{lm}|_p \leq \sup_{z \in C_{2L}} |\Theta^{3L}(z) P(\varphi(z), \zeta(z))|_p \exp\{\gamma_3 L^3\}.$$

ЛЕММА 1.4. *Пусть $h(z)$ регулярна в $\Omega_p \setminus \{0\}$ и при некотором $T > 0$ для всех $s = 0, 1, \dots, S$, $n = 0, 1, \dots, N$ имеют место оценки*

$$|\Delta^s h(-q_0^{-n})|_p < \exp\{-T\}.$$

Тогда существуют $\gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ такие, что

1) при любом $N_1 \geq N$

$$\sup_{z \in C_{N_1}} |h(z)|_p \leq \exp\{-\gamma_4 N_1 N S\} \sup_{z \in C_{2N_1}} |h(z)|_p + \exp\{-T + \gamma_5 N_1 N S\};$$

2) при любых $s_1, n_1 \in \mathbb{N}$, $0 \leq n_1 \leq N_1$,

$$|\Delta^{s_1} h(-q^{-n_1})|_p \leq \exp\{\gamma_6 N_1 S_1\} \exp\{-\gamma_4 N_1 N S\} \sup_{z \in C_{2N_1}} |h(z)|_p + \exp\{-T + \gamma_5 N_1 N S\}.$$

Для доказательства леммы достаточно применить к функции $P(z) - h(z)$ (где $P(z) \in \Omega_p[z]$ таков, что $\Delta^s h(-q_0^n) = \Delta^s P(-q_0^{-n})$ при всех s, n из условия леммы) лемму 1 из [9].

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Зафиксируем q_0 , $0 < |q_0|_p < 1$, такое, что $J(q_0)$ алгебраическое, $J(q_0) \neq 0, 1728$. Положим $\xi_1 = \delta J(q_0) p^r$, $\xi_2 = \delta^2 J(q_0) p^r$ (где $\delta = q \frac{\partial}{\partial q}$, r – наименьшее натуральное, при котором $|\xi_1|_p < 1$, $|\xi_2|_p < 1$). Для однородного не-смешанного идеала $\mathfrak{A}$ высоты 2 определим $H(\mathfrak{A})$, $\deg \mathfrak{A}$, $t(\mathfrak{A})$, $|\mathfrak{A}(1, \xi_1, \xi_2)|_p$, как в [10]. Пусть $\wp \in \mathbb{Z}[\theta_0, \theta_1, \theta_2]$ – однородный простой идеал высоты 2. Обозначим [10] через $R_p(n, H)$ множество вычетов по модулю идеала $\wp$ однородных многочленов степени n и высоты H . Далее, для всякого множества B через $|B|$ обозначаем число его элементов.

ЛЕММА 2.1. *Существует γ_8 такая, что при всех натуральных n, H, A с условиями $A \geq 2$, $25(n+1) < \ln(H+1) < t(\wp)$ верна оценка*

$$|R_{\wp}(n, H^A)| \leq (|R_{\wp}(n, H)|)^{\gamma_8 A}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $R_{\wp} \equiv R_{\wp}(n, +\infty)$ – конечнопорожденный (порожден элементами $\theta_0^{n-i-j}\theta_1^i\theta_2^j \bmod \wp$, $0 \leq i+j \leq n$) $\mathbb{Z}$ -модуль. Как всякая абелева группа с конечным числом порождающих элементов, $R_{\wp}(n)$ разлагается в прямую сумму циклических подгрупп ($\mathbb{Z}$ -модулей): $R_{\wp}(n) = B_1 \oplus \dots \oplus B_t$, причем $t \leq s = (n+1)(n+2)/2$. Пусть $f_1, \dots, f_t \in \mathbb{Z}[\theta_0, \theta_1, \theta_2]$ – однородные многочлены такие, что $B_i = \langle f_i \rangle$. Пусть для всех i, j

$$\theta_0^{n-i-j}\theta_1^i\theta_2^j = \left(\sum_{l=1}^t a_{ijl} f_l \right) \bmod \wp \quad (a_{ijl} \in \mathbb{Z}).$$

Тогда для

$$P = \sum_{0 \leq i+j \leq n} h_{ij} \theta_0^{n-i-j} \theta_1^i \theta_2^j$$

имеем

$$P = \left(\sum_{l=1}^t L_l(h) f_l \right) \bmod \wp,$$

где $L_l(h)$ – линейные формы от переменных $h = \{h_{ij}\}$. Определим при каждом $M > 0$ множества

$$\Pi_M = \{h = (h_i) \in \mathbb{Z}^s : |h_i| \leq M\}, \quad I(M) = \{h \in \Pi_M : L_1(h) = \dots = L_t(h) = 0\}.$$

Тогда количество элементов во множестве $R_{\wp}(n, M)$ равно числу различных векторов $\omega(h) = (L_1(h), \dots, L_t(h))$, когда h пробегает все точки из Π_M . Пусть $h_1, h_2 \in \Pi_M$. Если $\omega(h_1) = \omega(h_2)$, то $\omega(h_2 - h_1) = 0$, откуда $h_2 - h_1 \in I(2M)$. Поэтому при каждом фиксированном $h_0 \in \Pi_M$ число точек $h \in \Pi_M$, при которых $\omega(h) = \omega(h_0)$, не больше $|I(2M)|$. Следовательно, имеем оценку снизу

$$|R_{\wp}(n, M)| \geq \frac{|\Pi_M|}{|I(2M)|} = \frac{(2M+1)^s}{|I(2M)|}.$$

С другой стороны, пусть $h_1, \dots, h_N \in \Pi_M$ таковы, что все $\omega(h_i)$ различны и при всяком $h \in \Pi_M$ найдется i , $1 \leq i \leq N$, такое, что $\omega(h) = \omega(h_i)$. Рассмотрим множество E точек вида $g + x$, где g, x пробегает независимо множества соответственно $\{h_1, \dots, h_N\}$ и $I(M)$. Заметим, что если бы $g_1 + x_1 = g_2 + x_2$, то $\omega(g_1) = \omega(g_2)$, и, следовательно, $g_1 = g_2$ и $x_1 = x_2$. Поэтому $|E| = N \cdot |I(M)|$. С другой стороны, $E \subset \Pi_{2M}$, откуда $|E| \leq |\Pi_{2M}| \leq (4M+1)^s$, что дает оценку сверху $N \leq (4M+1)^s / |I(M)|$. Итак, имеем неравенства

$$\frac{(2M+1)^s}{|I(2M)|} \leq |R_{\wp}(n, M)| \leq \frac{(4M+1)^s}{|I(M)|}. \quad (1)$$

Пусть теперь $M > 10H$, $h_1 \in I(2H)$, $g_1 \in I((M-2H)/(4H+1))$. Тогда

$$\omega_1 = (h_1 + (4H+1)g_1) \in I(M).$$

Заметим, что если $h_2 \in I(2H)$, $g_2 \in I((M-2H)/(4H+1))$ таковы, что $h_2 + (4H+1)g_2 = h_1 + (4H+1)g_1$, то $h_2 - h_1 = (4H+1)(g_1 - g_2)$. Но любая, отличная от нуля координата $h_2 - h_1$ не превосходит по абсолютной величине $4H$ (так как $h_1, h_2 \in I(2H)$). Поэтому равенство возможно лишь в случае $h_1 = h_2$, $g_1 = g_2$. Таким образом, получаем взаимнооднозначное соответствие между элементами ω множества G_M – векторами из $I(M)$, представимыми в виде $\omega = h + (4H+1)g$ (где $h \in I(2H)$, $g \in I((M-2H)/(4H+1))$), и элементами (h, g) множества $I(2H) \times I((M-2H)/(4H+1))$. Отсюда

$$|I(M)| \geq |G_M| = |I(2H)| \cdot I\left(\frac{M-2H}{4H+1}\right).$$

Так как $M > 10H$, то при $H \geq 1$ $(M-2H)/(4H+1) > M/(10H)$. Учитывая, что $I(X)$ неубывающая функция переменной X , имеем

$$|I(M)| \geq |I(2H)| \cdot I\left(\frac{M-2H}{4H+1}\right) \geq |I(2H)| \cdot I\left(\frac{M}{10H}\right).$$

Как следствие, при всяком $b \in \mathbb{N}$

$$|I((10H)^b)| \geq |I(2H)|^b. \quad (2)$$

Но тогда с помощью (1), (2) получим

$$\begin{aligned} |R_\varphi(n, H^A)| &\leq |R_\varphi(n, 10^A H^A)| \leq \frac{(4(10H)^A + 1)^s}{|I((10H)^A)|} \leq \frac{(4(10H)^A + 1)^s}{|I(2H)|^A} \\ &\leq 10^{(A+1)s} \cdot \left[\frac{(2H+1)^s}{|I(2H)|} \right]^A \leq 10^{(A+1)s} |R_\varphi(n, H)|^A. \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно предложению 3 из [10] $10^{(A+1)s} \leq |R_\varphi(n, H)|^{(\gamma_8-1)A}$. Подставив эту оценку в (3), получим утверждение леммы.

Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Существует γ_9 , что для всякого однородного простого идеала $\wp \subset \mathbb{Z}[x_0, x_1, x_2]$ высоты 2 из условия $t(\wp) \leq N$ (при некотором $N \in \mathbb{N}$) следует оценка*

$$|\wp(1, \xi_1, \xi_2)|_p \geq \exp\{-\gamma_9 N^{3/2} \ln^{3/2} N\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного. Выберем постоянную $\lambda > 0$ достаточно большой. Тогда существуют сколь угодно большое натуральное M и простой идеал $\wp$, для которого $[\lambda^2 t(\wp)] \leq M-1$ и

$$|\wp(1, \xi_1, \xi_2)|_p < \exp\{-\lambda^6 M^{3/2} \ln^{3/2} M\}.$$

Положим $N = [M^{1/2} \ln^{1/2} M]$, $S = [\lambda N]$, $K = [\lambda^{2/3} N]$, $X = [\lambda^{4/3} N]$.

ЛЕММА 2.3. *Существуют многочлены $C_{k_1 k_2} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2]$ ($0 \leq k_1, k_2 \leq K$) такие, что*

- 1) $\deg_{x_i} C_{k_1 k_2} \leq X$ ($i = 1, 2$), $\ln H(C_{k_1 k_2}) \leq X \ln X$;
- 2) *не все многочлены $x_0^{2X} C_{k_1 k_2}(x_1/x_0, x_2/x_0)$ лежат в $\wp$;*
- 3) *для функции*

$$f(z) = \sum_{k_1, k_2=0}^K C_{k_1 k_2}(\xi_1, \xi_2) \varphi^{k_1}(z) \zeta^{k_2}(z)$$

при всех $0 \leq s \leq S$, $0 \leq n \leq N$ справедливы оценки

$$|\Delta^s f(-q^{-n})_p| \leq \exp\{\gamma_{10}(K+S)\} \cdot |\wp(1, \xi_1, \xi_2)|_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{C_{k_1 k_2}(x_1, x_2)\}$ – произвольный набор многочленов, удовлетворяющих условию 1) леммы 2.3.

Используя леммы 1.1, 1.2, найдем, что

$$\Delta^s f(-q^{-n}) = (T_0(\xi_1, \xi_2))^{-\gamma_{11}(K+S)} \sum_{i=1}^{\gamma_{12}} P_{isn}(\xi_1, \xi_2) \omega^i,$$

причем ω алгебраично над $\mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2)$,

$$\deg P_{isn} \leq \gamma_{13}X, \quad \ln H(P_{isn}) \leq \gamma_{14}X \ln X.$$

Представим P_{isn} в виде

$$\sum_{u,v=0}^{\gamma_{13}} P_{isnuv}(z_1, z_2) z_1^{ux} z_2^{vx}.$$

Тогда $\deg P_{isnuv} \leq X$. Положим $g = \gamma_{12}(\gamma_{13} + 1)(S + 1)(N + 1)$. Рассуждая так же, как в [10], рассмотрим линейное отображение $\varphi: R_{\wp}^{(K+1)^2}(2X, X) \rightarrow R_{\wp}^g(2X, X^{\gamma_{14}X})$, при котором любому вектору с компонентами $\{x_0^{2X} C_{k_1 k_2}(x_1/x_0, x_2/x_0) \bmod \wp\}$ сопоставляется вектор с компонентами $\{x_0^{2X} P_{isnuv}(x_1/x_0, x_2/x_0) \bmod \wp\}$. (Под $R_{\wp}^N(A, B)$ здесь понимается множество $\{(x_1, \dots, x_N)\}$, где $x_i \in R_{\wp}(A, B)$.)

Пусть $|R_{\wp}(2X, X^X)| = d$, тогда по лемме 2.1 $|R_{\wp}(2X, X^{\gamma_{14}X})| \leq d^{\gamma_{15}}$, откуда $|R_{\wp}^{(K+1)^2}(2X, X^X)| = d^{(K+1)^2}$, $|R_{\wp}^g(2X, X^{\gamma_{14}X})| \leq d^{\gamma_{15}g}$. Так как $(K+1)^2 > \lambda^{1/2}SN$, то найдутся два различных элемента v_1, v_2 из $R_{\wp}^{(K+1)^2}(2X, X^X)$, образы которых в $R_{\wp}^g(2X, X^{\gamma_{14}X})$ одинаковы. Пусть $\omega = v_2 - v_1 = \{x_0^{\deg C_{k_1 k_2}} C_{k_1 k_2}(x_1/x_0, x_2/x_0) \bmod \wp\}$, тогда $\varphi(\omega) = (y_1(x_0, x_1, x_2), \dots, y_g(x_0, x_1, x_2))$, причем все $y_i(x_0, x_1, x_2) \in \wp$, и, следовательно, $|y_i(1, \xi_1, \xi_2)|_p \leq |\wp(1, \xi_1, \xi_2)|_p$. Но тогда для $f(z)$, соответствующей ω , при всех s, n из условия леммы имеем

$$|\Delta^s f(-q^{-n})|_p \leq |T_0(\xi_1, \xi_2)|_p^{-\gamma_{11}(K+S)} \cdot |\wp(1, \xi_1, \xi_2)|_p \leq \exp\{\gamma_{10}(K+S)\} \cdot |\wp(1, \xi_1, \xi_2)|_p,$$

что завершает доказательство леммы 2.3.

Применим теперь к функции $h(z) = \Theta^{3K}(z)f(z)$ (где $f(z)$ построена по лемме 2.3) лемму 1.4 (положив $N_1 = N$, $S_1 = [\lambda^{2.5}N]$, $T = \lambda^6 M^{3/2} \ln^{3/2} M$). Получим, что для всех $0 \leq n \leq N$ и $0 \leq s \leq \lambda^{2.5}N$ справедливы оценки

$$|\Delta^s h(-q^{-n})|_p < \exp\{-\gamma_{16} \lambda M^{3/2} \ln^{3/2} M\}.$$

Отсюда (индукцией по s) при тех же s, n имеем

$$|\Delta^s f(-q^{-n})|_p < \exp\{-\gamma_{17} \lambda M^{3/2} \ln^{3/2} M\}.$$

Предположим, что найдутся s_0, n_0 из этого диапазона такие, что для

$$h_1 = (T_0(\xi_1, \xi_2))^{\gamma_{11}(K+S)} \Delta^{s_0} f(-q^{-n_0})$$

справедлива двусторонняя оценка

$$\exp\{-\lambda^5 M^{3/2} \ln^{3/2} M\} < |h_1|_p < \exp\{-\gamma_{17} \lambda M^{3/2} \ln^{3/2} M\}.$$

Отметим, что $h_1 \in \mathbb{Z}[\xi_1, \xi_2, \omega]$. Избавившись от ω способом, предложенным Г.В. Чудновским (см. [11]), получим многочлен $P_{s_0 n_0}(x, y)$, $\deg P_{s_0 n_0} \leq \gamma_{18} \lambda^2 M^{1/2} \ln^{1/2} M$,

$$\begin{aligned} \ln H(P_{s_0 n_0}) &\leq \gamma_{19} \lambda^2 M^{1/2} \ln^{3/2} M, \\ \exp\{-\gamma_{21} \lambda^5 M^{3/2} \ln^{3/2} M\} &\leq |P_{s_0 n_0}(\xi_1, \xi_2)|_p \leq \exp\{-\gamma_{20} \lambda M^{3/2} \ln^{3/2} M\}. \end{aligned}$$

Положим $B_{s_0 n_0}(x_0, x_1, x_2) = x_0^{\deg P_{s_0 n_0}} \cdot P_{s_0 n_0}(x_1/x_0, x_2/x_0)$. Если бы $B_{s_0 n_0} \notin \wp$, то согласно лемме 5 из [10] имели бы

$$\begin{aligned} \max\{|B_{s_0 n_0}(1, \xi_1, \xi_2)|_p, |\wp(1, \xi_1, \xi_2)|_p\} &\geq \exp\{-4t(\wp)t(B_{s_0 n_0})\} \\ &\geq \exp\{-\gamma_{22} \lambda^{1/2} M^{3/2} \ln^{3/2} M\}, \end{aligned}$$

что противоречит оценкам сверху. Если же $B_{s_0 n_0} \in \wp$, то

$$|B_{s_0 n_0}(1, \xi_1, \xi_2)|_p \leq \exp\{-\lambda^6 M^{3/2} \ln^{3/2} M\},$$

что противоречит оценке снизу. Поэтому для всех $0 \leq n \leq N$, $0 \leq s \leq \lambda^{5/2}N$ справедливы неравенства

$$|\Delta^s f(-q^{-n}) \cdot (T_0(\xi_1, \xi_2))^{\gamma_{10}(K+S)}|_p \leq \exp\{-\lambda^5 M^{3/2} \ln^{3/2} M\},$$

откуда при тех же s, n $|\Delta^s f(-q^{-n})|_p \leq \exp\{-\frac{1}{2} \lambda^5 M^{3/2} \ln^{3/2} M\}$. Но тогда, применив лемму 1.4 ($N_1 = \lambda^{3/4}N$, $S = \lambda^{5/2}N$, $T = \frac{1}{2} \lambda^5 M^{3/2} \ln^{3/2} M$) и лемму 1.3 (с $L = K$), получим для всех $0 \leq k_1, k_2 \leq K$ оценки

$$|C_{k_1 k_2}(\xi_1, \xi_2)|_p \leq \exp\{-\gamma_{23} \lambda^{3.25} M^{3/2} \ln^{3/2} M\}.$$

Но тогда (по лемме 5 из [9]) все $C_{k_1 k_2} \in \wp$, что противоречит их выбору (лемма 2.3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Для всякого неприводимого многочлена $P \neq 0$, $P \in \mathbb{Z}[x_1, x_2]$, справедлива оценка

$$|P(\xi_1, \xi_2)|_p > \exp\{-\gamma_{24} t^3(P) \ln^6 t(P)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного. Пусть $\lambda > 0$ – достаточно большая постоянная. Тогда существуют сколь угодно большое $M > 0$ и неприводимый многочлен $P \in \mathbb{Z}[x_1, x_2]$ такие, что $t(P) \leq \lambda^{-2} M$ и

$$|P(\xi_1, \xi_2)|_p \leq \exp\{-\lambda^3 M^3 \ln^6 M\}. \quad (4)$$

Зафиксируем достаточно большое M . Положим $X = [\lambda^{5/2} M \ln^2 M]$, $S = [\lambda M \ln^2 M]$, $N = [M \ln^2 M]$, $K = [\lambda^{2/3} M \ln^2 M]$. Построим, используя принцип Дирихле, функцию

$$f(z) = \sum_{x_1, x_2=0}^X \sum_{k_1, k_2=0}^{K-1} C_{k_1 k_2 x_1 x_2} \xi_1^{x_1} \xi_2^{k_2} \varphi^{k_1}(z) \zeta^{k_2}(z)$$

так, что

- 1) $\Delta^s f(-q^{-n}) = 0$, $0 \leq n \leq N$, $0 \leq s \leq S$;
- 2) $C_{k_1 k_2 x_1 x_2} \in \mathbb{Z}$, $\ln |C_{k_1 k_2 x_1 x_2}| \leq \lambda^{-1/6} X \ln X$.

Для этого рассматриваем $\{\Delta^s f(-q^{-n}) = 0\}$ как систему линейных однородных уравнений с неизвестными $\{C_{k_1 k_2 x_1 x_2}\}$. Тогда уравнений меньше, чем $\gamma_{25} S N (X + K)^2 \leq 4\gamma_{25} \lambda^6 M^4 \ln^8 M$; неизвестных больше, чем $X^2 K^2 \geq \frac{1}{16} \lambda^{6.3} M^4 \ln^8 M$. Без ограничения общности можно считать, что $\{C_{k_1 k_2}(z_1, z_2)\}$ взаимно просты в совокупности. Если это не так, то можно сократить на их общий множитель, при этом оценка коэффициентов примет вид $\ln |C_{k_1 k_2 x_1 x_2}| \leq X \ln X$. Применим, далее, к функции $h(z) = \Theta^{3K}(z) f(z)$ лемму 1.4 (взяв $N_1 = 2N$, $S_1 = \lambda^{5/2} N$, $T = +\infty$).

Тогда для всех $0 \leq n \leq N$, $0 \leq s \leq \lambda^{5/2} N$ верна оценка

$$|\Delta^s h(-q^{-n})|_p \leq \exp\{-2\gamma_{26} \lambda N^3\}.$$

Отсюда (индукцией по s) при тех же s, n имеем

$$|\Delta^s f(-q^{-n})|_p \leq \exp\{-\gamma_{26} \lambda N^3\}.$$

Если бы существовали числа r, t , $0 \leq r \leq N$, $0 \leq t \leq \lambda^{5/2} N$, такие, что

$$|\Delta^r f(-q^{-t})|_p \geq \exp\{-\lambda^{2.75} N^3\},$$

то (так же, как и выше, применяя способ Г. В. Чудновского) смогли бы построить многочлен $R \in \mathbb{Z}[\omega_1, \omega_2]$, $t(R) \leq \gamma_{27} \lambda^{2.5} N \ln M$,

$$\exp\{-\gamma_{29} \lambda^{2.75} N^3\} \leq |R(\xi_1, \xi_2)|_p \leq \exp\{-\gamma_{28} \lambda N^3\}. \quad (5)$$

В силу оценок (4), (5) и неприводимости многочлена P получаем, что P, R взаимно просты. Тогда для идеала

$$J = \left(x_0^{\deg R} R\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right), x_0^{\deg P} P\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \right)$$

имеем оценку

$$|J(1, \xi_1, \xi_2)|_p \leq \exp\{-\gamma_{30}\lambda N^3\}.$$

По лемме из [10] $t(J) \leq \gamma_{31}\lambda^{1/2}M^2\ln^3 M$, поэтому верна оценка

$$|J(1, \xi_1, \xi_2)|_p \leq \exp\{-\gamma_{32}\lambda^{1/4}t^{3/2}(J)\ln^{3/2}t(J)\}.$$

Пусть $J = J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_s \cap J_{s+1} \cap \dots \cap J_t$ – разложение в пересечение примарных с соответствующими простыми $\wp_j$ и кратностями k_j , $J_i \cap \mathbb{Z} = (0)$, $i = 1, \dots, s$, $J_{s+1} \cap \dots \cap J_t = (b)$. Тогда $b \cdot \wp_1^{k_1} \dots \wp_s^{k_s} \subset J$. Следовательно,

$$|J(1, \xi_1, \xi_2)|_p \geq |b|_p \cdot |\wp_1(1, \xi_1, \xi_2)|_p^{k_1} \dots |\wp_s(1, \xi_1, \xi_2)|_p^{k_s}.$$

Отсюда, используя [10, лемма 3], найдем простой идеал $\wp$ с оценкой

$$|\wp(1, \xi_1, \xi_2)|_p \leq \exp\{-\gamma_{33}\lambda^{1/4}t^{3/2}(\wp)\ln^{3/2}t(\wp)\}.$$

При достаточно большом λ эта оценка противоречит предложению.

Итак, для всех целых n, s , $0 \leq n \leq N$, $0 \leq s \leq \lambda^{2.5}N$, справедливы неравенства

$$|\Delta^s f(-q^{-n})|_p \leq \exp\{-\lambda^{2.75}N^3\}.$$

Но тогда, применив лемму 1.4 (с $h(z) = \Theta^{3K}(z)f(z)$, $N_1 = \lambda^{0.75}N$, $S = \lambda^{1.9}N$, $T = \lambda^{2.75}N^3$) и лемму 1.3 ($L = K$), имеем оценку коэффициентов функции

$$|C_{k_1 k_2}(\xi_1, \xi_2)|_p \leq \exp\{-\lambda^{2.6}N^3\}. \quad (6)$$

Так как $C_{k_1 k_2}(\omega_1, \omega_2)$ в совокупности взаимно просты, то найдется многочлен $C_{ml}(\omega_1, \omega_2)$, взаимно простой с $P(\omega_1, \omega_2)$; тогда

$$J = \left(x_0^{\deg C_{ml}} C_{ml} \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0} \right), x_0^{\deg P} P \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0} \right) \right)$$

– несмешанный однородный идеал высоты 2. Из оценок (4), (6) и того, что $t(P) \leq \lambda^{-2}M$, $t(C_{ml}) \leq \lambda^{2.5}M\ln^3 M$ следует

$$|J(1, \xi_1, \xi_2)|_p \leq \exp\{-\lambda^{1.8}t^{3/2}(J)\ln^{3/2}t(J)\}.$$

Рассуждая, далее, как и выше, найдем простой несмешанный идеал $\wp$, для которого имеет место оценка

$$|\wp(1, \xi_1, \xi_2)|_p \leq \exp\{-\lambda^{1.7}t^{3/2}(\wp)\ln^{3/2}(\wp)\},$$

а это опять-таки противоречит утверждению предложения 2.2.

Получившееся противоречие завершает доказательство.

Теорема 2 теперь получается из предложения 2.4 с помощью леммы А. О. Гельфонда [7, гл. 3, § 4, лемма 6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Chudnovsky G. V. Contributions to theory of transcendental numbers. Providence: AMS, 1984.
- [2] Jabbouri E. M. Sur un critere pour l'indpendance algebrique de P. Philippon // Approximations diophantiennes et nombres transcendants / ed. P. Philippon. Lumini: Walter de Gruyter, 1992. P. 195–202.
- [3] Philibert G. Une mesure d'indpendance algebrique // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. 1988. V. 38. № 3. P. 85–103.
- [4] Toyoda M., Yasuda T. On the algebraic indpendance of certain numbers connected with the exponential and elliptic functions // Tokyo J. Math. 1986. V. 9. № 1. P. 29–40.
- [5] Bertrand D. Modulare functions and algebraic indpendance // p -adic analyses. Proc. Conf. Nijmegen, 1978.
- [6] Bertrand D. Series d'Eisenstein et transendanse // Bull. Soc. Math. France. 1976. V. 104. № 3. P. 309–321.
- [7] Гельфонд А. О. Трансцендентные и алгебраические числа. М.: Гостехиздат, 1952.
- [8] Янченко А. Я. Оценка меры взаимной трансцендентности некоторых значений p -адической модулярной функции // Теория чисел и ее приложения. Тезисы докл. Тбилиси, 1985.
- [9] Нестеренко Ю. В. О диофантовых приближениях в поле p -адических чисел // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 5. С. 653–662.
- [10] Нестеренко Ю. В. Оценка характеристической функции простого идеала // Матем. сб. 1984. Т. 123(165). № 1. С. 11–34.
- [11] Чудновский Г. В. Алгебраическая независимость некоторых значений экспоненциальной функции // Матем. заметки. 1974. Т. 15. № 4. С. 661–672.