Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. О. Банах, Топологическая классификация пространств вероятностных мер на проективных пространствах, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 441–444

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1518>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 11:30:21

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР НА ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Т. О. Банах

Проблема изучения топологии пространства $P_\beta(X)$ вероятностных мер с компактными носителями для некомпактных пространств X была поставлена Федорчуком в [1]. Напомним, что для тихоновского пространства X

$$P_\beta(X) = \{\mu \in P(\beta X) \mid \text{supp}(\mu) \subset X\} \subset P(\beta X),$$

где $P(\beta X)$ – пространство вероятностных мер на стоун-чеховской компактификации βX пространства X . Хорошо известно, что топология пространства $P_\beta(X)$ не зависит от компактификации X , т.е. для любой компактификации cX пространства X подмножество $P(X) = \{\mu \in P(cX) \mid \text{supp}(\mu) \subset X\} \subset P(cX)$ естественно гомеоморфно $P_\beta(X)$ [2].

В [3] автором совместно с Р. Коти была получена полная топологическая классификация пар вида $(P(K), P(X))$, где X – всюду плотное коаналитическое подмножество метрического компакта K . В данной заметке мы продолжим эти исследования и при некоторых теоретико-множественных предположениях получим полную топологическую классификацию пар $(P(K), P(X))$, где X – всюду плотное проективное подмножество в K .

Напомним определение проективных классов $\mathcal{P}_n$ [4]: $\mathcal{P}_0$ – это класс абсолютных борелевских пространств (в данной заметке все рассматриваемые пространства метрические и сепарабельные, все отображения непрерывны). Высшие проективные классы $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, определяются индуктивно: $\mathcal{P}_{2n-1}$ есть класс всех непрерывных образов пространств класса $\mathcal{P}_{2n-2}$, и $\mathcal{P}_{2n}$ содержит дополнения (в польских пространствах) к пространствам из класса $\mathcal{P}_{2n-1}$. Пространства из класса

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$$

называются *проективными*. Отметим, что

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{2n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{2n-1}.$$

Мы будем называть пространство X *$\mathcal{C}$ -универсальным* (соответственно *$\mathcal{C}$ -предуниверсальным*), где $\mathcal{C}$ – некоторый класс пространств, если для любого $C \in \mathcal{C}$ существует

замкнутое вложение (соответственно совершенное отображение) $f: C \rightarrow X$. Через $\mathcal{C}(0)$ мы обозначаем подкласс $\mathcal{C}$, состоящий из нульмерных пространств. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ в [5] построено подмножество $\Pi'_n \subset Q$ гильбертова куба $Q = [-1, 1]^\omega$, являющееся $\mathcal{P}_n$ -универсальным пространством класса $\mathcal{P}_n$.

Основным результатом данной заметки является

ТЕОРЕМА 1. Пусть K – метрический компакт и $X \subset K$ – его всюду плотное подмножество класса $\mathcal{P}_{2n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Если пространство X $\mathcal{P}_{2n-1}(0)$ -предуниверсально, то пара $(P(K), P(X))$ гомеоморфна паре (Q, Π'_{2n+2}) .

$\mathcal{P}_{2n-1}(0)$ -предуниверсальность проективных пространств тесно связана с детерминированностью класса $\mathcal{P}$ (см. определение в [6, 38.D]), которая, как оказалось, не зависит от ZFC-системы аксиом теории множеств [6, 26.B]. В лемме 5 мы покажем, что из детерминированности класса $\mathcal{P}$ следует $\mathcal{P}_{2n-1}(0)$ -предуниверсальность любого пространства $X \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{2n}$. Поскольку $P_\beta(X) \in \mathcal{P}_{2n}$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathcal{P}_{2n}$ (см. [3, лемма 1]), из леммы 5 и теоремы 1 вытекает

ТЕОРЕМА 2. Пара $(P(K), P(X))$ в предположении детерминированности класса $\mathcal{P}$ гомеоморфна (Q, Π'_{2n+2}) тогда и только тогда, когда X – всюду плотное подпространство класса $\mathcal{P}_{2n+2} \setminus \mathcal{P}_{2n}$ в метрическом компакте K .

Напомним, что $\sigma = \{(t_i) \in Q \mid t_i = 0 \text{ почти для всех индексов } i\}$ и $\Sigma = \{(t_i) \in Q \mid \sup_i |t_i| < 1\}$ – радиальная внутренность гильбертова куба $Q = [-1, 1]^\omega$.

Комбинируя теорему 2 с теоремой и следствием из [3], мы получаем классификационные теоремы.

ТЕОРЕМА 3. В предположении детерминированности класса $\mathcal{P}$ проективных пространств пары (Q, σ) , (Q, Σ) , $(Q^\omega, \Sigma^\omega)$ и (Q, Π'_{2n}) , $n \in \mathbb{N}$, исчерпывают все возможные топологические типы пар $(P(K), P(X))$, где X – собственное всюду плотное проективное подмножество метрического компакта K .

ТЕОРЕМА 4. В предположении детерминированности класса $\mathcal{P}$ пространств $Q, \sigma, \Sigma, \Sigma^\omega$ и Π'_{2n} , $n \in \mathbb{N}$, исчерпывают все возможные топологические типы пространств $P_\beta(X)$ вероятностных мер с компактными носителями на бесконечных проективных пространствах X .

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Через $\mathcal{K}$ мы обозначаем класс метрических компактов. Для класса пространств $\mathcal{C}$ положим $(\mathcal{K}, \mathcal{C}) = \{(K, C) \mid C \ni C \subset K \in \mathcal{K}\}$. Пару (X, Y) мы называем $(\mathcal{K}, \mathcal{C})$ -предуниверсальной, если для любой пары $(K, C) \in (\mathcal{K}, \mathcal{C})$ существует отображение $\xi: K \rightarrow X$ с $\xi^{-1}(Y) = C$.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие четыре леммы, первая из которых объединяет в себе теорему 0 и леммы 1, 3, 4 из [3].

ЛЕММА 1. Пусть K – компакт и X – его всюду плотное подпространство класса $\mathcal{P}_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Если существует такое замкнутое подмножество $D \subset K$, что дополнение $X \setminus D$ не дискретно и пара $(P(D), P(D \cap X))$ $(\mathcal{K}, \mathcal{P}_{2n})$ -предуниверсальна, то пара $(P(K), P(X))$ гомеоморфна паре (Q, Π'_{2n}) .

ЛЕММА 2. Если X – $\mathcal{P}_{2n-1}(0)$ -предуниверсальное пространство, то для любого компакта $K \supset X$ пара (K, X) $(\mathcal{K}(0), \mathcal{P}_{2n-1}(0))$ -предуниверсальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(A, B) \in (\mathcal{K}(0), \mathcal{P}_{2n-1}(0))$ и $\mathbb{Q} \subset 2^\omega$ – любое счетное всюду плотное подмножество канторовского кирпича 2^ω . Рассмотрим подпространство $B \times 2^\omega \cup A \times \mathbb{Q} \subset A \times 2^\omega$. Согласно [6, 37.1] $B \times 2^\omega \cup A \times \mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{2n-1}(0)$. Поскольку пространство $X \in \mathcal{P}_{2n-1}(0)$ -предуниверсально, то существует совершенное отображение $f: B \times 2^\omega \cup A \times \mathbb{Q} \rightarrow X$. По теореме Лаврентьева отображение f продолжается до отображения $\bar{f}: G \rightarrow K$ некоторого G_δ -множества $G \subset A \times 2^\omega$, содержащего $B \times 2^\omega \cup A \times \mathbb{Q}$. Причем поскольку $B \times 2^\omega \cup A \times \mathbb{Q}$ всюду плотно в $A \times 2^\omega$ и f совершенно, то $\bar{f}^{-1}(X) = B \times 2^\omega \cup A \times \mathbb{Q}$ [7, 3.7.15]. Множество $A \times 2^\omega \setminus G$ σ -компактно и его проекция $\text{pr}(A \times 2^\omega \setminus G)$ на 2^ω тоже σ -компактна и лежит в $2^\omega \setminus \mathbb{Q}$. Поскольку дополнение $2^\omega \setminus \mathbb{Q}$ не σ -компактно, существует $t \in 2^\omega \setminus (\mathbb{Q} \cup \text{pr}(A \times 2^\omega \setminus G))$. Тогда $A \times \{t\} \subset G$. Определим отображение $g: A \rightarrow K$ формулой $g(a) = \bar{f}(a, t)$, $a \in A$, и отметим, что $g^{-1}(X) = B$, т.е. пара (K, X) $(\mathcal{K}(0), \mathcal{P}_{2n-1}(0))$ -предуниверсальна.

ЛЕММА 3. Если $X \in \mathcal{P}_{2n-1}(0)$ -предуниверсальное пространство, то существует замкнутое $\mathcal{P}_{2n-1}(0)$ -предуниверсальное подпространство $D \subset X$, дополнение которого не дискретно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [6, 37.7] существует $\mathcal{P}_{2n-1}(0)$ -предуниверсальное пространство $Y \in \mathcal{P}_{2n-1}(0)$. По [6, 37.1] $Y^\omega \in \mathcal{P}_{2n-1}(0)$, и поскольку пространство $X \in \mathcal{P}_{2n-1}(0)$ -предуниверсально, существует совершенное отображение $\xi: Y^\omega \rightarrow X$. Отметим, что пространство X не σ -компактно (в противном случае пространство Y^ω как совершенный прообраз X тоже было бы σ -компактным), следовательно, существуют две различные предельные точки $x_1, x_2 \in X$. Пусть U_1, U_2 – открытые окрестности точек x_1, x_2 , замыкания $\bar{U}_1, \bar{U}_2 \subset X$ которых имеют пустое пересечение. Поскольку $X = X \setminus \bar{U}_1 \cup X \setminus \bar{U}_2$, одно из множеств $\xi^{-1}(X \setminus \bar{U}_1), \xi^{-1}(X \setminus \bar{U}_2)$ не пусто. Предположим для определенности, что $\xi^{-1}(X \setminus \bar{U}_2) \neq \emptyset$. Поскольку $\xi^{-1}(X \setminus \bar{U}_1)$ – непустое открытое подмножество в Y^ω , из определения топологии тихоновского произведения на Y^ω следует существование замкнутого вложения $e: Y \rightarrow Y^\omega$ с $e(Y) \subset \xi^{-1}(X \setminus \bar{U}_1)$. Тогда отображение $\xi \circ e: Y \rightarrow X \setminus U_1$ совершенно, откуда следует $\mathcal{P}_{2n-1}(0)$ -предуниверсальность пространства $X \setminus U_1$ (напомним, что $Y \in \mathcal{P}_{2n-1}(0)$ -предуниверсальное пространство). Замкнутое множество $X \setminus U_1 \subset X$ – искомого, поскольку его дополнение в X не дискретно.

ЛЕММА 4. Если $(K, X) \in (\mathcal{K}(0), \mathcal{P}_{2n-1}(0))$ -предуниверсальная пара, где K – компакт, то пара $(P(K), P(X)) \in (\mathcal{K}, \mathcal{P}_{2n+2})$ -предуниверсальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем пару $(A, B) \in (\mathcal{K}, \mathcal{P}_{2n+2})$. Тогда $A \setminus B \in \mathcal{P}_{2n+1}$ и существует такое подмножество $P \subset A \times 2^\omega$ класса $\mathcal{P}_{2n}$, что $A \setminus B = \text{pr}_A(P)$, где $\text{pr}_A: A \times 2^\omega \rightarrow A$ – естественная проекция. Из леммы Милютина [8, VIII] следует существование отображения $f: D \rightarrow A$ нульмерного компакта D на A , для которого отображение $P(f): P(D) \rightarrow P(A)$ обратимо, т.е. допускает сечение $s: P(A) \rightarrow P(D)$. Очевидно, что $D \times 2^\omega$ – нульмерный компакт и $P' = (f \times \text{id})^{-1}(P) \in \mathcal{P}_{2n}(0)$. Из $(\mathcal{K}(0), \mathcal{P}_{2n-1}(0))$ -предуниверсальности пары (K, X) вытекает существование отображения $\xi: D \times 2^\omega \rightarrow K$ с $\xi^{-1}(X) = D \times 2^\omega \setminus P'$. Пусть $\mu_0 \in P(2^\omega)$ – мера с $\text{supp}(\mu_0) = 2^\omega$. Положим $\psi(a) = P(\xi)(s(a) \otimes \mu_0)$ для $a \in A$ (мы отождествляем пространство A с подмножеством мер Дирака в $P(A)$, а через $\otimes$ обозначаем тензорное произведение мер). Мы утверждаем, что $\psi: A \rightarrow P(K)$ – отображение с $\psi^{-1}(P(X)) = B$. Поскольку $P(\xi)^{-1}(P(X)) = P(D \times 2^\omega \setminus P')$, то для доказательства последнего равенства достаточно показать, что $\varphi^{-1}(P(D \times 2^\omega \setminus P')) = B$, где $\varphi: A \rightarrow P(D \times 2^\omega)$ – отображение,

определенное формулой $\varphi(a) = s(a) \otimes \mu_0$, $a \in A$. Отметим, что $\text{supp}(s(a)) \subset f^{-1}(a)$. Если $a \in B$ тогда $a \notin A \setminus B = \text{pr}_A(P)$, откуда $\{a\} \times 2^\omega \cap P = \emptyset$ и $f^{-1}(a) \times 2^\omega \cap P' = \emptyset$. Поскольку $\text{supp}(\varphi(a)) = \text{supp}(s(a)) \times 2^\omega$, то мы получаем, что $\varphi(a) \in P(D \times 2^\omega \setminus P')$. Если же $a \notin B$, то $\{a\} \times 2^\omega \cap P \neq \emptyset$, откуда $\text{supp}(\varphi(a)) \cap P' = \text{supp}(s(a)) \times 2^\omega \cap P' \neq \emptyset$, т.е. $\varphi(a) \notin P(D \times 2^\omega \setminus P')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть K – метрический компакт и $X \subset K$ – его всюду плотное $\mathcal{P}_{2n-1}(0)$ -предуниверсальное подпространство класса $\mathcal{P}_{2n+2}$. Согласно лемме 3 существует замкнутое $\mathcal{P}_{2n-1}(0)$ -предуниверсальное подпространство $D \subset X$, дополнение $X \setminus D$ которого недискретно. Пусть $\overline{D}$ – замыкание D в K . Отметим, что $\overline{D} \cap X = D$. По лемме 2 пара $(\overline{D}, D)$ $(\mathcal{K}(0), \mathcal{P}_{2n-1}(0))$ -предуниверсальна, и по лемме 4 пара $(P(\overline{D}), P(D)) = (P(\overline{D}), P(\overline{D} \cap X))$ $(\mathcal{K}, \mathcal{P}_{2n+2})$ -предуниверсальна. Тогда согласно лемме 1 пара $(P(K), P(X))$ гомеоморфна паре (Q, P'_{2n+2}) .

ЛЕММА 5. В предположении детерминированности класса $\mathcal{P}$ каждое пространство $X \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{2n}$ является $\mathcal{P}_{2n-1}(0)$ -предуниверсальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим детерминированность класса $\mathcal{P}$ и зафиксируем пространства $X \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{2n}$ и $A \in \mathcal{P}_{2n-1}(0)$. Вложим пространство X в гильбертов куб Q , а пространство A в канторовский куб 2^ω . Пусть $\alpha: 2^\omega \rightarrow Q$ – любое сюръективное отображение. Согласно [6, 37.1] $\alpha^{-1}(X) \in \mathcal{P}$. Более того, $\alpha^{-1}(X) \notin \mathcal{P}_{2n}$ (предполагая, что $\alpha^{-1}(X) \in \mathcal{P}_{2n}$, мы получим, что $2^\omega \setminus \alpha^{-1}(X) \in \mathcal{P}_{2n-1}$, и, следовательно, $Q \setminus X = \alpha(2^\omega \setminus \alpha^{-1}(X)) \in \mathcal{P}_{2n-1}$, откуда $X \in \mathcal{P}_{2n}$ – противоречие). Поскольку $\mathcal{P}_{2n-1} \subset \mathcal{P}_{2n+2}$ и класс $\mathcal{P}$ детерминирован, из леммы Ваджа [9] вытекает следующая альтернатива: либо существует отображение $\xi: 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ с $\xi^{-1}(\alpha^{-1}(X)) = A$, либо существует отображение $\eta: 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ с $\eta^{-1}(2^\omega \setminus A) = \alpha^{-1}(X)$. Отметим, что второй вариант невозможен, поскольку $2^\omega \setminus A \in \mathcal{P}_{2n}$, и, следовательно, $\alpha^{-1}(X) = \eta^{-1}(2^\omega \setminus A) \in \mathcal{P}_{2n}$, что противоречит $\alpha^{-1}(X) \notin \mathcal{P}_{2n}$. Остающийся вариант гарантирует существование отображения $\xi: 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ с $\xi^{-1}(\alpha^{-1}(X)) = A$. Легко видеть, что отображение $\alpha \circ \xi|_A: A \rightarrow X$ совершенно. Таким образом, пространство $X \in \mathcal{P}_{2n-1}(0)$ -предуниверсально.

Львовский университет им. И. Франко
E-mail: topos@franko.lviv.ua

Поступило
09.11.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федорчук В. В. // УМН. 1991. Т. 46. № 1. С. 41–80.
2. Чигогидзе А. Ч. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1984. № 6. С. 23–26.
3. Банах Т. О., Коти Р. // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 1. С. 10–19.
4. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
5. Cauty R. // Fund. Math. 1993. V. 143. P. 203–206.
6. Kechris A. S. Classical descriptive set theory. Berlin: Springer Verlag, 1995.
7. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
8. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
9. Wesep R. van. Wadge degrees and descriptive set theory. Cabal Seminar 76–77 // Lecture Notes in Math / ed. A. S. Kechris, Y. N. Mostovakis. V. 689. Berlin: Springer Verlag. P. 151–170.