Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Дерябин, О полиномиальных интегралах динамических систем и редукции Лакса, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 445–446

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1519>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:10:05

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И РЕДУКЦИИ ЛАКСА

М. В. Дерябин

Вопрос о существовании первых интегралов уравнений классической механики в виде полиномов по скоростям изучается уже давно. Это связано с тем, что все известные первые интегралы либо полиномиальные, либо являются функциями от полиномов. Известны условия существования полиномиальных интегралов первой и второй степени [1], [2]: все линейные интегралы нётеровы, а существование квадратичных интегралов связано с возможностью разделения переменных.

В работе [3] рассматривался вопрос о наличии полиномиального интеграла у системы с полутора степенями свободы

$$\ddot{x} = -V_x, \quad (1)$$

где потенциал $V(x, t)$ 2π -периодичен по x . Была получена система уравнений, которой должны удовлетворять коэффициенты полиномиального интеграла и потенциал. Оказывается, что если первый интеграл уравнения (1) имеет вид

$$a_0(x, t) + a_1(x, t)\dot{x} + \cdots + a_n(x, t)\dot{x}^n,$$

где коэффициенты a_k ($0 \leq k \leq n$) 2π -периодичны по x , то указанная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
nV_t + (a_{n-3})_x &= 0, \\
(a_{n-3})_t + (a_{n-4})_x &= (n-2)nVV_x, \\
(a_{n-4})_t + (a_{n-5})_x &= (n-3)a_{n-3}V_x, \\
&\dots\dots\dots \\
(a_1)_t + (a_0)_x &= 2a_2V_x, \\
(a_0)_t &= a_1V_x,
\end{aligned}
\tag{2}$$

причем без ограничения общности можно положить коэффициенты $a_n = 1$ и $a_{n-1} = 0$.

Система уравнений в частных производных (2) – это система гидродинамического типа [4]. Диагонализируемые (допускающие инварианты Римана) системы, обладающие бесконечным числом находящихся в инволюции интегралов гидродинамического типа (законов сохранения), задаваемые с произволом n функций одного переменного, называются *гидродинамически интегрируемыми*. Такие системы интегрируются “обобщенным методом годографа” [5].

Исследуем вопрос о гидродинамической интегрируемости системы (2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Система уравнений (2) сводится к недисперсионным уравнениям Лакса или “редукции Лакса уравнений Бенни”

$$u_t^i = \sum_{j=1}^N A_j^i(u) u_x^j, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где матрица A равна

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -(N-1)u^1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -(N-2)u^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -u^{N-1} & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}, \quad N = n - 1. \quad (4)$$

Для доказательства достаточно сделать линейную замену переменных

$$V = u_1, \quad a_{n-3} = -nu_2, \quad a_{n-4} = nu_3, \quad \dots, \quad a_0 = \pm nu_{n-1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $N = 1$ система (3) превращается в одно уравнение (недисперсионное уравнение Кортевега–де Фриза) [6]

$$u_t = uu_x. \quad (5)$$

После замены $u \rightarrow -u$ оно переходит в известное уравнение Хопфа.

Система (3) диагонализуема: инварианты Римана ищутся из соотношения

$$\frac{1}{n}R_k^n = \frac{1}{n}\lambda_k^n + u_1\lambda_k^{n-1} + \dots + u_{n-1}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (6)$$

где λ_k – собственные значения матрицы A (4). При этом оказывается, что если выразить λ через R из соотношения (6)

$$\lambda = R - \frac{H_1}{R} - \frac{H_2}{R^2} - \dots,$$

то коэффициенты $H_1, H_2, \dots$ будут плотностями законов сохранения [6]. Таким образом, уравнения Лакса (3), а следовательно, и система уравнений (2) гидродинамически интегрируема.

Метод годографа – это локальная процедура, которая не решает вопрос о существовании решения системы (2) на всем интервале времени.

Известно, что одномерное уравнение Лакса (5) с периодичным по x начальным условием не определяется однозначно на всем интервале t . По-видимому, из-за отсутствия дисперсии при любых значениях N найдутся такие начальные условия у системы, что ее решение будет определено лишь на конечном интервале времени.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: derjabin@mvd.pvt.msu.su

Поступило
17.10.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.–Л.: Гостехиздат, 1937.
2. Биркгоф Дж. Динамические системы. М.–Л.: Гостехиздат, 1941.
3. Козлов В. В. // Матем. заметки. 1989. Т. 45. № 4. С. 46–52.
4. Дубровин Б. А., Новиков С. П. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 781–785.
5. Царев С. П. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 3. С. 534–537.
6. Kodama Y., Gibbons J. // Phys. Lett. A. 1989. V. 135. № 3. P. 167–170.