Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Чечкин, Об оценке решений краевых задач в областях с концентрированными массами, периодически расположенными вдоль границы. Случай “легких” масс, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 6, 928–944

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm152>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:58:02

УДК 517.956.226

ОБ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ С КОНЦЕНТРИРОВАННЫМИ МАССАМИ, ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫМИ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ. СЛУЧАЙ “ЛЕГКИХ” МАСС

Г. А. Чечкин

Мы рассматриваем асимптотическое поведение решений и собственных элементов граничных задач с быстро меняющимся типом граничных условий в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Плотность, которая зависит от малого параметра ε , имеет порядок $O(1)$ вне мелких включений, где она имеет порядок $O((\varepsilon\delta)^{-m})$. Эти области, концентрированные массы диаметра $O(\varepsilon\delta)$, расположены около границы на расстоянии друг от друга порядка $O(\delta)$, где $\delta = \delta(\varepsilon) \rightarrow 0$. Мы ставим условие Дирихле (соответственно Неймана) на участках границы $\partial\Omega$, касающихся (соответственно лежащих вне) концентрированных масс. Получены оценки отклонения решений предельных (усредненных) задач от решений исходной задачи в норме соболевского пространства W_2^1 в случае, когда $m < 2$.

Библиография: 50 названий.

Введение. Исследование поведения тел с неоднородной плотностью является одной из интересных задач механики сплошной среды. Первые работы, посвященные этой тематике, начали появляться еще в начале XX века.

В 1913 году Крылов в своей книге [1] рассматривает задачу о колебаниях струны, нагруженной сосредоточенными массами. Эта работа положила начало глубоким исследованиям в этой области.

С развитием аэродинамики и самолетостроения стало важным изучение устойчивости поведения крыльев и фюзеляжа летательных аппаратов под воздействием вибрации. На крыльях находятся сосредоточенные массы (моторы), фюзеляж также испытывает точечные нагрузки (пассажирские кресла, шасси и т.д.). Такая задача тоже сводится к изучению собственных частот колебаний нагруженной струны (см. приложение к гл. 2 в [2]).

Предполагалось, что дополнительная масса M сосредоточена в точке, и рассматривалось предельное поведение решений задачи при стремлении массы к нулю и бесконечности. Особенностью этой модели является точечное прикрепление массы, при этом не учитываются размеры того множества, где фактически сосредоточена масса.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-000693.

В конце 70-х годов Санчес-Паленсия рассмотрел задачу, где присоединенная к системе масса сконцентрирована в ε -окрестности внутренней точки, ε – малый параметр, описывающий концентрацию и размер массы (см. [3]). В этой работе были использованы методы спектральной теории возмущений.

Другой подход был предложен в работах Олейник [4]–[8]. Базировался этот подход на введении нового основного параметра колебательных систем с локально присоединенными массами – отношения присоединенной массы к массе всей системы. При этом удалось описать локальные колебания системы вблизи сосредоточенной массы. Подробное обоснование модели Олейник–Санчес-Паленсия, а также анализ размерностей в задаче о спектральных свойствах колебательных систем с присоединенными массами сделал Головатый (см. [9]).

Рассмотрим общую постановку задачи. Предположим, что колебания механической системы в области $G \subset \mathbb{R}^n$ происходят по закону

$$\begin{cases} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P_0 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times G, \\ B_0^{(j)} \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \partial G, \quad j = 1, \dots, l, \end{cases}$$

где $u(t, x)$ – смещение точки $x \in G$ относительно положения равновесия в момент времени t . Здесь $P_0, B_0^{(j)}, j = 1, \dots, l$, – дифференциальные операторы, $\rho(x)$ – плотность распределения масс, а функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ заданы. Примерами таких систем могут служить струна, стержень, мембрана, пластина, упругое тело и т.п. В случае плоской волны $u(t, x) = v(x)e^{i\omega t}$, и мы приходим к спектральной задаче

$$\begin{cases} P_0 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) + \omega^2 \rho(x) v(x) = 0, & x \in G, \\ B_0^{(j)} \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) = 0, & x \in \partial G, \quad j = 1, \dots, l. \end{cases}$$

Пусть имеется следующее распределение масс. Предположим, что в G компактно содержится некое открытое множество g и

$$\rho(x) = \rho_G(x) + \rho_g(x)\chi_g(x),$$

где $\rho_G(x) > 0$ в $\bar{G}$, $\rho_g(x) > 0$ в $\bar{g}$, а $\chi_g(x)$ – характеристическая функция множества g . Рассматривая случай локально сосредоточенной массы, естественно предполагать, что отношение объемов g и G есть малый параметр $\varepsilon \rightarrow 0$, а отношение средних значений плотностей – большой. Имеем

$$\frac{|g|^{-1} \int_g \rho_g(x) dx}{|G|^{-1} \int_G \rho_G(x) dx} = \varepsilon^{-m}, \quad m \in \mathbb{R}_+.$$

Таким образом, параметр ε можно считать параметром возмущения задачи. При этом ставится задача изучения влияния сосредоточенной массы на спектр колебательной системы при различных значениях параметра m . Приведем некоторые из полученных результатов.

В [3] Санчес-Паленсия рассмотрел эту задачу в случае, когда P_0 – оператор Лапласа с граничными условиями Дирихле и $n = m = 3$. В работах Олейник [5]–[8] это сделано для всех m и n . В [10] авторы исследовали случай одной концентрированной массы для $P_0 = d^2/dx^2$ с граничным условием Дирихле. В случае конечного числа концентрированных масс эта работа была проделана Олейник и Соболевой в [11]. Задача о колебаниях упругого стержня и упругой пластинки с концентрированными массами изучена в работах Головатого [12], [13]. Случай, когда P_0 – оператор Лапласа с граничными условиями Неймана разобран в [14] и [15]. В [16] исследуются первая и третья краевые задачи для оператора Лапласа, $n \geq 2$, в случае, когда плотность возмущена конечным числом концентрированных масс. Асимптотические разложения собственных значений и собственных функций задачи Дирихле для оператора Лапласа получены в [17] и [18]. Случай, когда P_0 – оператор системы теории упругости рассмотрели Санчес-Паленсия и Чата в [19]. О колебании мембраны см. [20]. В [21]–[28] рассматривается асимптотика колебаний тела, имеющего много небольших включений большой плотности, расположенных периодически вдоль границы. Изучены вопросы асимптотического поведения собственных значений. Аналогичные задачи были рассмотрены в [29]–[31]. В работе [32] рассматривается краевая задача для стационарной системы линейной теории упругости с непериодическими быстро меняющимися граничными условиями и большим количеством концентрированных масс около границы, ее асимптотическое поведение, а также предельное поведение спектра этой краевой задачи. Разобран случай краевой задачи для системы теории упругости, когда предельная задача имеет третье краевое условие на границе области, а плотность включений не слишком велика (значение параметра $m < 2$). Получены оценки скорости сходимости решения исходной задачи к решению усредненной, а также поведение собственных элементов такой краевой задачи.

Во всех этих моделях предполагается, что закон колебания груза или уплотнения должен описываться теми же уравнениями, которыми описываются колебания самой системы. В работе [33] рассматривается задача для линейной стационарной системы теории упругости в областях с концентрированными массами. Рассмотрены различные случаи поведения собственных элементов таких задач. В работе рассматривается ситуация, когда включения достаточно жесткие. При этом законы колебания тела и масс различны.

Работа [34] посвящена детальному изучению поведения собственных элементов оператора Лапласа в области с непериодическими “легкими” концентрированными массами.

В настоящей работе рассматривается случай произвольного $n \geq 3$ и периодически расположенных масс, даются в соответствующих нормах оценки отклонения (оценки скорости сходимости) решений поставленных задач от решений предельных задач при стремлении малого параметра к нулю, а также аналогичные оценки получены для собственных значений соответствующей спектральной задачи. Базовые оценки работы частично аннотированы в [35].

1. Постановка задачи. Пусть Ω – гладкая область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, обозначим через $\partial\Omega$ ее границу. Предполагается, что $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, гиперплоскость Γ_2 состоит из двух частей, Γ_ε и γ_ε , где $\gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\delta} \gamma_\varepsilon^i$. Введем следующее обозначение: $B_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\delta} B_\varepsilon^i$

– объединение полушаров, находящихся внутри области Ω . Поясним теперь построение. Пусть B_ε – гомотетичное сжатие δB , B^0 – это полушар $\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \mid \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 < \varepsilon^2, \xi_n < 0\}$ в растянутом пространстве $\mathbb{R}^n$, $\xi = x/\delta$,

$$\gamma_0 = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \mid \xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 < \varepsilon^2, \xi_n = 0\},$$

B – область, полученная целочисленными сдвигами множества B^0 на гиперплоскости $\{\xi_n = 0\}$ с центрами в точках

$$\tilde{\xi}_k = (k_1, \dots, k_{n-1}, 0), \quad k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{N}.$$

Геометрическая конфигурация на гиперплоскости $\{x_n = 0\}$ аналогична описанной в [22], [23], [36] (см. рис. 1). При этом

$$\gamma_\varepsilon = \overline{B}_\varepsilon \cap \partial\Omega.$$

Отметим, что рассматривается случай, когда параметр $\delta(\varepsilon)$, определяющий характерное расстояние между участками γ_ε^i на границе, стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Также заметим, что $N_\delta = O(1/\delta^{n-1})$.

Рис. 1

Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon^k = -\lambda_\varepsilon^k \rho^\varepsilon(x) u_\varepsilon^k & \text{в } \Omega, \\ u_\varepsilon^k = 0 & \text{на } \Gamma_1 \cup \gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon^k}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Gamma_\varepsilon, \end{cases} \quad (1)$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$,

$$\rho^\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\varepsilon\delta)^m}, & x \in B_\varepsilon, \\ 1, & x \in \Omega \setminus B_\varepsilon. \end{cases} \quad (2)$$

Рассматривается случай $m < 2$.

Собственные значения $\{\lambda_\varepsilon^k\}$ занумерованы в порядке неубывания, т.е.

$$\lambda_\varepsilon^1 \leq \lambda_\varepsilon^2 \leq \dots \leq \lambda_\varepsilon^k \leq \dots,$$

и повторяются с учетом кратности. При этом

$$\int_{\Omega} \rho^\varepsilon(x) u_\varepsilon^k u_\varepsilon^l dx = \delta_{kl}.$$

Для формулировки теорем нам понадобится следующая величина:

$$P := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta(\varepsilon)}.$$

Обозначим (см. рис. 2)

$$D = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid -\frac{1}{2} < \xi_i < \frac{1}{2}, i = 1, \dots, n-1, \xi_n < 0 \right\},$$

$$\Sigma = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid -\frac{1}{2} < \xi_i < \frac{1}{2}, i = 1, \dots, n-1, \xi_n = 0 \right\}.$$

Рис. 2

Пусть функция W^ε , периодическая по переменным $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, является первой собственной функцией задачи типа Стеклова

$$\begin{cases} \Delta W^\varepsilon = 0 & \text{в } D, \\ W^\varepsilon = 0 & \text{на } \gamma_0, \\ \frac{\partial W^\varepsilon}{\partial \xi_n} = \nu_\varepsilon W^\varepsilon & \text{на } \Sigma \setminus \gamma_0. \end{cases} \quad (3)$$

Зададим w_ε формулой

$$w_\varepsilon(x) = 1 + \psi(x_n) \left(W^\varepsilon \left(\frac{x}{\delta} \right) - 1 \right)$$

и продолжим ее по периодичности. Здесь $\psi(t)$ – гладкая срезающая функция одной переменной, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ в некоторой достаточно малой окрестности Γ_2 . Свойства функции w_ε приведены в предложении в начале следующего пункта и подробно изучены в [36].

Приведем далее основные результаты, которые будут доказаны позднее. Рассмотрим краевые задачи

$$\begin{cases} \Delta u^\varepsilon = -\rho^\varepsilon(x) f^\varepsilon & \text{в } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_1 \cup \gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Gamma_\varepsilon, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \Delta u^0 = -f^0(x) & \text{в } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{на } \partial\Omega, \quad P = +\infty, \\ \left[\begin{array}{l} \frac{\partial u^0}{\partial \nu} + P \frac{\sigma_n c_{\gamma_0}}{2} u^0 = 0 \\ u^0 = 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{на } \Gamma_2, \\ \text{на } \Gamma_1 \end{array}, \quad P < +\infty, \end{cases} \quad (5)$$

где σ_n – площадь единичной n -мерной сферы, а $c_{\gamma_0} := \text{сар}(\gamma_0)$ – гармоническая емкость $(n-1)$ -мерного диска γ_0 .

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Если $P < +\infty$, u^ε и u^0 – обобщенные решения задач (4) и (5) соответственно, то существует такая константа $K_1(F, \gamma_0, n)$, не зависящая от ε и δ , что для достаточно малых ε имеем

$$\|u^0 w_\varepsilon - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq K_1 \left(\varepsilon^{(n-2)/2} + \left| \frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta} - P \right| + \varepsilon^{2-m} \delta^{2-m} \right).$$

Если $P = +\infty$, то существует $K_2(f, \gamma_0, n)$ такое, что

$$\|u^0 w_\varepsilon - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq K_2 \left(\varepsilon^{(n-2)/2} + \frac{\delta^{1/2}}{\varepsilon^{(n-2)/2}} + \varepsilon^{2-m} \delta^{2-m} \right).$$

Теперь приведем спектральную задачу

$$\begin{cases} \Delta u_0^k = -\lambda_0^k u_0^k & \text{в } \Omega, \\ u_0^k = 0 & \text{на } \partial\Omega, \quad P = +\infty, \\ \left[\begin{array}{l} \frac{\partial u_0^k}{\partial \nu} + P \frac{\sigma_n c \gamma_0}{2} u_0^k = 0 \\ u_0^k = 0 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{на } \Gamma_2, \\ \text{на } \Gamma_1 \end{array}, \quad P < +\infty, \\ \int_{\Omega} u_0^k u_0^l dx = \delta_{kl}, \quad 0 < \lambda_0^1 \leq \lambda_0^2 \leq \dots \end{cases} \quad (6)$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lambda_0^k, \lambda_\varepsilon^k$ являются собственными значениями задач (6) и (1) соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} |\lambda_0^k - \lambda_\varepsilon^k| &\leq C_k^1 \left(\varepsilon^{(n-2)/2} + \left| \frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta} - P \right| + \varepsilon^{2-m} \delta^{2-m} \right), & \text{если } P < \infty, \\ |\lambda_0^k - \lambda_\varepsilon^k| &\leq C_k^2 \left(\varepsilon^{(n-2)/2} + \frac{\delta^{1/2}}{\varepsilon^{(n-2)/2}} + \varepsilon^{2-m} \delta^{2-m} \right), & \text{если } P = +\infty, \end{aligned}$$

где постоянные C_k^1, C_k^2 не зависят от ε .

Если кратность собственного значения λ_0^l задачи (6) равна r , т.е. $\lambda_0^l = \lambda_0^{l+1} = \dots = \lambda_0^{l+r}$, то для любой собственной функции u_0^l задачи (6), соответствующей собственному значению λ_0^l , $\|u_0\|_{L_2(\Omega)} = 1$, существует линейная комбинация $\overline{u^\varepsilon}$ собственных функций задачи (1), соответствующих собственному значению $\lambda_\varepsilon^{l+1}, \dots, \lambda_\varepsilon^{l+r}$, такая, что

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \rho^\varepsilon(x) |\overline{u^\varepsilon} - u_0^l|^2 dx \right)^{1/2} &\leq C_l^1 \left(\varepsilon^{(n-2)/2} + \left| \frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta} - P \right| + \varepsilon^{2-m} \delta^{2-m} \right), \\ &\text{если } P < \infty, \\ \left(\int_{\Omega} \rho^\varepsilon(x) |\overline{u^\varepsilon} - u_0^l|^2 dx \right)^{1/2} &\leq C_l^2 \left(\varepsilon^{(n-2)/2} + \frac{\delta^{1/2}}{\varepsilon^{(n-2)/2}} + \varepsilon^{2-m} \delta^{2-m} \right), \\ &\text{если } P = +\infty, \end{aligned}$$

где постоянные C_l^1, C_l^2 не зависят от ε и u_0^l .

2. Вспомогательные утверждения и предварительные замечания. Мы будем изучать предельное поведение решений спектральной задачи (1) при ε , стремящемся к нулю. Существование и единственность решения u_ε^k задачи (1) в пространстве $H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ может быть доказана на основе леммы Лакса–Мильграма (см., например, [37]). Пространство $H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ определяем как пополнение множества функций из пространства $C^\infty(\overline{\Omega})$, обращающихся в нуль в окрестности $\Gamma_1 \cup \gamma_\varepsilon$, по норме

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \equiv \left(\int_{\Omega} (u^2 + |\nabla u|^2) dx \right)^{1/2}.$$

Пространство $H^1(D, \gamma_0)$ – это пополнение по норме

$$\|u\|_1 \equiv \left(\int_D |\nabla_\xi u|^2 d\xi + \int_\Sigma u^2 d\widehat{\xi} \right)^{1/2}$$

множества 1-периодических по $\widehat{\xi} \equiv (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ функций из $C^\infty(\overline{D})$, обращающихся в нуль в окрестности γ_0 и обладающих конечным интегралом Дирихле по области D .

Пусть

$$\nu_\varepsilon = \inf_{v \in H^1(D, \gamma_0) \setminus \{0\}} \left(\frac{\int_D |\nabla_\xi v|^2 d\xi}{\int_\Sigma v^2 d\widehat{\xi}} \right). \quad (7)$$

В работе [38] исследовался вопрос поведения собственного значения ν_ε . Там доказана следующая асимптотика (см. формулу (25) работы [38]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть σ_n – площадь единичной n -мерной сферы, а c_{γ_0} – гармоническая емкость γ_0 . Тогда

$$\nu_\varepsilon = \varepsilon^{n-2} \frac{\sigma_n}{2} c_{\gamma_0} + o(\varepsilon^{n-2}).$$

В дальнейшем мы воспользуемся результатами этой леммы. Также в дальнейшем будем использовать следующее утверждение из [36].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Существует такая гармоническая в D функция $W^\varepsilon(\xi) \in H^1(D, \gamma_0)$, что на ней достигается нижняя грань в (7),

$$\int_D |\nabla_\xi W^\varepsilon|^2 d\xi = \nu_\varepsilon, \quad \|W^\varepsilon\|_{L_2(\Sigma)} = 1,$$

причем граничное условие

$$\frac{\partial W^\varepsilon}{\partial \xi_n} = \nu_\varepsilon W^\varepsilon \quad \text{на } \Sigma \setminus \gamma_0 \quad (8)$$

выполняется в следующем смысле:

$$\int_{\Sigma_\rho} \frac{\partial W^\varepsilon}{\partial \xi_n} v d\widehat{\xi} \rightarrow \nu_\varepsilon \int_\Sigma W^\varepsilon v d\widehat{\xi} \quad \text{при } \rho \rightarrow 0 \quad \text{для любой } v \in H^1(D, \gamma_0).$$

Здесь $\Sigma_\rho = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \xi_i < 1, i = 1, \dots, n-1, \xi_n = -\rho\}$.

В работе [36] подробно обсуждается вопрос существования таких функций и их свойства, некоторые из этих свойств могут быть доказаны на основе результатов работ [39] и [40].

Положим

$$w_\varepsilon(x) = 1 + \psi(x_n) \left(W^\varepsilon\left(\frac{x}{\delta}\right) - 1 \right),$$

продолжив по периодичности.

Заметим, что ввиду (8)

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_n} = \frac{\nu_\varepsilon}{\delta} w_\varepsilon \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon. \quad (9)$$

ЛЕММА 1. Для функций $v \in H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ справедливо следующее неравенство:

$$\int_{B_\varepsilon^i} v^2 dx \leq C(\varepsilon\delta)^2 \int_{B_\varepsilon^i} |\nabla v|^2 dx, \quad i = 1, \dots, N_\delta. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. [22], а также [41]) основано на применении неравенства (см. [41, (5.3), с. 263]) Харди.

ЛЕММА 2. Для последовательности функций $\{v_\varepsilon\} \in H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ выполняется следующее равенство:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon\delta)^{-2} \int_{B_\varepsilon^i} |v_\varepsilon|^2 dx = 0,$$

если $\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq K$, где K не зависит от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (аналогично см. [41]). Пусть $v \in H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$. Для любого числа $\alpha > 0$ существует функция $v_\alpha \in C^\infty(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ такая, что $C^{1/2}\|v - v_\alpha\|_{H^1(\Omega)} < \alpha$, где C — постоянная из формулы (10). Теперь, используя оценку (10) для $v - v_\alpha$, получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_\varepsilon^i} (\varepsilon\delta)^{-2} |v|^2 dx \right)^{1/2} &\leq \left(\int_{B_\varepsilon^i} (\varepsilon\delta)^{-2} |v - v_\alpha|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{B_\varepsilon^i} (\varepsilon\delta)^{-2} |v_\alpha|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq C^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla(v - v_\alpha)|^2 dx \right)^{1/2} + C_\alpha (\varepsilon\delta)^{n/2-1} \leq \alpha + C_\alpha (\varepsilon\delta)^{n/2-1}. \end{aligned}$$

Так как $n \geq 3$, то лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $u^\varepsilon \in H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ — решение уравнения

$$\Delta u^\varepsilon = -\rho^\varepsilon(x) f^\varepsilon(x) \quad \text{в } \Omega.$$

Тогда

$$\int_{\Omega} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \leq C_1 \left((\varepsilon\delta)^{2-m} \int_{B_\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) |f^\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} |f^\varepsilon|^2 dx \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из интегрального тождества, учитывая лемму 1 и неравенство типа Фридрихса (см., например, [42]–[45]), получаем

$$\begin{aligned} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx = \int_{\Omega} \rho^\varepsilon f^\varepsilon u^\varepsilon dx = \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon dx + (\varepsilon\delta)^{-m} \int_{B_\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} (f^\varepsilon)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} (u^\varepsilon)^2 dx \right)^{1/2} + (\varepsilon\delta)^{-m} \left(\int_{B_\varepsilon} (f^\varepsilon)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{B_\varepsilon} (u^\varepsilon)^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq C_2 \left(\int_{\Omega} (f^\varepsilon)^2 dx \right)^{1/2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + C_3 (\varepsilon\delta)^{-m+1} \left(\int_{B_\varepsilon} (f^\varepsilon)^2 dx \right)^{1/2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L_2(B_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает непосредственно наше неравенство. Лемма 3 доказана.

3. Основные утверждения. Поведение собственных значений и собственных функций задачи (1) будем изучать на основе общей схемы, предложенной в [41].

Пусть H_ε, H_0 – сепарабельные гильбертовы пространства со скалярным произведением $(u, v)_\varepsilon, (u, v)_0$ и нормами $\|u\|_\varepsilon, \|u\|_0$ соответственно, ε – малый положительный параметр, и пусть $A_\varepsilon \in \mathcal{L}(H_\varepsilon), A_0 \in \mathcal{L}(H_0)$ — линейные непрерывные операторы, причем $\text{Im } A_0 \subset V \subset H_0$; где V — линейное подпространство в H_0 .

Будем предполагать, что выполнены следующие условия С1–С4.

УСЛОВИЕ С1. Существуют линейные непрерывные операторы $R_\varepsilon: H_0 \rightarrow H_\varepsilon$ такие, что для любой функции $f \in V$ имеем

$$(R_\varepsilon f, R_\varepsilon f)_\varepsilon \rightarrow \kappa(f, f)_0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $\kappa = \text{const} > 0$ и не зависит от f .

УСЛОВИЕ С2. Операторы A_ε, A_0 являются положительными, компактными и самосопряженными в H_ε и H_0 соответственно, причем

$$\sup_\varepsilon \|A_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(H_\varepsilon)} < \infty.$$

УСЛОВИЕ С3. Для любой $f \in V$ имеем

$$\|A_\varepsilon R_\varepsilon f - R_\varepsilon A_0 f\|_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

УСЛОВИЕ С4. Семейство операторов A_ε равномерно компактно в следующем смысле. Из любой последовательности $f^\varepsilon \in H_\varepsilon$ такой, что $\sup_\varepsilon \|f^\varepsilon\|_\varepsilon < \infty$, можно выбрать подпоследовательность $f^{\varepsilon'}$ и найти функцию $w \in V$ такие, что

$$\|A_{\varepsilon'} f^{\varepsilon'} - R_{\varepsilon'} w\|_{\varepsilon'} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon' \rightarrow 0.$$

Рассмотрим спектральные задачи для операторов A_ε, A_0 :

$$A_\varepsilon u_\varepsilon^k = \mu_\varepsilon^k u_\varepsilon^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (u_\varepsilon^i, u_\varepsilon^j) = \delta_{ij}, \quad (11)$$

$$A_0 u_0^k = \mu_0^k u_0^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (u_0^i, u_0^j) = \delta_{ij}, \quad (12)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, собственные значения $\mu_\varepsilon^k, \mu_0^k$ занумерованы в порядке невозрастания, причем каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность.

ТЕОРЕМА (Олейник–Иосифьян–Шамаев). а) Пусть выполнены условия С1–С4. Тогда

$$|\mu_\varepsilon^k - \mu_0^k| \leq M_\varepsilon \sup_f \|A_\varepsilon R_\varepsilon f - R_\varepsilon A_0 f\|_\varepsilon, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_\varepsilon^k, \mu_0^k$ – k -е собственное значение задач (11), (12) соответственно, верхняя грань берется по всем функциям $f \in N(\mu_0^k, A_0) = \{v \in H_0 : A_0 v = \mu_0^k v\}$ таким, что $\|v\|_0 = 1$, постоянная $M_\varepsilon \leq \mathcal{M}$ при $0 < \varepsilon \leq 1$, и $M_\varepsilon \rightarrow 1/\sqrt{\kappa}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\mathcal{M}$ не зависит от ε .

б) Пусть $k \leq 0$, $l \leq 1$ – целые числа, кратность собственного значения μ_0^{k+1} задачи (12) равна l , т.е. $\mu_0^{k+1} = \dots = \mu_0^{k+l}$. Тогда для любой $u_0 \in N(\mu_0^{k+1}, A_0)$ существует линейная комбинация $\bar{u}_\varepsilon$ собственных функций $u_\varepsilon^{k+1}, \dots, u_\varepsilon^{k+l}$ задачи (11) такая, что

$$\|\bar{u}_\varepsilon - R_\varepsilon u_0\|_\varepsilon \leq M_k \|A_\varepsilon R_\varepsilon u_0 - R_\varepsilon A_0 u_0\|_\varepsilon,$$

где постоянная M_k не зависит от ε .

Для того чтобы воспользоваться схемой, нужно подходящим образом ввести пространства H_0, H_ε, V , операторы $A_0, A_\varepsilon, R_\varepsilon$ и проверить выполнение условий С1–С4.

Для удобства введем такое обозначение:

$$p := P \frac{\sigma_n c \gamma_0}{2}.$$

Обозначим соответственно через H_ε и H_0 пространство $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(f^\varepsilon, g^\varepsilon)_{H_\varepsilon} \equiv \int_\Omega \rho^\varepsilon(x) f^\varepsilon g^\varepsilon dx, \quad (f^0, g^0)_{H_0} \equiv \int_\Omega f^0 g^0 dx$$

соответственно. В качестве V возьмем пространство $\dot{H}^1(\Omega)$, если $p = +\infty$ и пространство $H^1(\Omega, \Gamma_1)$, если $p < +\infty$. Положим $R_\varepsilon f^0 = f^0$ для любого $f^0 \in H_0$.

Если $f^0 \in V$, то

$$\begin{aligned} (R_\varepsilon f^0, R_\varepsilon f^0)_{H_\varepsilon} &= \int_\Omega \rho^\varepsilon(x) (f^0)^2 dx = \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} (f^0)^2 dx + (\varepsilon \delta)^{-m} \int_{B_\varepsilon} (f^0)^2 dx \\ &\rightarrow \int_\Omega (f^0)^2 dx = (f^0, f^0)_H \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

в силу леммы 2. Действительно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \delta)^{-m} \int_{B_\varepsilon} (f^0)^2 dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \delta)^{2-m} \int_{B_\varepsilon} (f^0)^2 (\varepsilon \delta)^{-2} dx,$$

но

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \delta)^{-2} \int_{B_\varepsilon} (f^0)^2 dx = 0,$$

а $m < 2$. Это означает, что справедливо условие С1 при $\kappa = 1$.

Обозначим через $A_\varepsilon: H_\varepsilon \rightarrow H_\varepsilon$ оператор, ставящий в соответствие функции $f^\varepsilon \in H_\varepsilon$ решение $u^\varepsilon \in H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ задачи (4). Через $A_0: H_0 \rightarrow H_0$ обозначим оператор, переводящий $f^0 \in H_0$ в решение $u^0 \in H^1(\Omega, \Gamma_1)$ задачи (5).

Легко проверить, что операторы A_ε и A_0 являются положительными компактными и самосопряженными в пространствах H_ε и H_0 соответственно (см. [36]). Равномерная ограниченность семейства операторов в соответствующей операторной норме

$$\sup_\varepsilon \|A_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(H_\varepsilon)} < M$$

следует из леммы 3, поскольку при $m < 2$ в силу лемм 1 и 3, а также неравенства типа Фридрихса

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon f^\varepsilon\|_{H_\varepsilon}^2 &= \int_\Omega \rho^\varepsilon(x) (u^\varepsilon)^2 dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} (u^\varepsilon)^2 dx + (\varepsilon\delta)^{-2} \int_{B_\varepsilon} (u^\varepsilon)^2 dx \right) \leq C_4 \int_\Omega |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \\ &\leq C_5 \left((\varepsilon\delta)^{2-m} \int_{B_\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) (f^\varepsilon)^2 dx + \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) (f^\varepsilon)^2 dx + \int_{B_\varepsilon} (f^\varepsilon)^2 dx \right) \\ &\leq C_6 \left(\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) (f^\varepsilon)^2 dx + \int_{B_\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) (f^\varepsilon)^2 dx \right) = C_6 \|f^\varepsilon\|_{H_\varepsilon}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, условие С2 имеет место.

Докажем выполнение условия С3. Пусть $f^0 \in H_0$. Тогда

$$A_\varepsilon R_\varepsilon f^0 = u^\varepsilon, \quad R_\varepsilon A_0 f^0 = u^0,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta u^\varepsilon &= -\rho^\varepsilon(x) f^0 \quad \text{в } \Omega, \quad u^\varepsilon \in H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon), \\ \Delta u^0 &= -f^0 \quad \text{в } \Omega, \quad u^0 \in H^1(\Omega, \Gamma_1). \end{aligned}$$

Для простоты будем считать, что $f^\varepsilon \equiv f^0 \equiv f$. Хотя в случае, когда $f^\varepsilon \rightarrow f^0$ в соответствующем смысле, задача может быть изучена аналогично. В дальнейшем предполагается, что $f \in L_\infty(\Omega)$. Если $u^0 \in H^1(\Omega)$ – обобщенное решение задачи (5), то в силу регулярности решений эллиптических уравнений [46] $u^0 \in W_l^2(\Omega)$ для любого $l > 1$. В силу теорем вложения [47]–[49] отсюда следует, что $u^0, \nabla u^0 \in L_\infty(\Omega)$. Из первого уравнения задачи (5) следует, что $\Delta u^0 \in L_\infty(\Omega)$, причем

$$\|u^0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\nabla u^0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\Delta u^0\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \text{const} \|f\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Аналогичные оценки для $f \in L_2(\Omega)$ могут быть также получены (см., например, [34] и [50]).

Слабая сходимость u^ε к u^0 в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ доказана в [36, теорема 1], а также см. [22].

Напомним, что

$$p := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{n-2} \sigma_n c_{\gamma_0} / 2}{\delta(\varepsilon)}.$$

ТЕОРЕМА 3. Если $p < +\infty$, u^ε и u^0 – обобщенные решения задач (4) и (5) соответственно, то существует такая константа K_3 , не зависящая от ε, δ, f , что для достаточно малых ε имеем

$$\|u^0 w_\varepsilon - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq K_3 \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \left((\nu_\varepsilon)^{1/2} + \left| \frac{\nu_\varepsilon}{\delta} - p \right| + (\varepsilon \delta)^{2-m} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имея в виду свойства функции u^0 , w_ε и u^ε , получаем следующее интегральное выражение для любого $v \in H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla(u^0 w_\varepsilon - u^\varepsilon), \nabla v) dx &= \int_{\Omega} (w_\varepsilon - 1)(2\Delta u^0 v + 2(\nabla v, \nabla u^0) + \rho^\varepsilon f v) dx \\ &+ \left| \frac{\nu_\varepsilon}{\delta} - p \right| \int_{\partial\Omega} u^0 w_\varepsilon v ds + 2 \int_{\partial\Omega} (w_\varepsilon - 1) p u^0 v ds - \int_{\Omega} u^0 \Delta w_\varepsilon v dx. \end{aligned}$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части равенства. Имеем

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega} (w_\varepsilon - 1)(2\Delta u^0 v + 2(\nabla v, \nabla u^0) + \rho^\varepsilon f v) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} 2(w_\varepsilon - 1)\Delta u^0 v dx \right| + \left| \int_{\Omega} 2(w_\varepsilon - 1)(\nabla v, \nabla u^0) dx \right| \\ &+ \left| \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} (w_\varepsilon - 1)f v dx \right| + \left| \int_{B_\varepsilon} (w_\varepsilon - 1)(\varepsilon \delta)^{-m} f v dx \right| \\ &\leq \|w_\varepsilon - 1\|_{L_2(\Omega)} \left(\left(\int_{\Omega} 4(\Delta u^0 v)^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega} 4(\nabla u^0, \nabla v)^2 dx \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} (f v)^2 dx \right)^{1/2} \right) + (\varepsilon \delta)^{2-m} \|v\|_{H^1(\Omega)} \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \\ &\leq C_7 (\nu_\varepsilon \delta)^{1/2} \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + (\varepsilon \delta)^{2-m} \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Здесь была использована лемма 1 и свойства функции w_ε . Из свойства функций u^0 и w_ε следуют оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u^0 \Delta w_\varepsilon v dx \right| &\leq C_8 (\nu_\varepsilon \delta)^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)} \|f\|_{L_\infty(\Omega)}, \\ \left| \frac{\nu_\varepsilon}{\delta} - p \right| \left| \int_{\partial\Omega} u^0 w_\varepsilon v ds \right| &\leq C_9 \left| \frac{\nu_\varepsilon}{\delta} - p \right| \|v\|_{H^1(\Omega)} \|f\|_{L_\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Оставшийся интеграл оценивается следующим образом:

$$\left| \int_{\partial\Omega} (w_\varepsilon - 1) p u^0 v ds \right| \leq C_{10} (\nu_\varepsilon)^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)} \|f\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Подставляя $v = u^0 w_\varepsilon - u^\varepsilon$ и используя лемму 2, получаем окончательную оценку

$$\|u^0 w_\varepsilon - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq K_3 \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \left((\nu_\varepsilon)^{1/2} + \left| \frac{\nu_\varepsilon}{\delta} - p \right| + (\varepsilon \delta)^{2-m} \right).$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Если $p = +\infty$, то существует K_4 такое, что

$$\|u^0 w_\varepsilon - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq K_4 \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \left((\nu_\varepsilon)^{1/2} + \left(\frac{\delta}{\nu_\varepsilon} \right)^{1/2} + (\varepsilon\delta)^{2-m} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично с использованием результатов [36].

Продолжим проверку условия СЗ. Пользуясь леммой 1 и неравенством Фридрихса, устанавливаем

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon R_\varepsilon f^0 - R_\varepsilon A_0 f^0\|_{H_\varepsilon}^2 &= \int_{\Omega} \rho^\varepsilon(x) |u^\varepsilon - u^0|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} |u^\varepsilon - u^0|^2 dx + \int_{B_\varepsilon} (\varepsilon\delta)^{-m} |u^\varepsilon - u^0|^2 dx \\ &\leq C_{11} \int_{\Omega} |\nabla(u^\varepsilon - u^0)|^2 dx + C_{12} (\varepsilon\delta)^{2-m} \int_{B_\varepsilon} |\nabla(u^\varepsilon - u^0)|^2 dx \\ &\leq C_{13} \int_{\Omega} |\nabla(u^\varepsilon - u^0)|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla(u^\varepsilon - u^0 w_\varepsilon)|^2 dx + \int_{\Omega} (|\nabla u^0|^2 (1 - w_\varepsilon)^2 + (u^0)^2 |\nabla(1 - w_\varepsilon)|^2) dx. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом свойств функций u^0 и w_ε , а также теорем 3, 4 и леммы 2 при $m < 2$, мы получаем условие СЗ.

Докажем справедливость условия С4.

Если $\sup_\varepsilon \|f^\varepsilon\|_{H_\varepsilon} < \infty$, то из леммы 3 и неравенства Фридрихса вытекает, что

$$\sup_\varepsilon \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)} < \infty,$$

где u^ε – решение задачи (4). Следовательно (по теореме Реллиха), существует $U^* \in V$ и подпоследовательность $\varepsilon' \rightarrow 0$ такие, что

$$U^{\varepsilon'} \rightarrow U^* \quad \text{слабо в } H^1(\Omega) \text{ и сильно в } L_2(\Omega). \quad (14)$$

Поэтому, пользуясь леммой 1, выводим

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon f^\varepsilon - R_\varepsilon U^*\|_{H_\varepsilon}^2 &= \int_{\Omega} \rho^\varepsilon(x) |u^\varepsilon - U^*|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} |u^\varepsilon - U^*|^2 dx + (\varepsilon\delta)^{-m} \int_{B_\varepsilon} |u^\varepsilon - U^*|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} |u^\varepsilon - U^*|^2 dx + C_{14} (\varepsilon\delta)^{2-m} \int_{\Omega} |\nabla(u^\varepsilon - U^*)|^2 dx, \end{aligned}$$

где $u^\varepsilon = A_\varepsilon f^\varepsilon$ и C_{14} не зависит от ε . Отсюда получаем соотношение из условия С4, так как $m < 2$ и имеет место сходимость (14).

Таким образом, выполнены условия С1–С4 и мы можем применить теорему о сходимости спектров последовательности операторов, заданных в различных гильбертовых пространствах (Олейник–Иосифьяна–Шамаева).

Задача на собственные значения для оператора A_0 имеет вид (12), где $\mu_0^k = 1/\lambda_0^k$, а λ_0^k – собственные значения задачи (6).

Итак, имеет место

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\lambda_0^k, \lambda_\varepsilon^k$ являются собственными значениями задач (6) и (1) соответственно. Тогда

$$|\lambda_0^k - \lambda_\varepsilon^k| \leq C_k^3 \left((\nu_\varepsilon)^{1/2} + (\varepsilon\delta)^{2-m} + \left| \frac{\nu_\varepsilon}{\delta} - p \right| \right), \quad \text{если } p < \infty, \quad (15)$$

$$|\lambda_0^k - \lambda_\varepsilon^k| \leq C_k^4 \left((\nu_\varepsilon)^{1/2} + \left(\frac{\delta}{\nu_\varepsilon} \right)^{1/2} + (\varepsilon\delta)^{2-m} \right), \quad \text{если } p = +\infty, \quad (16)$$

где постоянные C_k^3, C_k^4 не зависят от ε .

Если кратность собственного значения λ_0^l задачи (6) равна r , т.е. $\lambda_0^l = \lambda_0^{l+1} = \dots = \lambda_0^{l+r}$, то для любой собственной функции u_0^l задачи (6), соответствующей собственному значению λ_0^l , $\|u_0\|_{L_2(\Omega)} = 1$, существует линейная комбинация $\overline{u^\varepsilon}$ собственных функций задачи (1), соответствующих собственному значению $\lambda_\varepsilon^{l+1}, \dots, \lambda_\varepsilon^{l+r}$ такая, что

$$\left(\int_\Omega \rho^\varepsilon(x) |\overline{u^\varepsilon} - u_0^l|^2 dx \right)^{1/2} \leq C_l^3 \left((\nu_\varepsilon)^{1/2} + (\varepsilon\delta)^{2-m} + \left| \frac{\nu_\varepsilon}{\delta} - p \right| \right), \quad \text{если } p < \infty, \quad (17)$$

$$\left(\int_\Omega \rho^\varepsilon(x) |\overline{u^\varepsilon} - u_0^l|^2 dx \right)^{1/2} \leq C_l^4 \left((\nu_\varepsilon)^{1/2} + \left(\frac{\delta}{\nu_\varepsilon} \right)^{1/2} + (\varepsilon\delta)^{2-m} \right), \quad \text{если } p = +\infty. \quad (18)$$

где постоянные C_l^3, C_l^4 не зависят от ε и u_0^l .

Используя предложение 1, из теорем 3–5 можно легко вывести утверждения теорем 1 и 2.

Благодарности. В основном статья была написана летом 1994 года в г. Севастополе, а окончательный вариант подготовлен в г. Нарвике на севере Норвегии зимой 2003 года. Автор выражает признательность Университетскому колледжу Нарвика (Narvik University College) за прекрасные условия для работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах // Изв. Николаевской морской академии. 1913. Вып. 2. С. 325–348.
- [2] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
- [3] Sanchez-Palencia É. Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of a system with concentrated masses // Trends and Application of Pure Math. to Mechanics. Lecture Notes in Physics. V. 195. Berlin: Springer-Verlag, 1984. P. 346–368.
- [4] Олейник О. А. Лекции по уравнениям с частными производными. М.: Изд-во МГУ, 1976.
- [5] Олейник О. А. О собственных колебаниях тел с концентрированными массами // Современные проблемы прикладной математики и математической физики. М.: Наука, 1988. С. 101–128.
- [6] Олейник О. А. О спектрах некоторых сингулярно возмущенных операторов // УМН. 1987. Т. 42. № 3. С. 221–222.
- [7] Oleinik O. A. Homogenization problems in elasticity. Spectrum of singularly perturbed operators // Lecture Notes Series. V. 122. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. P. 188–205.

- [8] Олейник О. А. О частотах собственных колебаний тел с концентрированными массами // Функциональные и численные методы математической физики. Киев: Наукова думка, 1988. С. 165–171.
- [9] Головатый Ю. Д. Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами. Дисс. ... к.ф.-м.н. М.: МГУ, 1988.
- [10] Головатый Ю. Д., Назаров С. А., Олейник О. А., Соболева Т. С. О собственных колебаниях струны с присоединенной массой // Сиб. матем. ж. 1988. Т. 29. № 5. С. 71–91.
- [11] Олейник О. А., Соболева Т. С. О собственных колебаниях неоднородной струны с конечным числом присоединенных масс // УМН. 1988. Т. 43. № 4. С. 187–188.
- [12] Головатый Ю. Д. О собственных колебаниях и собственных частотах упругого стержня с присоединенной массой // УМН. 1988. Т. 43. № 4. С. 173–174.
- [13] Головатый Ю. Д. О собственных колебаниях и собственных частотах закрепленной пластинки с присоединенной массой // УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 185–186.
- [14] Головатый Ю. Д. Спектральная задача Неймана для оператора Лапласа с сингулярно возмущенной плотностью // УМН. 1990. Т. 45. № 4. С. 147–148.
- [15] Назаров С. А. Об одной задаче Санчес-Паленсия с краевыми условиями Неймана // Изв. вузов. Матем. 1989. № 11. С. 60–66.
- [16] Рахманов Н. У. О собственных колебаниях систем с концентрированными массами. Дисс. ... к.ф.-м.н. М.: МГУ, 1991.
- [17] Головатый Ю. Д., Назаров С. А., Олейник О. А. Асимптотика собственных значений и собственных функций в задачах о колебаниях среды с сингулярным возмущением плотности // УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 189–190.
- [18] Головатый Ю. Д., Назаров С. А., Олейник О. А. Асимптотические разложения собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями // Тр. МИАН. 1990. Т. 192. С. 42–60.
- [19] Sanchez-Palencia É., Tchatat H. Vibration de systèmes elastiques avec des masses concentrées // Rend. Sem. Mat. Univ. e Politecnico di Torino. 1984. V. 42. № 3. P. 43–63.
- [20] Leal C., Sanchez-Hubert J. Perturbation of the eigenvalue of a membrane with a concentrated mass // Quart. Appl. Math. 1989. V. 47. № 1. P. 93–103.
- [21] Lobo M., Pérez E. Asymptotic behavior of the vibrations of a body having many concentrated masses near the boundary // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. II. 1992. V. 314. P. 13–18.
- [22] Lobo M., Pérez E. On vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary // Math. Models and Methods in Appl. Sci. 1993. V. 3. № 2. P. 249–273.
- [23] Lobo M., Pérez E. Vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary: high frequency vibrations // Spectral Analysis of Complex Structures. Paris: Hermann, 1995. P. 85–101.
- [24] Lobo M., Pérez E. Vibrations of a membrane with many concentrated masses near the boundary // Math. Models and Methods in Appl. Sci. 1995. V. 5. № 5. P. 565–585.
- [25] Lobo M., Pérez E. High frequency vibrations in a stiff problem // Math. Models and Methods in Appl. Sci. 1997. V. 7. № 2. P. 291–311.
- [26] Lobo M., Pérez E. A skin effect for systems with many concentrated masses // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. Iib. 1999. V. 327. P. 771–776.
- [27] Gómez D., Lobo M., Pérez E. On the eigenfunctions associated with the high frequencies in systems with a concentrated mass // J. Math. Pures Appl. 1999. V. 78. P. 841–865.
- [28] Lobo M., Pérez E. The skin effect in vibrating systems with many concentrated masses // Math. Methods Appl. Sci. 2001. V. 24. № 1. P. 59–80.
- [29] Oleinik O. A., Sanchez-Hubert J., Yosifian G. A. On vibration of membrane with concentrated masses // Bull. Sci. Math. 1991. V. 115. № 1. P. 1–27.
- [30] Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia É. Vibration and Coupling of Continuous System. Asymptotic methods. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1989.

- [31] Sanchez-Hubert J. Perturbation des valeurs propres pour des systèmes avec masse concentrée // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. II Mec. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre. 1989. V. 309. № 6. P. 507–510.
- [32] Доронина Е. И., Чечкин Г. А. О собственных колебаниях тела с большим количеством неперiodически расположенных концентрированных масс // Тр. МИАН. 2002. Т. 236. С. 158–166.
- [33] Rybalko V. Vibration of elastic systems with a large number of tiny heavy inclusions // Asymptotic Analysis. 2002. V. 32. № 1. P. 27–62.
- [34] Перес М. Е., Чечкин Г. А., Яблокова (Доронина) Е. И. О собственных колебаниях тела с “легкими” концентрированными массами на поверхности // УМН. 2002. Т. 57. № 6. С. 195–196.
- [35] Чечкин Г. А. О колебаниях тел с концентрированными массами, расположенными на границе // УМН. 1995. Т. 50. № 4. С. 105–106.
- [36] Чечкин Г. А. Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 6. С. 99–150.
- [37] Iosida K. Functional Analysis. New York: Springer-Verlag, 1965.
- [38] Гадыльшин Р. Р., Чечкин Г. А. Краевая задача для Лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области // Сиб. матем. ж. 1999. Т. 40. № 2. С. 271–287.
- [39] Кондратьев В. А., Олейник О. А. Об асимптотике в окрестности бесконечности решений с конечным интегралом Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. Т. 12. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 149–163.
- [40] Kondratiev V. A., Oleinik O. A. Asymptotic properties of the elasticity system // Proceedings of the International Conference “Application of Multiple Scaling in Mechanics”. Paris: Masson, 1987. P. 188–205.
- [41] Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: МГУ, 1990.
- [42] Олейник О. А., Чечкин Г. А. Окраевых задачах для эллиптических уравнений с быстро меняющимся типом граничных условий // УМН. 1993. Т. 48. № 6. С. 163–164.
- [43] Oleinik O. A., Chechkin G. A. On Asymptotics of Solutions and Eigenvalues of an Elliptic Problem with Rapidly Alternating Type of Boundary Conditions. Trieste: International Center for Theoretical Physics, SMR 719/4, 1993.
- [44] Олейник О. А., Чечкин Г. А. Об одной задаче граничного усреднения для системы теории упругости // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 114.
- [45] Oleinik O. A., Chechkin G. A. Solutions and eigenvalues of the boundary value problems with rapidly alternating boundary conditions for the system of elasticity. // Rend. Lincei Math. Appl. (9). 1996. V. 7. № 1. P. 5–15.
- [46] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: ИЛ, 1962.
- [47] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- [48] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
- [49] Соболев С. Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. М.: Наука, 1989.
- [50] Chechkin G. A., Pérez M. E., Yablokova E. I. On eigenvibrations of a body with many “light” concentrated masses located nonperiodically along the boundary // Preprint of Universidad de Cantabria Núm. 1/2002. Santander, Abril 2002.