Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Зелик, Ограниченность решений нелинейной эллиптической системы в цилиндрической области, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 447–450

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1520>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:30:51

ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

С. В. Зелик

В полуцилиндре $\Omega_+ = \mathbb{R}_+ \times \omega$, где ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей, рассматривается следующая эллиптическая система:

$$\begin{aligned} a(\partial_t^2 u + \Delta u) + \gamma \partial_t u - f(u, t) &= g(t), \\ u|_{t=0} &= u_0, \quad u|_{\partial\omega} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $u = u(t, x) = (u_1, \dots, u_k)$, $g = g(t, x)$, $f(u, t)$ – векторные функции, $(t, x) \in \Omega_+$, Δ – оператор Лапласа по переменной $x = (x_1, \dots, x_n)$, γ и a – постоянные матрицы ($\gamma, a \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$), причем $a = a^* > 0$. Предполагается, что g принадлежит пространству $[L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, L_p(\omega))]^k$ для некоторого $p > n + 1$ и имеет конечную норму

$$|g|_a = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|g, \Omega_t\|_{L_p} < \infty, \quad \text{где } \Omega_t = [t, t+1] \times \omega.$$

Нелинейная функция f удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} f &\in C(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^k), \\ f(u, t) \cdot u &\geq -C_1 + C_2 |u|^{2+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad C_2 > 0, \\ |f(u, t)| &\leq Q(|u|), \quad \text{где } Q: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ – монотонная функция.} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее, через $u \cdot v$ обозначается скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$. Начальное условие u_0 предполагается принадлежащим пространству

$$V_0 = [H_{2-1/p, p}(\omega) \cap H_{1, p}^0(\omega)]^k \quad (u_0 \in V_0)$$

(см. [1]).

Под решением задачи (1) будем понимать функцию u , принадлежащую пространству $[H_{2, p}(\Omega_t)]^k \quad \forall t > 0$, где $\Omega_t = [t, t+1] \times \omega$, и удовлетворяющую (1) в смысле равенства в $[L_p^{\text{loc}}(\Omega_+)]^k$. (Здесь и далее, через $H_{l, p}$ обозначается соболевское пространство функций, обобщенные производные которых до порядка l включительно принадлежат пространству L_p [2].) Множество всех решений задачи (1) в указанном выше смысле обозначим символом $\mathcal{V}(u_0)$.

Под ограниченным решением задачи (1) понимается решение u , дополнительно удовлетворяющее следующему условию:

$$\|u\|_a = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|u, \Omega_t\|_{H_{2, p}} < \infty.$$

Множество всех ограниченных решений задачи (1) обозначим символом $\mathcal{V}_a(u_0)$.

Ограниченные решения задачи (1) при различных условиях на нелинейную функцию f изучались многими авторами [3]–[5].

В работе [5] доказано, что при указанных выше условиях множество $\mathcal{V}_a(u_0)$ не пусто, и получена следующая оценка:

$$\|u, \Omega_T\|_{2, p} \leq R(\|u_0\|_{V_0}) e^{-\alpha T} + R(|g|_a). \quad (3)$$

Здесь $\alpha > 0$ и R – некоторая монотонная функция, не зависящая от u_0 .

Основной результат настоящей работы сформулируем в виде следующей теоремы.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96–01–00354.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены перечисленные выше условия. Тогда $\mathcal{V}(u_0) = \mathcal{V}_a(u_0)$ и справедлива следующая оценка, усиливающая оценку (3):

$$\|u, \Omega_T\|_{2,p} \leq R(\|u_0\|_{V_0})\chi(T_0 - T) + R(|g|_a). \quad (4)$$

Здесь $\chi(z)$ — функция Хевисайда, равная нулю при $z \leq 0$ и единице при $z > 0$, а $T_0 = T_0(f, |g|_a) > 0$ — некоторое число, не зависящее от u_0 .

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений, имеющих и некоторый самостоятельный интерес.

ЛЕММА 1. Пусть $u_0 \in \mathcal{V}(u_0)$ и $y(t) = (|u|^p, 1)$, где (u, v) — скалярное произведение в пространстве $L_2(\omega)$, $|u| = [au \cdot u]^{1/2}$. Тогда $y''(t) \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и удовлетворяет неравенству

$$y''(t) - \beta^2 y(t)|y(t)|^\alpha \geq h(t) \quad (5)$$

при некоторых $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $h(t) = -C(1 + \|g(t)\|_{0,p}^p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая уравнение (1) скалярно на $|u|^{p-2}$ в $[L_2(\omega)]^k$, после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \partial_t^2 (|u|^p, 1) - \frac{4(p-2)}{p^2} (\|\partial_t |u|^{p/2}\|_{0,2}^2 + \|\nabla |u|^{p/2}\|_{0,2}^2) \\ = -(\gamma \partial_t u, u|u|^{p-2}) + (g, u|u|^{p-2}) + (f(u), u|u|^{p-2}) + (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2, |u|^{p-2}). \end{aligned} \quad (6)$$

Оценим снизу правую часть неравенства (6) при помощи неравенства Гёльдера и условия (2). Получим

$$\partial_t^2 (|u(t)|^p, 1) - C(|u(t)|^{p+\varepsilon}, 1) \geq h(t). \quad (7)$$

Оценим второе слагаемое формулы (7) с помощью неравенства Иенсена

$$(|u(t)|^{p+\varepsilon}, 1) = \int_\omega |u(t)|^{p+\varepsilon} dx = \int_\omega [|u(t)|^p]^{1+\varepsilon/p} dx \geq C(\omega) \left(\int_\omega |u(t)|^p dx \right)^{1+\varepsilon/p}. \quad (8)$$

Подставив оценку (8) в неравенство (7), получим оценку (5).

ЛЕММА 2. Пусть $y(t) \geq 0$, $y'' \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и удовлетворяет неравенству (5). Тогда

$$y(t) \leq C \left(y(0)\chi(t_0 - t) + 1 + \sup_{T \geq 0} \int_T^{T+1} |h(t)| dt \right).$$

Здесь C и t_0 не зависят от y .

Доказательство этого утверждения носит технический характер и потому здесь не приводится.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $u \in \mathcal{V}(u_0)$. Тогда справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{0,p} \leq C_1 (\chi(t_0 - t)\|u_0\|_{V_0} + 1 + |g|_a + 1), \quad C_1 > 0.$$

ЛЕММА 3. Пусть $u \in \mathcal{V}(u_0)$. Тогда при $T \geq 1$ справедлива оценка

$$\|u, \Omega_T\|_{0,\infty} \leq C(1 + \|u, \Omega_{T-1,T+2}\|_{0,p} + |g|_a). \quad (9)$$

Здесь $\Omega_{T-1,T+2} = [T-1, T+2] \times \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (1) скалярно на $u|u|^{q-2}$ в $[L_2(\omega)]^k$ ($q \geq 2$). Рассуждая так же, как и при выводе формул (6) и (7), получим

$$\|\partial_t |u|^{q/2}\|_{0,2}^2 + \|\nabla |u|^{q/2}\|_{0,2}^2 \leq Cq(\partial_t^2(|u|^q, 1) + (g, u|u|^{q-2}) + (|u|^p, 1)). \quad (10)$$

Рассмотрим теперь семейство областей $G^m = [T - 2^{-m}, T + 1 + 2^{-m}]$, $m \geq 0$, $\Omega^m = G^m \times \omega$ и семейство срезающих функций $\varphi_m(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ таких, что $\varphi_m(t) \equiv 1$ при $t \in G^{m+1}$ и $\varphi_m(t) \equiv 0$ при $t \notin G^m$. Очевидно, что семейство φ_m может быть выбрано так, чтобы $|\varphi_m''(t)| \leq C2^{2m}$, где C не зависит от m . Умножив соотношение (10) на $\varphi_m(t) \geq 0$, проинтегрировав по t и используя элементарную формулу

$$\varphi_m \partial_t^2 F = \partial_t(\varphi_m \partial_t F) - \partial_t(\varphi_m' F) + \varphi_m'' F, \quad F = (|u|^q, 1),$$

получим следующую оценку:

$$\| |u|^{q/2}, \Omega^{m+1} \|_{1,2}^2 \leq C_1 q 2^{2m} \left(1 + \|u, \Omega^m\|_{0,q}^q + \int_{\Omega^m} g \cdot u |u|^{q-2} dx dt \right). \quad (11)$$

Согласно теореме вложения С. Л. Соболева (см. [1])

$$\|u, \Omega^{m+1}\|_{q(n+1)/(n-1)}^q \leq C \| |u|^{q/2}, \Omega^{m+1} \|_{1,2}^2. \quad (12)$$

Оценивая последний интеграл в формуле (11) при помощи неравенства Гёльдера, получим

$$\int_{\Omega^m} g \cdot u |u|^{q-2} dx dt \leq |g|_a^q + \|u, \Omega^m\|_{0,q(n+1)/n}^q. \quad (13)$$

Подставив оценки (12) и (13) в неравенство (11), будем иметь

$$\|u, \Omega^{m+1}\|_{q(n+1)/(n-1)}^q \leq C_2 q 2^{2m} \left(\|u, \Omega^m\|_{0,q(n+1)/n}^q + (1 + |g|_a)^q \right). \quad (14)$$

Введем обозначение

$$W_l^m(u) = \max \left\{ \|u, \Omega^m\|_{0,l}, (1 + |g|_a) \right\}. \quad (15)$$

С учетом (15) после извлечения из (14) корня степени q , получим

$$W_{l(\delta+1)}^{m+1}(u) \leq [C_3 l 2^{2m}]^{(n+1)/(ln)} W_l^m(u). \quad (16)$$

Здесь $l = nq/(n+1)$, $\delta = 1(n-1)$.

Определим последовательность $l_m = p(\delta+1)^m$. Тогда из (16) следует оценка

$$W_{l_{m+1}}^{m+1}(u) \leq A_m W_{l_m}^m(u), \quad A_m = [C_3 l_m 2^{2m}]^{(1+1/n)/l_m}. \quad (17)$$

Итерируя неравенство (17) m раз, получим

$$\|u, \Omega^m\|_{0,l_m} \leq P_m (1 + |g|_a + \|u, \Omega^0\|_{0,p}), \quad P_m = A_0 \times \dots \times A_m.$$

Нетрудно проверить, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_m = C < \infty,$$

следовательно,

$$\|u, \Omega_T\|_{0,l_m} \leq C(1 + |g|_a + \|u, \Omega^0\|_{0,p}). \quad (18)$$

Так как $H_{2,p}(\Omega_T) \subset C(\Omega_T)$ согласно теореме вложения, то, переходя к пределу в формуле (18), получаем оценку (9).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $u \in \mathcal{V}(u_0)$. Тогда справедлива оценка

$$\|u, \Omega_T\|_{0,\infty} \leq C(\chi(t_0 - T)\|u_0\|_{V_0} + 1 + |g|_a). \quad (19)$$

ЛЕММА 4. Пусть $u \in \mathcal{V}(u_0)$. Тогда справедлива оценка

$$\|u, \Omega_T\|_{2,p} \leq R(\|u, \Omega_{T-1, T+2}\|_{0,\infty}) + C|g|_a. \quad (20)$$

Здесь $R: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – некоторая монотонная функция.

Доказательство этой леммы приведено в работе [5].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $u \in \mathcal{V}(u_0)$. Тогда, подставив оценку (19) в формулу (20), получаем оценку (4). Следовательно, $\mathcal{V}(u_0) \subset \mathcal{V}_a(u_0)$. Обратное включение очевидно. Теорема 1 доказана.

Приведем в заключение аналог оценки (4) для случая эллиптической системы в ограниченном цилиндре.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Omega = [0, M] \times \omega$ и $u \in [H_{2,p}(\Omega)]^k$ – решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} a(\partial_t^2 u + \Delta u) + \gamma \partial_t u - f(u, t) &= g(t), \\ u|_{t=0} &= u_0, \quad u|_{\partial\omega} = 0, \quad u|_{t=M} = u_M. \end{aligned}$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|u, \Omega_T\|_{2,p} \leq R(\|u_0\|_{V_0})\chi(T_0 - T) + R(\|u_M\|_{V_0})\chi(T - M + T_0) + R(|g|_a).$$

Институт проблем передачи информации РАН

Поступило

03.12.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
2. Соболев С. Л. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
3. Calsina A., Mora X., Sola-Morales J. // J. Differential Equations. 1993. V. 102. P. 244–304.
4. Бабин А. В. // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 2. С. 3–18.
5. Вишик М. И., Зелик С. В. // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 12. С. 21–56.