Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Карапетян, О минимуме модуля тригонометрических полиномов со случайными коэффициентами, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 451–455

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1521>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 18:00:38

О МИНИМУМЕ МОДУЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Г. Карапетян

Для независимых случайных величин $\xi_0, \dots, \xi_{n-1}$, каждая из которых равна $+1$ или -1 с вероятностью $1/2$, обозначим через $P(u)$ выражение

$$P(u) = P_n(u) = \Pr \left(\min_{x \in T} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \exp(ijx) \right| > u \right) \quad (u \geq 0).$$

Дж. Литтлвуд [1] предположил, что $P(\varepsilon\sqrt{n}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$. Б. С. Кашин [2] доказал эту гипотезу, установив, что $P(n^{1/2}(\log n)^{-1/3}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. А. М. Одлышко показал, что $P(n^{1/3+\varepsilon}) \rightarrow 0$ при любом $\varepsilon > 0$ и $n \rightarrow \infty$ и предположил, что при больших n и всяком $\varepsilon > 0$ для большинства полиномов

$$T(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \pm \exp(ijx)$$

выполнена оценка

$$\min_{x \in T} |T(x)| < n^{-1/2+\varepsilon}.$$

Эта гипотеза была доказана С. В. Конягиным [3], установившим, что $P(n^{-1/2+\varepsilon}) \rightarrow 0$ для любого $\varepsilon > 0$ и при $n \rightarrow \infty$.

В работе мы также рассматриваем полиномы типа

$$T(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \exp(ijx),$$

но уже для независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_j , $j = 0, \dots, n-1$, с конечными третьими моментами и с нулевыми средними. Для таких полиномов, считая, что второй момент случайных величин ξ_j , $j = 0, \dots, n-1$, не равен 0 (случай равенства 0 второго момента случайных величин ξ_j , $j = 0, \dots, n-1$, является тривиальным), доказываем теорему.

ТЕОРЕМА. Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ при $n > (16C_0(\xi))^{9936/\varepsilon^3}$

$$P(n^{-1/2+\varepsilon}) \leq \frac{1}{n^{\varepsilon^2/180}},$$

где $C_0(\xi) = 8(1/\gamma_0 + B + 1/A + 6M|\xi|^3 + 1/(M\xi^2))$, $M\xi^2$ – второй момент, $M|\xi|^3$ – третий абсолютный момент случайной величины ξ_j , $j = 0, \dots, n-1$, а A, B, γ_0 – положительные числа, удовлетворяющие соотношению

$$\Pr(A < \xi_1 - \xi_2 < B) = \gamma_0.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00378.

СЛЕДСТВИЕ. Для $n > (16C_0(\xi))^{9936}$

$$P\left(n^{-1/2+21.5(\ln(16C_0(\xi)))/\ln n}^{1/3}\right) \leq \frac{1}{e^{7.4(\ln n)^{1/3}}}.$$

Для описания доказательства теоремы введем обозначения. Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Выберем натуральное r так, чтобы выполнялось неравенство $10/\varepsilon < r < 12/\varepsilon$. Положим $\delta_1 = \varepsilon/2$, $\delta_2 = \varepsilon/(5r)$, $\delta_3 = \varepsilon/20$. Обозначим $h = n^{-1/2+\delta_1}$, $H = n^{1/2-\delta_2}$. Каждому набору целых чисел $(U_0, \dots, U_{r-1}, V_0, \dots, V_{r-1})$ сопоставим $2r$ -мерный куб

$$\Pi = \Pi(U_0, \dots, U_{r-1}, V_0, \dots, V_{r-1}) = \prod_{\rho=0}^{r-1} (U_\rho h, (U_\rho + 1)h] \times \prod_{\rho=0}^{r-1} (V_\rho h, (V_\rho + 1)h].$$

Семейство Φ и множество Ω определяются как в работе [3]. Обозначим через k_0 наибольшее простое, не превосходящее $n^{1-\delta_3}$, и пусть $k_1 = [k_0/2]$.

Для целого k и $x = x_k = 2\pi k/k_0$ рассмотрим событие E_k

$$\left(\operatorname{Re} T(x), \operatorname{Re} \left(\frac{T'(x)}{in} \right), \dots, \operatorname{Re} \left(\frac{T^{(r-1)}(x)}{(in)^{r-1}} \right), \right. \\ \left. \operatorname{Im} T(x), \operatorname{Im} \left(\frac{T'(x)}{in} \right), \dots, \operatorname{Im} \left(\frac{T^{(r-1)}(x)}{(in)^{r-1}} \right) \right) \in \Omega.$$

Обозначим через G_0 событие

$$\max_{s \in T} |T^{(r)}(s)| < n^{r+2}.$$

Далее, будем считать, что $n > (16C_0(\xi))^{9936/\varepsilon^3}$. Имеют место следующие утверждения.

ЛЕММА 1. Если при некотором k , $0 < k < k_0/2$, произошло событие $E_k \cap G_0$, то

$$\min_{s \in [x_k - \Delta, x_k + \Delta]} |T(s)| \leq n^{-1/2+\varepsilon},$$

где $\Delta = n^{-1-\delta_1}$.

ЛЕММА 2. Имеет место неравенство

$$\Pr(G_0) > 1 - \frac{1}{n^{3/2}}.$$

ЛЕММА 3. Имеет место неравенство

$$\Pr\left(\min_{s \in T} |T(s)| > n^{-1/2+\varepsilon}\right) < 1 - \Pr\left(\bigcup_{k=1}^{k_1} E_k\right) + \frac{1}{n^{3/2}}.$$

ЛЕММА 4. *Имеет место неравенство*

$$V_{\Omega} n^{-r} k_0 > \frac{\pi^{r-1}}{88 \cdot 4^r} \cdot n^{\varepsilon/20},$$

где V_{Ω} – объем множества Ω .

Рассмотрим случайные векторы X_j , $j = 0, \dots, n-1$, для $x = x_k = 2\pi k/k_0$, где k – фиксированное число, $0 < k < k_0/2$,

$$X_j = \xi_j \left(\cos(jx), \cos(jx) \left(\frac{j}{n} \right), \dots, \cos(jx) \left(\frac{j}{n} \right)^{r-1}, \right. \\ \left. \sin(jx), \sin(jx) \left(\frac{j}{n} \right), \dots, \sin(jx) \left(\frac{j}{n} \right)^{r-1} \right)$$

и определим для них ковариационную матрицу [4, с. 72]

$$V = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \text{Cov}(X_j).$$

Обозначим через f характеристическую функцию случайного вектора

$$X = \sum_{j=0}^{n-1} X_j.$$

Разобьем $\mathbb{R}^{2r}$ на три множества: $\mathbb{R}^{2r} = (I) \cup (II) \cup (III)$, где

$$(I) = \{\omega : \|\omega\| \leq n^{-1/2+1/7}\}, \quad (II) = \{\omega : n^{-1/2+1/7} < \|\omega\| \leq n^{1/2}\}, \\ (III) = \{\omega : \|\omega\| > n^{1/2}\}.$$

Для характеристической функции f устанавливаются следующие оценки:

$$\left| f(\omega) - \exp\left\{-\frac{n}{2}\langle\omega, V\omega\rangle\right\} \right| \leq \begin{cases} \frac{1}{n^{1/15}} \exp\left\{-\frac{n}{2}\langle\omega, V\omega\rangle\right\} & \text{при } \omega \in (I), \\ |f(\omega)| \leq \exp(-n^{1/7}) & \text{при } \omega \in (II). \end{cases}$$

Для доказательства первой оценки используются теорема 8.4 [4], а также неравенства, полученные для произвольных многочленов P и Q степени $r-1$, заданных на отрезке $[0, 1]$,

$$\sum_{j=0}^{r-1} |a_j|^2 \leq 9^{2r} \int_0^1 P^2(t) dt,$$

где $a_0, \dots, a_{r-1}$ – коэффициенты P ,

$$\frac{1}{4} (\|P\|_{L_2}^2 + \|Q\|_{L_2}^2) \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\cos(jx) P\left(\frac{j}{n}\right) + \sin(jx) Q\left(\frac{j}{n}\right) \right]^2 \leq \frac{3}{4} (\|P\|_{L_2}^2 + \|Q\|_{L_2}^2).$$

Далее, мы доказываем лемму.

ЛЕММА 5. *Справедлива оценка*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{2r}} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \langle \omega, V \omega \rangle \right\} d\omega - \frac{\gamma_r}{n^r} \right| \leq \frac{\gamma_r}{n^r} \cdot \frac{1}{n^{\delta_3/2}},$$

где

$$\gamma_r = \frac{(2\pi)^r}{(\det V^1)^{1/2}}, \quad V^1 = \begin{pmatrix} V^0 & 0 \\ 0 & V^0 \end{pmatrix},$$

а V^0 – матрица с элементами

$$v_{\rho, \rho'}^0 = \frac{M \xi^2}{2(\rho + \rho' + 1)}, \quad 0 \leq \rho < r, \quad 0 \leq \rho' < r.$$

Положим для $t \in [0, 1]$

$$\varphi(t) = - \int_0^t x^{2r^2} (1-x)^{2r^2} dx \Big/ \int_0^1 x^{2r^2} (1-x)^{2r^2} dx + 1$$

и

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{на } [0, 1], \\ \varphi(-t) & \text{на } [-1, 0), \\ 0 & \text{на } (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Тогда $\psi \in C^{2r^2}(-\infty, \infty)$ – четная неотрицательная функция с носителем на $[-1, 1]$, не превосходящая 1, с единичным интегралом. Далее, рассматриваем $2r$ -мерный куб Π с ребрами, параллельными координатным осям и равными h , содержащийся в кубе $[-H, H]^{2r}$, и куб Π_1 – образ Π при гомотетии с центром в центре Π и коэффициентом $(n^{\delta_2} + 1)/n^{\delta_2}$. По аналогии с [3] с помощью ψ определяются $\psi_\Pi, \Psi_\Pi, F_\Pi, \psi_{\Pi_1}, \Psi_{\Pi_1}, F_{\Pi_1}$. Далее, устанавливаем неравенство

$$\frac{1}{(2\pi)^{2r}} \cdot \frac{1}{\Psi_\Pi} \int_{\mathbb{R}^{2r}} f(\omega) F_\Pi(-\omega) d\omega \leq \Pr(X \in \Pi) \leq \frac{1}{(2\pi)^{2r}} \cdot \frac{1}{\Psi_{\Pi_1}} \int_{\mathbb{R}^{2r}} f(\omega) F_{\Pi_1}(-\omega) d\omega,$$

а с помощью оценок для функции f и леммы 5 неравенства

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^{2r}} f(\omega) F_\Pi(-\omega) d\omega - \frac{\gamma_r}{n^r} \right| &\leq \frac{\gamma_r}{n^r} \cdot \frac{1}{n^{2\delta_2/3}}, \\ \left| \int_{\mathbb{R}^{2r}} f(\omega) F_{\Pi_1}(-\omega) d\omega - \frac{\gamma_r}{n^r} \right| &\leq \frac{\gamma_r}{n^r} \cdot \frac{1}{n^{2\delta_2/3}}, \end{aligned}$$

с помощью которых получаем неравенство

$$\left| \Pr(X \in \Pi) - \frac{\gamma_r}{n^r} \cdot \frac{V_\Pi}{(2\pi)^{2r}} \right| \leq \frac{\gamma_r}{n^r} \cdot \frac{V_\Pi}{(2\pi)^{2r}} \cdot \frac{1}{n^{\delta_2/2}} \quad (V_\Pi = h^{2r}),$$

из которого выводятся оценки для вероятностей событий E_k , $1 \leq k \leq k_1$,

$$|\Pr(E_k) - \Gamma| \leq \frac{\Gamma}{n^{\delta_2/2}},$$

где

$$\Gamma = \frac{\gamma_r}{(2\pi)^{2r}} \cdot \frac{V_\Omega}{n^r}.$$

Рассматривая попарные объединения Y векторов X [3], мы устанавливаем оценки для характеристических функций векторов Y , с помощью которых получаем неравенство

$$\left| \Pr(Y \in \Pi \times \Pi') - \left(\frac{\gamma_r}{n^r} \cdot \frac{V_\Pi}{(2\pi)^{2r}} \right)^2 \right| \leq \left(\frac{\gamma_r}{n^r} \cdot \frac{V_\Pi}{(2\pi)^{2r}} \right)^2 \cdot \frac{1}{n^{\delta_2/2}},$$

где $\Pi, \Pi' - 2r$ -мерные кубы с ребрами, параллельными координатным осям и равными h , содержащиеся в кубе $[-H, H]^{2r}$. Отсюда получаются оценки для вероятностей попарных пересечений $E_i \cap E_j$, $1 \leq i < j \leq k_1$,

$$|\Pr(E_i \cap E_j) - \Gamma^2| \leq \Gamma^2 \frac{1}{n^{\delta_2/2}}.$$

С помощью оценок $\Pr(E_k)$ и $\Pr(E_i \cap E_j)$, используя метод нормального порядка [3], мы устанавливаем соотношение

$$1 - \Pr\left(\bigcup_{k=1}^{k_1} E_k\right) \leq \frac{14}{n^{\delta_2/2}},$$

откуда с помощью леммы 3 завершаем доказательство теоремы.

Автор благодарит С. В. Конягина за полезные обсуждения и ценные рекомендации.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10.11.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Littlewood J. E. // J. London Math. Soc. 1966. V. 41. P. 367–376.
2. Кашин Б. С. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1987. № 5. С. 40–46.
3. Конягин С. В. // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 3. С. 80–101.
4. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982.