Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Н. Мирошин, Асимптотическая оценка интеграла от произведения двух модифицированных бесселевых функций и степенной функции, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 456–458

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1522>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 12:30:48

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛА ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ МОДИФИЦИРОВАННЫХ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ И СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

Р. Н. Мирошин

Найдем главный член асимптотики при $\rho \uparrow 1$ интеграла

$$I_a^\rho(\mu, \nu) = \int_0^\infty x^{-\rho} K_{i\mu}(x) K_{i\nu}(ax) dx, \quad (1)$$

в котором $K_{i\mu}(x)$ – модифицированная функция Бесселя [1], $a > 0$, $\mu > 0$, $\nu > 0$. С необходимостью вычисления (1) для $\rho \uparrow 1$, $a \neq 1$ мы встретились при упрощении континуального интеграла, представляющего функцию распределения числа нулей гауссовского марковского процесса первого порядка на конечном интервале времени [2], [3]. В случае $a = 1$ асимптотика интеграла (1) при $\rho \uparrow 1$ известна давно (она лежит в основе преобразования Конторовича–Лебедева [4])

$$I_1^\rho(\mu, \nu) \rightarrow \frac{\pi^2}{2\mu \operatorname{sh} \pi\mu} \delta(\nu - \mu), \quad (2)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция. В настоящей заметке мы выводим формулу, обобщающую (2) на случай произвольного $a > 0$. Надеемся, что она (как и преобразование Конторовича–Лебедева) будет полезна не только в теории вероятностей.

В результат войдут обобщенные функции $\delta(x)$ и $\operatorname{Vp} \frac{1}{x}$, определяемые как линейные функционалы на пространстве K бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ с компактными носителями [5],

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \int_R \varphi(x) \delta(x) dx = \varphi(0), \quad \varphi(x) \in K,$$

$$\left(\operatorname{Vp} \frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \int_R \varphi(x) \operatorname{Vp} \frac{1}{x} dx = \operatorname{Vp} \int_R \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi(x) \in K,$$

где $R = (-\infty, \infty)$, а символом Vp перед интегралом обозначается главное его значение в смысле Коши

$$\operatorname{Vp} \int_\alpha^\beta \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_\varepsilon^\beta \frac{\varphi(x)}{x} dx \right), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

ТЕОРЕМА. При $\rho \uparrow 1$, $a > 0$, $\mu > 0$, $\nu > 0$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} I_a^\rho(\mu, \nu) \rightarrow & \frac{\pi}{(\mu + \nu) \operatorname{sh}(\pi(\mu + \nu)/2)} \left[\pi \delta(\nu - \mu) \cos\left(\frac{\mu + \nu}{2} \ln a\right) \right. \\ & \left. + \sin\left(\frac{\mu + \nu}{2} \ln a\right) \operatorname{Vp} \frac{1}{\nu - \mu} + f_a(\mu, \nu) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

в котором

$$f_a(\mu, \nu) = \int_0^1 \sin\left[\frac{\nu - \mu}{2} \ln x + \frac{\nu + \mu}{4} \ln \frac{a(x + a)}{1 + ax}\right] \sin\left[\frac{\nu + \mu}{4} \ln \frac{a(1 + ax)}{x + a}\right] \frac{dx}{x},$$

а предел понимается как

$$\lim_{\rho \uparrow 1} (I_a^\rho(\mu, \nu), \varphi(\nu)), \quad \varphi(\nu) \in K.$$

Очевидно, формула (2) – частный случай (3) при $a = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [1, с. 736, № 6648]

$$K_{i\mu}(x)K_{i\nu}(ax) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\nu-\mu)t} \left(\frac{e^t + ae^{-t}}{e^{-t} + ae^t} \right)^{i(\mu+\nu)/2} K_{i(\mu+\nu)}(xb) dt, \quad (4)$$

где $b = \sqrt{1 + 2a \operatorname{ch} 2t + a^2}$. Подставив (4) в (1), обозначив $\alpha = (1 - \rho)/2$, $\beta = (\nu - \mu)/2$, $\gamma = (\nu + \mu)/2$ и поменяв местами порядок интегрирования по x и t , имеем

$$I_a^\rho(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{2it\beta} \left(\frac{e^t + ae^{-t}}{e^{-t} + ae^t} \right)^{i\gamma} \int_0^\infty dx x^{-\rho} K_{i2\gamma}(xb). \quad (5)$$

Внутренний интеграл в (5) – табличный [1, с. 698, № 6561.16]

$$\int_0^\infty x^{-\rho} K_{i2\gamma}(xb) dx = 4^{\alpha-1} b^{-2\alpha} \Gamma(\alpha + i\gamma) \Gamma(\alpha - i\gamma), \quad (6)$$

и поэтому из (5) следует

$$I_a^\rho(\mu, \nu) = 4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha + i\gamma) \Gamma(\alpha - i\gamma) F_a^\alpha(\beta, \gamma),$$

$$F_a^\alpha(\beta, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2it\beta} \psi_a^\gamma(e^t) dt}{(1 + 2a \operatorname{ch} 2t + a^2)^\alpha}, \quad \psi_a^\gamma(t) = \left(\frac{x^2 + a}{1 + ax^2} \right)^{i\gamma}. \quad (7)$$

При $\alpha \downarrow 0$ знаменатель в (7) ведет себя как $a^\alpha e^{2\alpha|t|} (1 + o(1))$, так что при $\alpha \downarrow 0$

$$F_a^\alpha(\beta, \gamma) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2it\beta - 2|t|\alpha) \psi_a^\gamma(e^t) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-2t\alpha} \left[e^{2it\beta} \psi_a^\gamma(e^t) + \frac{e^{-2it\beta}}{\psi_a^\gamma(e^t)} \right] dt. \quad (8)$$

Заменим в (8) переменную интегрирования по формуле $e^{-2t} = x$. Получим

$$2F_a^\alpha(\beta, \gamma) \sim \int_0^1 x^{\alpha-1} \left\{ x^{-i\beta} \left(\frac{1+ax}{x+a} \right)^{i\gamma} + x^{i\beta} \left(\frac{1+ax}{x+a} \right)^{-i\gamma} \right\} dx. \quad (9)$$

Подынтегральная функция в (9) имеет особенность при $x = 0$. Регуляризуем эту функцию в точке $x = 0$, прибавив к фигурной скобке и вычтя из нее ее значение при $x = 0$,

$$2F_a^\alpha(\beta, \gamma) \sim \int_0^1 x^{\alpha-1} (x^{-i\beta} a^{-i\gamma} + x^{i\beta} a^{i\gamma}) dx + \varphi_a^\alpha(\beta, \gamma)$$

$$= \frac{a^{-i\gamma}}{\alpha - i\beta} + \frac{a^{i\gamma}}{\alpha + i\beta} + \varphi_a^\alpha(\beta, \gamma), \quad (10)$$

где

$$\varphi_a^\alpha(\beta, \gamma) = \int_0^1 x^\alpha \left\{ x^{-i\beta-1} \left[\left(\frac{1+ax}{x+a} \right)^{i\gamma} - a^{-i\gamma} \right] + x^{i\beta-1} \left[\left(\frac{1+ax}{x+a} \right)^{-i\gamma} - a^{i\gamma} \right] \right\} dx. \quad (11)$$

Переходя к пределу $\alpha \downarrow 0$ в (11), получаем из (10), (11)

$$2F_a^\alpha(\beta, \gamma) \sim \frac{2\alpha \cos(\gamma \ln a)}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{2\beta \sin(\gamma \ln a)}{\alpha^2 + \beta^2} + \varphi_a^0(\beta, \gamma), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \varphi_a^0(\beta, \gamma) &= 2 \int_0^1 \left[\cos\left(\beta \ln x - \gamma \ln \frac{1+ax}{x+a}\right) - \cos(\beta \ln x + \gamma \ln a) \right] \frac{dx}{x} \\ &= 4 \int_0^1 \sin\left[\beta \ln x + \frac{\gamma}{2} \ln \frac{a(x+a)}{1+ax}\right] \sin\left[\frac{\gamma}{2} \ln \frac{a(1+ax)}{x+a}\right] \frac{dx}{x}. \end{aligned} \quad (13)$$

В окрестности точки $x = 0$ имеем в (13)

$$\frac{a(1+ax)}{x+a} \sim 1 + \frac{a^2-1}{a}x, \quad \ln \frac{a(1+ax)}{x+a} \sim x \frac{|a^2-1|}{a} \operatorname{sign}(a^2-1).$$

Поэтому для $x \in [0, 1]$

$$\left| \frac{1}{x} \sin\left[\frac{\gamma}{2} \ln \frac{a(1+ax)}{x+a}\right] \right| \leq \operatorname{const} < \infty,$$

так что интеграл (13) конечен.

Вернемся к (12). Известно [3, с. 52, 414], что при $\alpha \downarrow 0$

$$\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \rightarrow \pi\delta(\beta), \quad \frac{1}{i\alpha \pm \beta} \rightarrow \pm \operatorname{Vp} \frac{1}{\beta} - i\pi\delta(x).$$

Поэтому

$$\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta + i\alpha} + \frac{1}{\beta - i\alpha} \right) \rightarrow \operatorname{Vp} \frac{1}{\beta},$$

и мы получаем из (12) при $\alpha \downarrow 0$

$$F_a^\alpha(\beta, \gamma) \rightarrow \pi\delta(\beta) \cos(\gamma \ln a) + \sin(\gamma \ln a) \operatorname{Vp} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{2} \varphi_a^0(\beta, \gamma). \quad (14)$$

Так как при $\alpha \downarrow 0$ [4, с. 17]

$$\Gamma(\alpha - i\gamma)\Gamma(\alpha + i\gamma) \rightarrow \Gamma(-i\gamma)\Gamma(i\gamma) = \frac{\pi}{\gamma \operatorname{sh} \pi\gamma}, \quad (15)$$

то, подставляя (14), (15) в (6) и раскрывая β и γ через μ и ν , приходим к утверждению теоремы.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступило

12.09.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
2. Мирошин Р. Н. // Теория вероятн. и ее примен. 1981. Т. 26. № 1. С. 101–120.
3. Мирошин Р. Н. Пересечения кривых гауссовскими процессами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.
4. Бейтмен Г., Эрлей А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965.
5. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978.
6. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Вып. 1. М.: Физматгиз, 1959.