Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Самирипур, К. Седдики, Распределение собственных значений несамосопряженных эллиптических систем, возникающих на границе области, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 463–467

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1524>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:54:14

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

А. Самирипур, К. Седдики

1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, $\partial\Omega \in C^\infty$. Введем пространство $\mathcal{H}_l = W_{2,\alpha}^2(\Omega)^l$ вектор-функций $u(x) = (u_1(x), \dots, u_l(x))$, определенных в Ω , с конечной нормой

$$|u|_+ = \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) |u'_{x_i}(x)|_{\mathbb{C}^l}^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|_{\mathbb{C}^l}^2 dx \right)^{1/2}.$$

Здесь число $\alpha \in [0, 1)$, $\rho(x) = \text{dist}\{x, \partial\Omega\}$. Обозначим через $\mathring{\mathcal{H}}_l$ замыкание $C_0^\infty(\Omega)^l$ в $\mathcal{H}_l$. При $l = 1$ положим $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$, $\mathring{\mathcal{H}} = \mathring{\mathcal{H}}_1$.

В этой работе исследуется асимптотическое распределение собственных значений (СЗ) оператора

$$Au = - \sum_{i,j=1}^n (\rho^{2\alpha}(x) a_{ij}(x) q(x) u'_{x_i}(x))'_{x_j},$$

заданного в пространстве $H_l = L_2(\Omega)^l$. Область определения оператора A задается следующим образом:

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in \mathring{\mathcal{H}}_l \cap W_{2,\text{loc}}^2(\Omega)^l : \sum_{i,j=1}^n (\rho^{2\alpha} a_{ij} q u'_{x_i})'_{x_j} \in H_l \right\}.$$

Сформулируем условия на $q(x)$, $a_{ij}(x)$ ($i, j = \overline{1, n}$). Предположим, что

$$\begin{aligned} q(x) &\in C^2(\overline{\Omega}; \text{End } \mathbb{C}^l), \quad a_{ij}(x) \equiv \overline{a_{ji}(x)} \quad (i, j = \overline{1, n}), \\ a_{ij}(x) &\in C^2(\overline{\Omega}) \quad (i, j = \overline{1, n}), \quad |s|^2 \leq M \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) s_i \bar{s}_j \quad (x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{C}^n). \end{aligned}$$

Далее, предположим, что при любом $x \in \overline{\Omega}$ матрица $q(x)$ имеет простые СЗ $\mu_1(x), \dots, \mu_l(x)$, расположенные в комплексной плоскости следующим образом:

$$\arg \mu_j(x) \equiv 0 \quad (j = \overline{1, \nu}), \quad \mu_j(x) \notin \overline{\Phi} \quad (j = \overline{\nu+1, l}),$$

где $\Phi = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \varphi\}$, $\varphi \in (0, \pi)$, $\nu \in \{1, \dots, l\}$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Оператор A имеет дискретный спектр. Для любого $\psi \in (0, \varphi)$ справедлива оценка*

$$\|(A - \lambda E)^{-1}\| \leq M_\psi |\lambda|^{-1} \quad (\lambda \in \Phi_\psi, \quad |\lambda| \geq C_\psi),$$

где $M_\psi, C_\psi > 0$ – достаточно большие числа,

$$\Phi_\psi = \{z \in \mathbb{C} : \psi \leq |\arg z| \leq \varphi\}. \quad (1)$$

Символ $\|\cdot\|$ обозначает норму ограниченного оператора, заданного в $H = H_1$ или H_l .

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ последовательность СЗ оператора A , расположенных в угле Φ и занумерованных в порядке убывания их модулей (с учетом алгебраических кратностей СЗ). Согласно теореме 1 оператор A в любом множестве $\Phi_\psi, \psi \in (0, \varphi)$, вида (1) имеет конечное число СЗ. Отсюда нетрудно вывести, что

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \arg \lambda_j = 0. \quad (2)$$

В случае $\omega \in \max\{n/2, (n-1)/(2-2\alpha)\} \in \mathbb{N}$ дополнительно предположим, что существуют различные числа $\psi_{\nu+1}, \dots, \psi_l \in (\varphi, \pi] \cup (-\pi, -\varphi)$ такие, что $\arg \mu_j(x) \equiv \psi_j$ ($j = \overline{\nu+1, l}, x \in \overline{\Omega}$).

Положим $N(t) = \text{card}\{j : |\lambda_j| \leq t\}, t > 0$. Основной результат статьи сформулирован в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *пусть $\alpha < 1/n$, тогда*

$$N(t) \sim (2\pi)^{-n} v_n t^{n/2} \int_{\Omega} \rho^{-n\alpha}(x) \mu(x) (\det a(x))^{-1/2} dx,$$

где v_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$,

$$a(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n, \quad \mu(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \mu_k^{-n/2}(x);$$

(ii) *если $\alpha = 1/n$, то*

$$N(t) \sim \frac{nv_n}{(2n-2)(2\pi)^n} t^{n/2} \log t \int_{\partial\Omega} \frac{\mu(x) dS}{\sqrt{\det a(x)}};$$

(iii) *в случае $\alpha > 1/n$*

$$N(t) \sim \frac{v_{n-1}}{(2\pi)^{n-1}} t^\delta w \int_{\partial\Omega} \mu_0(x) (\det a(x))^{-1/2} \langle a(x)f(x), f(x) \rangle_{\mathbb{C}^n}^{n/2-\delta} dS,$$

где

$$\delta = \frac{n-1}{2-2\alpha}, \quad \mu_0(x) = \sum_{j=1}^{\nu} \mu_j^{-\delta}(x), \quad w = \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_j^{-\delta}(x),$$

β_j – СЗ уравнения $-(\tau^{2\alpha} y'(\tau))' + \tau^{2\alpha} y(\tau) = \beta y(\tau), \tau \in \mathbb{R}_+, y \in L_2(\mathbb{R}_+), y(0) = 0, f(x)$ – единичный вектор нормали к $\partial\Omega$ в точке x .

Спектральная асимптотика несамосопряженного эллиптического дифференциального оператора A при условиях, аналогичных сформулированным выше, ранее изучалась только в случае слабого вырождения [1]–[3], т.е. в случае $\alpha < 1/n$. В работах [1], [2] предполагается, что $n = 1$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1, 2 основывается на оценках резольвенты оператора P_k , $k = \overline{1, l}$, заданного в H следующим образом:

$$(P_k y)(x) = - \sum_{i,j=1}^n (\rho^{2\alpha}(x) a_{ij}(x) \mu_k(x) y'_{x_i}(x))'_{x_j},$$

$$\mathcal{D}(P_k) = \left\{ y \in \mathring{\mathcal{H}} \cap W_{2,\text{loc}}^2(\Omega) : \sum_{i,j=1}^n (\rho^{2\alpha} a_{ij} \mu_k y'_{x_i})'_{x_j} \in H \right\},$$

СЗ матрицы $q(x)$ занумерованы так, что $\mu_k(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $k = \overline{1, l}$.

Для $k \in \{\nu + 1, \dots, l\}$ построим неотрицательные функции $\varphi_{k1}(x), \dots, \varphi_{km}(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, обладающие следующими свойствами:

$$\sum_{i=1}^m \varphi_{ki}^2(x) \equiv 1 \quad (x \in \overline{\Omega}), \quad |\arg\{\mu_k(x_1) \mu_k^{-1}(x_2)\}| < \frac{\pi}{16} \quad (\forall x_1, x_2 \in \text{supp } \varphi_{kj})$$

для любого $j \in \{1, \dots, m\}$. Будем считать, что $\varphi < \pi/16$. Построим функцию $\mu_{kr}(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, обладающую следующими свойствами:

$$\mu_{kr}(x) = \mu_k(x) \quad (\forall x \in \text{supp } \varphi_{kr}), \quad \mu_{kr}(x) \notin \overline{\Phi} \quad (\forall x \in \overline{\Omega}),$$

$$|\arg\{\mu_{kr}(x_1) \mu_{kr}^{-1}(x_2)\}| \leq \frac{\pi}{8} \quad (\forall x_1, x_2 \in \overline{\Phi}).$$

Для любых $k \in \{\nu + 1, \dots, l\}$, $r \in \{1, \dots, m\}$ найдется число $z_{kr} \in \mathbb{C}$, $|z_{kr}| = 1$, такое, что

$$c' \leq \text{Re}\{z_{kr} \mu_{kr}(x)\}, \quad c' |\lambda| \leq -\text{Re}\{z_{kr} \lambda\}, \quad c' > 0, \quad (3)$$

для всех $x \in \overline{\Omega}$, $\lambda \in \overline{\Phi}$. Введем оператор P_{kr} в H :

$$(P_{kr} y)_x = - \sum_{i,j=1}^n (\rho^{2\alpha}(x) a_{ij}(x) \mu_{kr}(x) y'_{x_i}(x))'_{x_j},$$

$$\mathcal{D}(P_{kr}) = \left\{ y \in \mathring{\mathcal{H}} \cap W_{2,\text{loc}}^2(\Omega) : \sum_{i,j=1}^n (\rho^{2\alpha} a_{ij} \mu_{kr} y'_{x_i})'_{x_j} \in H \right\}.$$

Обозначим

$$I(y) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) |y'_{x_i}(x)|^2 dx.$$

Так как

$$c \sum_{i=1}^n |y'_{x_i}(x)|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) y'_{x_i}(x) \overline{y'_{x_j}(x)} = \langle a(x) \nabla_x y(x), \nabla_x y(x) \rangle_{\mathbb{C}^n}, \quad c > 0,$$

то для $y \in \mathcal{D}(P_{kr})$ ($k = \overline{\nu + 1, l}$) в силу (3) имеем

$$I(y) \leq M_1 \text{Re} \left\{ z_{kr} \sum_{i,j=1}^n (\rho^\alpha a_{ij} \mu_{kr} y'_{x_i}, \rho^\alpha y'_{x_j}) \right\} = M_1 \text{Re} \{ z_{kr} (P_{kr} y, y) \},$$

где символом $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в H . Далее, из (3) для $\lambda \in \overline{\Phi}$ находим

$$\begin{aligned} I(y) + |\lambda| \cdot |y|_H^2 &\leq M_2 \operatorname{Re}((z_{kr} P_{kr} - \lambda z_{kr} E)y, y) \leq M_2 |y|_H |(P_{kr} - \lambda E)y|_H, \\ I(y) &\leq M_2 |y|_H \cdot |P_{kr} y|_H. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$\|(P_{kr} - \lambda E)^{-1}\| \leq M |\lambda|^{-1}, \quad \|P_{kr}(P_{kr} - \lambda E)^{-1}\| \leq M \quad (\lambda \in \overline{\Phi}, \lambda \neq 0). \quad (5)$$

Полагая в (4) $y = (P_{kr} - \lambda E)^{-1}f$, $f \in H$, получим

$$\left| \rho^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} (P_{kr} - \lambda E)^{-1} f \right|_H \leq M |f|_H \cdot |(P_{kr} - \lambda E)^{-1} f|_H \leq M' |\lambda|^{-1} \cdot |f|_H^2, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Отсюда согласно неравенству Харди заключаем, что

$$\|\rho^{2\alpha-1}(P_{kr} - \lambda E)^{-1}\| \leq M_3 \sum_{i=1}^n \left\| \rho^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} (P_{kr} - \lambda E)^{-1} \right\| \leq M'_3 |\lambda|^{-1/2}. \quad (7)$$

Введем в пространстве $\mathcal{H}_l$ оператор

$$G_k(\lambda) = \sum_{r=1}^m \varphi_{kr} (P_{kr} - \lambda E)^{-1} \varphi_{kr} \quad (k = \overline{\nu+1, l}).$$

Здесь φ_{kr} понимается как оператор умножения на функцию $\varphi_{kr}(x)$. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} (P_k - \lambda E)G_k(\lambda) &= E + \rho^{2\alpha-1}(x) \sum_{r=1}^m \beta_{kr}(x) (P_{kr} - \lambda E)^{-1} \varphi_{kr} \\ &\quad + \rho^{2\alpha}(x) \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m \gamma_{kir}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} (P_{kr} - \lambda E)^{-1} \varphi_{kr}, \end{aligned}$$

где $\beta_{kr}(x), \gamma_{kir}(x) \in L_\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp} \beta_{kr}, \operatorname{supp} \gamma_{kir} \subset \operatorname{supp} \varphi_{kr}$. Применяя (5)–(7), получим

$$\|(P_k - \lambda E)G_k(\lambda) - E\| \leq M |\lambda|^{-1/2} \quad (\lambda \in \overline{\Phi}, |\lambda| \geq 1).$$

Таким образом, при $k = \overline{\nu+1, l}$ справедливо представление

$$(P_k - \lambda E)^{-1} = G_k(\lambda) (E + F_k(\lambda)), \quad \|F_k(\lambda)\| \leq M |\lambda|^{-1/2} \quad (\lambda \in \overline{\Phi}, |\lambda| \geq C_0). \quad (8)$$

Заметим, что так как $\mu_k(x) = \overline{\mu_k(x)} > 0$ ($k = \overline{1, \nu}, x \in \overline{\Omega}$), то $P_k = P_k^* \geq 0$ ($k = \overline{1, \nu}$). Оценки резольвенты оператора P_k в этом случае хорошо известны.

Далее, мы используем диагональный вид матрицы $q(x)$:

$$\begin{aligned} q(x) &= U(x) \Lambda(x) U^{-1}(x), \quad \Lambda(x) = \operatorname{diag}\{\mu_1(x), \dots, \mu_l(x)\}, \\ U(x), U^{-1}(x) &\in C^2(\overline{\Omega}; \operatorname{End} \mathbb{C}^l). \end{aligned}$$

Положим $\Gamma(\lambda) = U \mathcal{B}(\lambda) U^{-1}$, где оператор $\mathcal{B}(\lambda)$ в прямом произведении $H_l = H \oplus \dots \oplus H$ (l раз) определяется по формуле $\mathcal{B}(\lambda) = \operatorname{diag}\{(P_1 - \lambda E)^{-1}, \dots, (P_l - \lambda E)^{-1}\}$. Здесь $\lambda \in \overline{\Phi} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\lambda| \geq C_0$, $(Uu)(x) = U(x)u(x)$ ($u \in H_l$).

Легко проверяется, что

$$(A - \lambda E)\Gamma(\lambda) = E + \rho^{2\alpha-1}(x)q_0(x)\mathcal{B}(\lambda)U^{-1} + \rho^{2\alpha}(x)\sum_{i=1}^n q_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{B}(\lambda)U^{-1},$$

где $q_i(x) \in C(\overline{\Omega}; \text{End } \mathbb{C}^l)$, $i = \overline{0, n}$. Применяя (5)–(8), получим (также как в (8))

$$\begin{aligned}(A - \lambda E)^{-1} &= \Gamma(\lambda)(E + \mathcal{F}(\lambda)), & \|\mathcal{F}(\lambda)\| &\leq M_\psi |\lambda|^{-1/2} \\ (\lambda \in \Phi_\psi, \quad |\lambda| &\geq C_\psi) & \forall \psi \in (0, \varphi).\end{aligned}$$

Пусть $s > \omega (\Leftrightarrow \max\{n/2, (n-1)/(2-2\alpha)\})$ – целое число, $s \in (\omega, \omega + 1]$. Имеем

$$|\text{sp}(A - \lambda E)^{-s} - \text{sp } U\mathcal{B}(\lambda)^s U^{-1}| \leq M|\lambda|^{-1/2} \cdot |\Gamma(\lambda)|_s^s,$$

где символы $\text{sp}, |\cdot|_s$ обозначают соответственно след ядерного оператора и σ_s – норму оператора [4].

Используя явный вид оператора $\mathcal{B}(\lambda)$, находим

$$\text{sp } U\mathcal{B}(\lambda)^s U^{-1} = \text{sp } \mathcal{B}(\lambda)^s = \text{sp } \mathcal{B}_s(\lambda), \quad \mathcal{B}_s(\lambda) = \text{diag}\{(P_1 - \lambda E)^{-s}, \dots, (P_l - \lambda E)^{-s}\}.$$

Пусть $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \dots$ – последовательности СЗ соответственно операторов A, P_j . Согласно (8) угол $\overline{\Phi}$ содержит конечное число СЗ операторов $P_{\nu+1}, \dots, P_l$. Применяя метод контурного интеграла [5, § 4] при $\omega \neq 1, 2, \dots$, находим

$$\sum_{i=1}^{+\infty} (\lambda_i + \tau)^{-s} = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{+\infty} (\lambda_{ij} + \tau)^{-s} + O(\tau^{\omega-s-1/4}), \quad \tau \rightarrow +\infty.$$

Отсюда и из (2), учитывая, что $\lambda_{ij} > 0$ ($j = \overline{1, \nu}, i = 1, 2, \dots$), легко вывести асимптотическую формулу

$$\int_0^{+\infty} \frac{dN(t)}{(t+\tau)^s} \sim \sum_{i=1}^{\nu} \int_0^{+\infty} \frac{dN_i(t)}{(t+\tau)^s}, \quad \tau \rightarrow +\infty,$$

где $N_i(t) = \text{card}\{j : \lambda_{ij} \leq t\}$, $i = \overline{1, \nu}$. Используя известные асимптотические формулы для функций $N_i(t)$, $i = \overline{1, \nu}$ (см., например, [6]), после применения тауберовой теоремы М. В. Келдыша получим утверждение теоремы 2 в случае $\omega \neq 1, 2, \dots$. Случай $\omega \in \mathbb{N}$ рассматривается с привлечением многолучевой тауберовой теоремы А. А. Шкаликова [7].

Ширазский университет, Иран

Поступило
06.01.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бойматов К. Х., Костюченко А. Г. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1990. № 3. С. 24–31.
2. Бойматов К. Х. // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 4. С. 8–16.
3. Бойматов К. Х. // Докл. РАН. 1993. Т. 330. № 5. С. 533–538.
4. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
5. Бойматов К. Х., Костюченко А. Г. // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 12. С. 1678–1693.
6. Вулис И. Л., Соломяк М. З. // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207. № 2. С. 262–265.
7. Шкаликов А. А. // Матем. сб. 1984. Т. 123. № 3. С. 317–347.