Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Соколов, Какие линзовые пространства различаются инвариантами Тураева–Виро, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 468–470

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1525>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:19:56

КАКИЕ ЛИНЗОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА РАЗЛИЧАЮТСЯ ИНВАРИАНТАМИ ТУРАЕВА–ВИРО

М. В. Соколов

Основным результатом данной статьи являются три предложения, которые полностью классифицируют линзовые пространства на предмет различаемости инвариантами Тураева–Виро. Инварианты Тураева–Виро $TV_{r,s}$ для трехмерных многообразий параметризуются такими парами натуральных чисел r, s , что $r > 2$ и $e^{(2\pi is)/r}$ – первообразный корень из единицы степени r (определение инвариантов см. в [1]). Вслед за [2] мы будем рассматривать только инварианты Тураева–Виро с $s = 1$. Под различаемостью пары линзовых пространств инвариантами Тураева–Виро имеется в виду существование такого $r > 2$, что значения инварианта $TV_{r,1}$ на данной паре линз различны.

Ш. Ямада в своей работе [2] предложил примеры сколь угодно большого числа гомотопически эквивалентных, но не гомеоморфных линзовых пространств, не различаемых инвариантами Решетихина–Тураева $RT_{r,1}$ (следовательно, и инвариантами Тураева–Виро, так как для замкнутого ориентируемого трехмерного многообразия M справедливо соотношение $|RT_{r,s}(M)|^2 = TV_{r,s}(M)$, см. [3]). Однако, это не дает полного ответа на поставленный в заглавии статьи вопрос.

Основным результатом статьи [2] является следующая явная формула (*) для вычисления инвариантов Тураева–Виро на линзовых пространствах, полученная с помощью соответствующей формулы Л. Джеффри (см. [4]) для инвариантов Решетихина–Тураева:

$$TV_{r,1}(L_{p,q}) = \begin{cases} \frac{1}{r} \left(1 - \cos \frac{2\pi p^*}{r}\right), & \text{если } d = 1; \\ \frac{2}{r} \left(1 - \cos \frac{\pi p'^*}{r}\right), & \text{если } d = 2, c \text{ четно}; \\ \frac{d}{2r}, & \text{если } d > 2, c \text{ четно, } q \equiv \pm 1 \pmod{d} \\ & \text{или } d > 2, c \text{ нечетно, } q \equiv \frac{d}{2} \pm 1 \pmod{d}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (*)$$

Здесь $d = \text{НОД}(p, 2r)$, $c = 2pr/d^2$, $p' = p/2$, а p^* и p'^* – такие целые числа, что $pp^* \equiv 1 \pmod{r}$, $p'p'^* \equiv 1 \pmod{r}$ и произведение $(p'p'^* - 1)p'^*/r$ четно.

В дальнейшем нам будет полезно следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1 [2]. Если $d = \text{НОД}(p, 2r) \leq 2$ или $2pr/d^2$ и $d/2$ являются нечетными целыми числами, то $TV_{r,1}(L_{p,q})$ не зависит от q .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работах [2] и [4] инварианты Решетихина–Тураева называются *инвариантами Черна–Саймонса–Виттена*, а инварианты Тураева–Виро называются *абсолютными значениями инвариантов Черна–Саймонса–Виттена*.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS, грант № 94201, и Международного научного фонда, грант NM3000.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ямада определяет число p'^* как такое целое, что $p'p'^* \equiv 1 \pmod{rq}$ и $(p'p'^* - 1)p'^*/(rq)$ четно, при этом p'^* зависит от q . Однако, как отмечено в следствии 1, если $d = 2$, то $\text{TV}_{r,1}(L_{p,q})$ от параметра q не зависит. Следовательно, при $d = 2$, можно считать, что $q = 1$.

Из формулы (*) непосредственно вытекает полезный частный случай.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеет место формула*

$$\text{TV}_{3,1}(L_{p,q}) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } p \text{ нечетно;} \\ 1, & \text{если } 4 \mid p; \\ 0, & \text{если } p \text{ четно, но } 4 \nmid p. \end{cases}$$

Следующие три предложения полностью классифицируют линзовые пространства на предмет различаемости инвариантами Тураева–Виро.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если $p_1 \neq p_2$, то линзовые пространства L_{p_1,q_1} и L_{p_2,q_2} различаются инвариантами Тураева–Виро.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если p_1 и p_2 четные и оба не делятся на четыре, то достаточно взять $r = p_1p_2/4 + 1$ и заметить, что из равенства $\cos(\pi p'_1/r) = \cos(\pi p'_2/r)$ следует сравнение $p_1/2 \equiv p_2/2 \pmod{r}$, что при нашем выборе r невозможно. Аналогичные рассуждения проходят, если оба числа p_1 и p_2 нечетные или оба делятся на четыре. При этом удобно взять $r = p_1p_2 + 1$. В остальных случаях, в силу следствия 2, достаточно взять $r = 3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если q не равно ни 1, ни $p - 1$, то линзовые пространства $L_{p,1}$ и $L_{p,q}$ различаются инвариантами Тураева–Виро.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно взять $r = p$.

Следующая лемма будет использована при доказательстве последнего предложения.

ЛЕММА 1. *Если линзовые пространства L_{p,q_1} и L_{p,q_2} различаются инвариантами Тураева–Виро и p четно, то можно выбрать $r' \geq 3$ так, чтобы $\text{TV}_{r',1}(L_{p,q_1}) \neq \text{TV}_{r',1}(L_{p,q_2})$ и чтобы число $c' = 2pr'/\text{НОД}^2(p, 2r')$ было четным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть линзовые пространства L_{p,q_1} и L_{p,q_2} различаются инвариантами Тураева–Виро при некотором $r \geq 3$. Положим $d = \text{НОД}(p, 2r)$ и $c = 2pr/d^2$. Допустим, что c нечетно. Из следствия 1 вытекает, что $d/2$, а значит, и r являются четными числами. В силу формулы (*) можно считать, что $q_1 \equiv d/2 \pm 1 \pmod{d}$, а $q_2 \not\equiv d/2 \pm 1 \pmod{d}$. В частности, так как q_1 и q_2 нечетны, то $d \neq 4$, т.е. $d/2 > 2$.

Возможны два случая.

1) $q_2 \not\equiv \pm 1 \pmod{\frac{d}{2}}$. Тогда в качестве r' можно взять $r(p+1)/2$. При этом, так как c было нечетно, то $d' = \text{НОД}(p, 2r') = d/2$, c' четно, $q_1 \equiv \pm 1 \pmod{d'}$, а $q_2 \not\equiv \pm 1 \pmod{d'}$.

2) $q_2 \equiv \pm 1 \pmod{\frac{d}{2}}$. Следовательно, $q_2 \equiv \pm 1 \pmod{d}$. Возьмем $r' = 2r$, при этом $d' = d$, c' четно, $q_2 \equiv \pm 1 \pmod{d'}$, а $q_1 \not\equiv \pm 1 \pmod{d'}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть q_1 и q_2 не равны 1. Тогда линзовые пространства L_{p,q_1} и L_{p,q_2} различаются инвариантами Тураева–Виро $\iff$ существуют такие натуральные k и v , что*

- 1) $v > 2$;
- 2) v делит p ;

- 3) v совпадает с одним из четырех чисел $(q_1 \pm 1)/k$, $(q_2 \pm 1)/k$;
 4) если $v = (q_i \pm 1)/k$, то $q_j \not\equiv \pm 1 \pmod{v}$, где $\{i, j\} = \{1, 2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть существует такое $r \geq 3$, что $\text{TV}_{r,1}(L_{p,q_1}) \neq \text{TV}_{r,1}(L_{p,q_2})$. Тогда в силу следствия 1 и леммы 1 можно считать, что $d > 2$ и c четно. В силу формулы (*) можно считать, что $q_1 \equiv \pm 1 \pmod{d}$, $q_2 \not\equiv \pm 1 \pmod{d}$. Поэтому существует такое натуральное k , что $d = (q_1 \mp 1)/k$, и в качестве v можно взять d .

Достаточность. Если p нечетно, то достаточность получается автоматически при $r = v$. Пусть p четно. Можно считать, что v четно, так как если v нечетно, то k четно, и можно заменить k на $k/2$, а v на $2v$. Рассмотрим два случая.

- 1) p/v – нечетное число. Положим $r = v$, тогда $d = v = (q_i \pm 1)/k$, число $c = 2pr/d^2$ четно, $q_i \equiv \pm 1 \pmod{d}$, а $q_j \not\equiv \pm 1 \pmod{d}$.
- 2) p/v – четное число. Положив $r = v(p+1)/2$, мы попадаем в ситуацию предыдущего случая.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Анализируя доказательства предложений 1, 2 и 3, мы можем получить грубые оценки величины параметра r , необходимого для того, чтобы различить два линзовых пространства инвариантом $\text{TV}_{r,1}$.

1) Если $p_1 \neq p_2$, то линзовые пространства L_{p_1,q_1} и L_{p_2,q_2} различаются инвариантом Тураева–Виро при некотором $r \leq 2R$, где R – минимальное натуральное число, взаимно простое с p_1 и p_2 , такое что $p_1 \not\equiv \pm p_2 \pmod{R}$.

2) Если известно, что инвариантами Тураева–Виро можно различить два линзовых пространства с одинаковым первым параметром p , то это можно сделать при некотором $r \leq p$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если p простое, а q_1 и q_2 не равны ни 1, ни $p-1$, то линзовые пространства L_{p,q_1} и L_{p,q_2} не различаются инвариантами Тураева–Виро.

СЛЕДСТВИЕ 4. Самыми простыми (в смысле величины первого параметра) негомеоморфными линзовыми пространствами, не различаемыми инвариантами Тураева–Виро, являются $L_{11,2}$ и $L_{11,4}$. Самые простые линзовые пространства, которые не различаются инвариантами Тураева–Виро и не являются гомотопически эквивалентными, – это $L_{13,3}$ и $L_{13,5}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если p простое и линзовые пространства L_{p,q_1} и L_{p,q_2} не гомеоморфны, то их можно различить некоторым инвариантом Решетихина–Тураева (см. [4, замечание 3.9]).

Я благодарен своему научному руководителю профессору С. В. Матвееву, а также Р. Ж. Алееву за полезные замечания в ходе работы над статьей.

Челябинский государственный университет
 E-mail: sok@cgu.chel.su

Поступило
 18.03.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Turaev V. G., Viro O. Y. // Topology. 1992. № 31. P. 865–902.
2. Yamada S. // J. Knot Theory Ramifications. 1995. V. 4. № 2. P. 319–327.
3. Turaev V. G. Quantum invariants of knots and 3-manifolds. Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1994.
4. Jeffrey L. C. // Comm. Math. Phys. 1992. № 147. P. 563–604.