Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Филиновский, О непрерывности спектра задачи Неймана для эллиптических операторов второго порядка в расширяющихся областях, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 471–475

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1526>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:26:11

О НЕПРЕРЫВНОСТИ СПЕКТРА ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА В РАСШИРЯЮЩИХСЯ ОБЛАСТЯХ

А. В. Филиновский

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – неограниченная область с границей Γ . Предположим, что для любого $R > 0$ часть границы $\Gamma \cap \{|x| < R\}$ состоит из конечного числа поверхностей класса C^2 . Рассмотрим дифференциальное выражение

$$lv = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где функция $a(x)$ вещественнозначна, непрерывно дифференцируема в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет неравенствам

$$0 < \gamma_1 \leq a(x) \leq \gamma_2, \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

Обозначим через L_0 минимальный оператор, порожденный в $L_2(\Omega)$ дифференциальным выражением (1), L – самосопряженное расширение L_0 , соответствующее граничному условию

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

где ν – единичный вектор внешней по отношению к Ω нормали к Γ . Из самосопряженности и положительности L следует, что $\sigma(L) = \sigma_p(L) \cup \sigma_c(L) \subset [0, +\infty)$, где $\sigma_p(L)$ – точечный, а $\sigma_c(L)$ – непрерывный спектр оператора L .

Сформулируем известные условия непрерывности спектра оператора L . В случае компактной Γ для $n \geq 2$ и $a(x) \equiv a_\infty = \text{const}$ в [1] доказано, что $(0, +\infty) \subset \sigma_c(L)$. Этот результат распространен в работе [2] на функции $a(x)$, удовлетворяющие условиям

$$a(x) = a_\infty + O(|x|^{-1-\varepsilon}), \quad |\nabla a(x)| = O(|x|^{-1-\varepsilon}), \quad |\nabla^2 a(x)| = O(|x|^{-2-\varepsilon}), \\ |x| \rightarrow \infty, \quad \varepsilon > 0,$$

а в [3] условия на $a(x)$ ослаблены

$$a(x) = a_\infty + o(1), \quad |\nabla a(x)| = O(|x|^{-1-\varepsilon}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \varepsilon > 0.$$

В работе [4] непрерывность спектра оператора L на полуоси $(0, +\infty)$ (Γ компактна) установлена при

$$|\nabla a(x)| = o(|x|^{-1}), \quad |\nabla^2 a(x)| = o(|x|^{-2}), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

В настоящей работе изучаются классы областей Ω с бесконечными границами, для которых спектр оператора L непрерывен. Пусть $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n = 1$ и $\varphi(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Область Ω называется *областью класса* D_φ^N , если

$$(\nu, \nabla \varphi(x)) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (4)$$

Например, область $\Omega = \{x : C_1 x_2^\alpha < x_1 < C_2 x_2^\alpha, x_2 > 0\} \subset \mathbb{R}^2, 0 < C_1 < C_2$, принадлежит классу D_φ^N с $\varphi(x) = \alpha x_1^2 + x_2^2$. При $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$ область $\Omega \in D_\varphi^N$ представляет собой внутренность конуса с вершиной в начале координат. Из (4) следует, что граница области $\Omega \in D_\varphi^N, \Omega \neq \mathbb{R}^n$, бесконечна.

Бликие к D_φ^N классы областей, связанные с задачей Дирихле, рассматривались в работе [5].

Обозначим

$$\rho = \sqrt{\varphi(x)}, \quad a_\rho = \frac{(\nabla a, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|}, \quad v_\rho = \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 2, \alpha_1 = 1, \Omega \in D_\varphi^N$ и

$$-\frac{n-1}{\rho+1}\gamma_1 < a_\rho < \frac{2\alpha_1}{\rho+1}\gamma_1, \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Тогда $\sigma_p(L) = \emptyset$.

Доказательство теоремы 1 следует из лемм 2 и 3.

ЛЕММА 1. Пусть $n \geq 2, \Omega \in D_\varphi^N$ и $v(x, \lambda) \not\equiv 0$ – решение задачи

$$lv - \lambda v = 0, \quad \lambda > 0, \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|_\Gamma = 0, \quad (7)$$

и

$$a_\rho < \frac{2\alpha_1}{\rho+1}\gamma_1, \quad x \in \Omega. \quad (8)$$

Тогда существуют такие числа $C_3 > 0$ и $R_1 > 0$, что

$$\int_{S_R^\varphi} (|v_\rho|^2 + |v|^2) ds \geq \frac{C_3}{R}, \quad R \geq R_1, \quad S_R^\varphi = \Omega \cap \{\rho = R\}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать (9) для вещественной или мнимой частей $v(x, \lambda)$, которые также удовлетворяют (6), (7). Поэтому функцию $v(x, \lambda)$ будем считать вещественнозначной. Умножим уравнение (6) на $2(\nabla v, \nabla \varphi)$ и проинтегрируем по $\Omega_R^\varphi = \Omega \cap \{\rho < R\}$ с учетом (7). Получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_{S_R^\varphi} a |\nabla \varphi| \left(2v_\rho^2 - |\nabla v|^2 + \frac{\lambda}{a} v^2 + \frac{\Delta \varphi}{|\nabla \varphi|} v v_\rho \right) ds \\ &= \int_{\Gamma_R^\varphi} (\nu, \nabla \varphi) (a |\nabla v|^2 - \lambda v^2) ds + \int_{\Omega_R^\varphi} \left(2a \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j} x_j v_{x_j}^2 - (\nabla a, \nabla \varphi) |\nabla v|^2 \right) dx, \\ & \Gamma_R^\varphi = \Gamma \cap \{\rho < R\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (4), (8) и (10) следует, что при $R \geq R_1 > 0$

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_{\Omega_{R_1}^\varphi} |\nabla \varphi| \left(\frac{2\alpha_1 \gamma_1}{\rho + 1} - a_\rho \right) |\nabla v|^2 dx \leq \int_{\Omega_R^\varphi} |\nabla \varphi| \left(\frac{2\alpha_1 \gamma_1}{\rho + 1} - a_\rho \right) |\nabla v|^2 dx \\
 &\leq \int_{\Omega_R^\varphi} \left(4a \sum_{j=1}^n \alpha_j v_{x_j}^2 - (\nabla a, \nabla \varphi) |\nabla v|^2 \right) dx \\
 &= \int_{S_R^\varphi} a |\nabla \varphi| \left(2v_\rho^2 - |\nabla v|^2 + \frac{\lambda}{a} v^2 + \frac{\Delta \varphi}{|\nabla \varphi|} v v_\rho \right) ds \\
 &\leq 2R\gamma_2 \int_{S_R^\varphi} \left(\left(2 + \frac{\Delta \varphi}{2|\nabla \varphi|} \right) v_\rho^2 + \left(\frac{\lambda}{\gamma_1} + \frac{\Delta \varphi}{2|\nabla \varphi|} \right) v^2 \right) ds \leq C_4 R \int_{S_R^\varphi} (v_\rho^2 + v^2) ds.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Если

$$\int_{\Omega_{R_1}^\varphi} |\nabla v|^2 dx = 0 \quad \text{для всех } R_1 > 0,$$

то $v \equiv C_5 \neq 0$ и неравенство (9) выполнено. В случае

$$\int_{\Omega_{R_1}^\varphi} |\nabla v|^2 dx > 0$$

при некотором $R_1 > 0$ неравенство (9) следует из (11).

ЛЕММА 2. Пусть $n \geq 2$, $\alpha_1 = 1$, $\Omega \in D_\varphi^N$, $v(x, \lambda) \not\equiv 0$ – решение задачи (6), (7), $\lambda > 0$, функция $a(x)$ удовлетворяет условию (5). Тогда существуют число $C_6 > 0$ и последовательность $R_m \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, такие, что

$$\int_{\Omega_{R_m}^\varphi} |v|^2 dx \geq C_6 \ln R_m, \quad m = 1, 2, \dots \tag{12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве леммы 1, будем считать функцию $v(x, \lambda)$ вещественнозначной. Пусть

$$J_\varphi(R) = \int_{S_R^\varphi} a v^2 ds.$$

Возможны два случая:

- а) $J'_\varphi(R) \geq 0$ для всех $R \geq R_2 > 0$;
- б) существует последовательность $R_m \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, такая, что $J'_\varphi(R_m) < 0$.

В случае а) при всех $R > R_2 > 0$ и некотором $C_6 > 0$ $J(R) > C_6$, а потому

$$\int_{\Omega_R^\varphi} v^2 dx \geq \int_{R_2}^R J(\rho) d\rho \geq C_6(R - R_2), \quad R \geq R_2,$$

откуда следует неравенство (12).

В случае б) из (4), (6), (7) и равенства

$$\begin{aligned}
 J'_\varphi(R) &= \frac{n-1}{R} J_\varphi(R) + \int_{S_R^\varphi} a_\rho v^2 ds + 2 \int_{S_R^\varphi} a v v_\rho ds - \int_{L_R^\varphi} \operatorname{ctg}(\nu, \nabla \varphi) a v^2 dl, \\
 R &> 0, \quad L_R^\varphi = \Gamma \cap \{\rho = R\},
 \end{aligned} \tag{13}$$

следует, что

$$\begin{aligned}
 \lambda \int_{\Omega_{R_m}^\varphi} v^2 dx &= \int_{\Omega_{R_m}^\varphi} a |\nabla v|^2 dx - \int_{S_{R_m}^\varphi} a v v_\rho ds \\
 &= \int_{\Omega_{R_m}^\varphi} a |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{2} J'_\varphi(R_m) + \frac{n-1}{2R_m} \int_{S_{R_m}^\varphi} a v^2 ds + \frac{1}{2} \int_{S_{R_m}^\varphi} a_\rho v^2 ds \\
 &\geq \int_{\Omega_{R_m}^\varphi} a |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{S_{R_m}^\varphi} \left(a_\rho + \frac{n-1}{\rho} \gamma_1 \right) v^2 ds \\
 &\geq \int_{\Omega_{R_m}^\varphi} a |\nabla v|^2 dx, \quad m = 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{14}$$

Поскольку из (9) вытекает оценка

$$\int_{\Omega_R^\varphi} (|\nabla v|^2 + v^2) dx \geq C_7 \ln R, \quad R \geq R_1,$$

то, учитывая (14), получаем требуемое неравенство (12).

ЛЕММА 3. Пусть $n \geq 2$, $v(x, 0) \not\equiv 0$ – решение задачи (6), (7), $\lambda = 0$ и выполнено условие

$$a_\rho > -\frac{n-1}{\rho+1} \gamma_1, \quad x \in \Omega. \tag{15}$$

Тогда существуют такие числа $C_8 > 0$ и $R_3 > 0$, что

$$\int_{\Omega_R^\varphi} |v|^2 dx \geq C_8 R^2, \quad R \geq R_3. \tag{16}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательствах лемм 1 и 2, будем считать функцию v вещественнозначной. Из (4), (6), (7) и (13) следует, что

$$J'_\varphi(R) = \frac{n-1}{R} J_\varphi(R) + \int_{S_R^\varphi} a_\rho v^2 ds + 2 \int_{\Omega_R^\varphi} a |\nabla v|^2 dx. \tag{17}$$

Если $v \equiv C_9 \neq 0$, то

$$\int_{\Omega_R^\varphi} |v|^2 dx \geq C_8 R^n, \quad R \geq R_3,$$

и неравенство (16) выполнено. Если $v \neq C_9$, то из (15) и (17) следует, что

$$\begin{aligned}
 J_\varphi(R) &= \int_{R_3}^R d\rho \int_{S_\rho^\varphi} \left(\frac{n-1}{\rho} a + a_\rho \right) v^2 ds + 2 \int_{R_3}^R d\rho \int_{\Omega_\rho^\varphi} a |\nabla v|^2 dx \geq C_9 (R - R_4), \\
 R &\geq R_4 > 0.
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_{\Omega_R^\varphi} v^2 dx \geq C_{10} \int_{R_3}^R J_\varphi(\rho) d\rho \geq C_8 R^2, \quad R \geq R_5,$$

и лемма 3 доказана.

Изучим плотность множества $\sigma(L)$ на $[0, +\infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [6]. Область Ω называется *квазиконической*, если она содержит шар любого радиуса.

В [6] для квазиконической Ω и $a(x) \equiv a_\infty$ установлено равенство $\sigma(L) = [0, +\infty)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – квазиконическая область и

$$a(x) = a_\infty + o(1), \quad |\nabla a(x)| = o(1), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Тогда $\sigma(L) = [0, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta(x) \in \dot{C}^\infty[-1, 1]$, $\|\eta\|_{C[-1, 1]} = 1$, $\|\eta\|_{L_2(-1, 1)} = 1$. Так как Ω квазиконическая, то существует последовательность непересекающихся шаров

$$B_{R_m}(x_m) = \{x : |x - x_m| < R_m\} \subset \Omega, \quad |x_m| = |(x_{1m}, \dots, x_{nm})| \rightarrow \infty, \\ R_m \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим функции

$$v_m(x) = R_m^{-n/2} \eta\left(\frac{x_1 - x_{1m}}{R_m}\right) \eta\left(\frac{x_2 - x_{2m}}{R_m}\right) \dots \eta\left(\frac{x_n - x_{nm}}{R_m}\right) e^{i\sqrt{\lambda/a_\infty} x_1}, \\ m = 1, 2, \dots, \quad \lambda \geq 0,$$

для которых $\text{supp } v_m(x) \subset B_{R_m}(x_m)$, $\|v_m(x)\|_{C(B_{R_m})} = R_m^{-n/2}$, $\|v_m(x)\|_{L_2(B_{R_m})} = 1$ и $(v_j, v_m)_{L_2(\Omega)} = 0$, $j \neq m$. Поскольку $v_m(x) \in D(L)$ и в силу (18) $\|lv_m - \lambda v_m\|_{L_2(\Omega)} = o(1)$, $m \rightarrow \infty$, из результатов работы [7] следует $\lambda \in \sigma(L)$.

Теорема 2 доказана.

Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана

Поступило
06.12.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rellich F. // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1943. V. 53. № 1. P. 57–65.
2. Jäger W. // Math. Z. 1967. V. 102. № 1. P. 62–88.
3. Эйдус Д. М. // УМН. 1969. Т. 24. № 3. С. 91–156.
4. Vogelsang V. // J. Reine Angew. Math. 1983. V. 338. P. 109–120.
5. Филиновский А. В. // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 6. С. 131–160.
6. Глазман И. М. // Докл. АН СССР. 1952. Т. 87. № 2. С. 171–174.
7. Глазман И. М. // Докл. АН СССР. 1952. Т. 87. № 1. С. 5–8.