Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шаповал, Интегральное многообразие нелинейного эллиптического уравнения в цилиндре, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 3, 476–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1527>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 05:12:49

ИНТЕГРАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ

А. Б. Шаповал

В цилиндре $\Omega = \mathbb{R} \times \omega$, где $\omega = [\alpha_1, \alpha_2] \in \mathbb{R}$, рассматривается эллиптическое уравнение

$$\partial_t^2 u + 2b\partial_t u - Au - F(t, u) = g(t, x). \quad (1)$$

Здесь $A = -\partial_x^2$, $b > 0$ – некоторая константа, $u = u(t, x) = (u_1, \dots, u_m)$, $F(t, u)$, $g(t, x)$ – векторные функции, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \omega$. На границе ставится условие Дирихле

$$u|_{\partial\omega} = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что нелинейная функция F удовлетворяет следующим условиям:

$$F(t, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^m), \quad F \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \quad (3)$$

$$F(t, v) \cdot v \geq -C_1 + C_2|v|^{2+\varepsilon}, \quad C_1, C_2, \varepsilon > 0, \quad (4)$$

$$\left| \frac{\partial F(t, v)}{\partial v} \right| \leq M(|v|), \quad (5)$$

$$|F(t_1, v) - F(t_2, v)| \leq M(|v|)|t_1 - t_2|, \quad (6)$$

где $M: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – монотонная функция, а $u \cdot v$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. Предположим также, что функция $g(t) \in (C(\mathbb{R}, L_2(\omega)))^m$ имеет конечную норму

$$|g|_a = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|g(t, \cdot)\|_{(L_2(\omega))^m} < \infty$$

и липшицева по t :

$$\|g(t_1, \cdot) - g(t_2, \cdot)\|_{(L_2(\omega))^m} \leq C_3|t_1 - t_2|. \quad (7)$$

Инерциальное многообразие уравнения (1) в автономном случае (функции F и g не зависят от t) построено в статье [1]. В настоящей работе доказано существование интегрального многообразия, соответствующего задаче (1), (2).

Построение интегрального многообразия. Положим $H_s = (H_s(\omega))^m$, $\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{H_s}$, $H = (L_2(\omega))^m$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_H$, $V_s(t_1, t_2) = (H_s([t_1, t_2] \times \omega))^m$, где $H_s(Q)$ – пространство Соболева порядка s в области Q (см. [2]). Пусть $\Omega_\tau = [\tau, \infty) \times \omega$, $\Sigma = H_{3/2} \cap H_1^0$. Через $\Lambda^a(s)$ обозначим множество функций $\varphi(t, x): \Omega_s \rightarrow \mathbb{R}^m$, принадлежащих пространствам $V_2(t, t+1) \forall t \geq s$ и имеющих конечную норму

$$\|\varphi\|_{a,s} = \sup_{t > s} \|\varphi\|_{V_2(t, t+1)}.$$

Под решением задачи (1), (2) в полуцилиндре Ω_τ с начальным условием

$$u|_{t=\tau} = u_\tau, \quad u_\tau \in \Sigma, \quad (8)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00354.

понимается функция $u \in \Lambda^a(\tau)$, которая удовлетворяет уравнению (1) как равенству в H .

Согласно [3], [4] при выполнении перечисленных выше условий любое решение u задачи (1), (2), (8) удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{V_2(t, t+1)} \leq Q_1(\|u\|_\Sigma) e^{-\alpha(t-\tau)} + Q_1(|g|_a), \quad (9)$$

где $\alpha > 0$, а $Q_1 \in C(\mathbb{R})$ – монотонная функция.

Определим срезающую функцию $q(\xi) \in C^1(\mathbb{R}_+, [0, 1])$, обладающую следующими свойствами:

$$\left| \frac{dq}{d\xi} \right| < 2,$$

$q(s) = 1$ при $0 \leq s \leq 1$, $q(s) = 0$ при $s > 2$. Положим

$$f(t, v) = q\left(\frac{|v|^2}{\rho^2}\right) F(t, v), \quad t, v \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

где $\rho = 2Q_1(|g|_a)$. Вместе с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$\partial_t^2 u + 2b\partial_t u - Au - f(t, u) = g(t, x). \quad (11)$$

ЛЕММА 1. Пусть f определена формулой (10), а F удовлетворяет условиям (3)–(6). Тогда

$$\begin{aligned} |f(t, v)| &\leq K, \quad |f(t, v_1) - f(t, v_2)| \leq K|v_1 - v_2|, \\ |f(t_1, v) - f(t_2, v)| &\leq K_1|t_1 - t_2|, \end{aligned} \quad t, v \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Константы K и K_1 зависят от числа ρ и функции $M(\xi)$ из неравенства (5).

Доказательство очевидно.

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – собственные векторы оператора A с граничным условием Дирихле, соответствующие собственным значениям $\{\lambda_i\}$, пронумерованным в порядке возрастания. Положим $E_+ = \text{span}(e_1, \dots, e_N)$, $E_- = [\text{span}(e_{N+1}, \dots)]_{3/2}$, где $[B]_{3/2}$ обозначает замыкание множества B в пространстве $H_{3/2}$. Обозначим через P_+ ортогональный проектор из $H_{3/2}$ на E_+ , $P_- = I - P_+$, $E = H_{3/2} \times E_+$.

Пусть N – такое число, что для оператора A выполнено спектральное условие

$$\lambda_{N+1} - \lambda_N > lK, \quad (13)$$

где K определено в лемме 1, а $l \geq 5$. Положим $r = \sqrt{b^2 + \lambda_{N+1} - \theta K}$. Здесь $\theta = \theta(l)$ – достаточно малое положительное число (при $l = 5$ имеем $\theta = 2.7$). Для определения интегрального многообразия введем весовые пространства $W(\tau)$, $\overline{W}(\tau)$ функций, определенных при всех $t \in \mathbb{R}$. Нормы в этих пространствах задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \|u\|_{W(\tau)} &= \sup_{T \in \mathbb{R}} [e^{-b(T-\tau)} \|u(T)\| \cosh^{-1}(r(T-\tau))], \\ \|u\|_{\overline{W}(\tau)} &= \sup_{T \in \mathbb{R}} \left(\int_T^{T+1} [\|u\|_2^2 + \|\partial_t u\|_1^2 + \|\partial_t^2 u\|_0^2] e^{2b(t-\tau)} \cosh^{-2}(r(t-\tau)) dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Под интегральным многообразием уравнения (11) понимается конечномерное липшицево многообразие $M \subset \mathbb{R} \times E$, которое удовлетворяет следующим условиям:

- (i) для любой точки $(s, p, q) \in M$ существует решение $v(t) \in \overline{W}(s)$ уравнения (11) такое, что $v(s) = p$, $P_+ \partial_t v(s) = q$ и $(t, v(t), P_+ \partial_t v(t)) \in M$ для любых $t \in \mathbb{R}$;
- (ii) для любого решения v задачи (1), (2) из пространства $\overline{W}(0)$ справедлива формула $(t, v(t), P_+ \partial_t v(t)) \in M \quad \forall t \in \mathbb{R}$;
- (iii) для любого фиксированного $s \in \mathbb{R}$ и любого решения уравнения (11) $u(t) \in \Lambda^a(s)$ существует такое решение $v(t) \in \overline{W}(s)$ уравнения (11), лежащее на M , что

$$\|u(t) - v(t)\|_\Sigma \leq C_4 e^{-\mu_N(t-s)}, \quad t > s.$$

Здесь C_4 и μ_N – некоторые константы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (12), (13), (7). Тогда

- 1) уравнение (11), (2) обладает $(2N+1)$ -мерным интегральным многообразием M ;
- 2) для любого решения $u(t) \in \Lambda^a(\tau)$ уравнения (1), (2), (8) существуют $t_1 \in \mathbb{R}$ и решение $v(t) \in \Lambda^a(t_1)$ этого уравнения, лежащее на многообразии M , такие, что

$$\|u(t) - v(t)\|_\Sigma \leq C_4 e^{-(b+r)(t-t_1)}, \quad t > t_1. \quad (14)$$

Доказательство теоремы 1 основано на следующей теореме существования и единственности решения эллиптического уравнения (11), (2), (8) в пространстве $\overline{W}(\tau)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (12), (13). Тогда для любых $b \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $u_+ \in E_+$, $u'_+ \in E_+$, $g \in W(\tau)$ существует единственное решение $u \in \overline{W}(\tau)$ уравнения (11) с начальным условием

$$P_+ u|_{t=\tau} = u_+, \quad P_+ \partial_t u|_{t=\tau} = u'_+. \quad (15)$$

Это решение липшицево по u_+ , u'_+ .

Доказательство проводится методами аналогичными работе [1].

Определим отображение $\pi: \mathbb{R} \times E_+ \times E_+ \rightarrow E_-$ формулой $\pi(\tau, u_+, u'_+) = P_- u(\tau)$, где $u \in \overline{W}(\tau)$ – решение уравнения (11) при начальном условии (15). Согласно теореме 2 отображение π определено корректно. Положим

$$M = \{(t, u, v) \in \mathbb{R} \times H_{3/2} \times E_+ : P_- u = \pi(t, P_+ u, v)\}.$$

Экспоненциальное притяжение к многообразию M .

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (7), (12), (13). Пусть $u(t)$ – решение задачи (11), (8). Тогда существует решение $v(t)$ задачи (11), (8) такое, что $(t, v(t)) \in M \quad \forall t > \tau$ и

$$\|u(t) - v(t)\|_\Sigma \leq C e^{-(b+r)(t-\tau)} \quad \forall t > \tau. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольные числа $T > \tau + 2$ и $l > T + 1$. Пусть $\psi(t; \tau, l) = 0$ при $t \leq \tau$ и $t \geq l$; $\psi(t; \tau, l) = 1$ при $\tau + 1 \leq t \leq l - 1$, $|\psi'_t(t; \tau, l)| \leq 2$, $|\psi''_t(t; \tau, l)| \leq 2$. Согласно уравнению (11) ψu удовлетворяет уравнению

$$\partial_t^2(\psi u) + 2b\partial_t(\psi u) - A(\psi u) - f(t, \psi u) = g_\psi,$$

где $g_\psi = -f(t, \psi u) + \psi f(t, u) + \psi g + u\psi'' + 2\partial_t u\psi' + 2b u\psi'$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\partial_t^2 \bar{u} + 2b\partial_t \bar{u} - A\bar{u} - f(t, \bar{u}) = g(t, x), \quad (17)$$

$$P_+ \bar{u}|_{t=T} = P_+(\psi u)(T), \quad P_+ \partial_t \bar{u}|_{t=T} = P_+ \partial_t(\psi u)(T).$$

Уравнение (17) имеет вид (11). Аналогично работе [1] из теоремы 2 устанавливаются неравенства

$$\|P_-(\psi u - \bar{u})\|_{\overline{W}(T)} \leq C_1 \|g_\psi - g\|_{W(T)}, \quad (18)$$

$$\|u_+(t) - \bar{u}_+(t)\|_{\overline{W}(T)} \leq C_2 \|u_-(t) - \bar{u}_-(t)\|_{\overline{W}(T)}, \quad (19)$$

где C_1 и C_2 – константы, зависящие от $\|u(\tau)\|$ и $\|\partial_t u(\tau)\|$. Далее, через C_i , $i > 2$, также обозначаются константы, зависящие от начальных условий функции u в момент времени τ , но не зависящие от T .

Очевидно, что $g_\psi = g$ при $\tau + 1 \leq t \leq l - 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|g_\psi - g\|_{W(T)} &\leq C_3 e^{-(r+b)(T-\tau)} \sup_{\tau \leq t \leq \tau+1} [\|u(t)\| + \|\partial_t u(t)\| + \|g(t)\| + K] \\ &\quad + C_4 e^{(r-b)(T-l)} \sup_{l_2 \leq t \leq l_2+1} [\|u(t)\| + \|\partial_t u(t)\| + \|g(t)\| + K]. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (9), (20) и (18) следует, что при достаточно больших l

$$\|P_-(\psi u - \bar{u})\|_{\overline{W}(T)} \leq C_5 e^{-(r+b)(T-\tau)}.$$

Так как $\psi u = u$ при $t \in [\tau + 1, T]$, то

$$\|P_-(u - \bar{u})\|_{\overline{W}(T)} \leq C_6 e^{-(r+b)(T-\tau)}. \quad (21)$$

Из определения пространства $\overline{W}(T)$ и теоремы о следах (см. [2]) следует, что

$$\begin{aligned} \|(u - \bar{u})(t)\|_\Sigma &\leq \|(u - \bar{u})\|_{\overline{W}(T)} e^{(r+b)(T-t)}, \\ \|(\partial_t u - \partial_t \bar{u})(t)\|_{1/2} &\leq \|(u - \bar{u})\|_{\overline{W}(T)} e^{(r+b)(T-t)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (19), (21), (22) получим при $\tau < t < T$

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\| \leq C_7 e^{-(r+b)(t-\tau)}, \quad \|(\partial_t u - \partial_t \bar{u})(t)\|_{1/2} \leq C_7 e^{-(r+b)(t-\tau)}. \quad (23)$$

В частности, $\|u(\tau) - \bar{u}(\tau)\|_\Sigma \leq C_7$ и $\|\partial_t u(\tau) - \partial_t \bar{u}(\tau)\|_{1/2} \leq C_7$.

Возьмем произвольную последовательность $\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$, $T_1 = T$, $T_j \rightarrow \infty$. Для каждого T_j указанным выше способом фиксируем функцию $\bar{u}_j$. Как было установлено,

$$\|u(t) - \bar{u}_j(t)\|_{\Sigma} \leq C_7 e^{-(r+b)(t-\tau)} \quad \text{и} \quad \bar{u}_j \in V_2(t, t+1)$$

при $t \in [\tau, T_j]$.

Множество точек $(P_+ \bar{u}_j(\tau), P_+ \partial_t \bar{u}_j(\tau))$ лежит в шаре конечномерного пространства $E_+ \times E_+$. Обозначим через $(u_{\infty}, u'_{\infty})$ произвольную предельную точку этого множества. Пусть $v \in \overline{W}(\tau)$ – решение уравнения (11) при начальном условии $P_+ v|_{t=\tau} = u_{\infty}$, $P_+ \partial_t v|_{t=\tau} = u'_{\infty}$. Функция v непрерывно зависит от начальных условий. Следовательно, из (23) имеем, что

$$\|u(t) - v(t)\|_{\Sigma} \leq C_8 e^{-(r+b)(t-\tau)}, \quad t > \tau.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пункт 1) теоремы 1 следует из теорем 2 и 3. Докажем пункт 2). Пусть $U(t)$, $t > \tau$, – произвольное решение задачи (1), (8). Согласно (9) существует такое число $T > 0$, что $\|U(t)\| \leq \frac{2}{3}\rho$ при $t \geq T$. Обозначим $u(t) = U(t - \tau + T)$. Тогда функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (11) при начальном условии $u|_{t=\tau} = U(T)$. Значит, по теореме 3 существует решение $v(t) \in M$ уравнения (11), для которого выполнено соотношение (16). Так как $u(t) \in \Lambda^a(\tau + T)$ экспоненциально притягивается к функции v , то $v(t) \in \Lambda^a(\tau + T)$ и $\|v(t)\|_{\Sigma} \leq \rho$ для всех t , больших некоторого $T_0 > T$. Поэтому функция $v(t)$ является решением уравнения (1) при $t > \tau + T_0$. Тогда неравенство (14) следует из (16). Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 1 остается справедливой для любой области $\omega \in \mathbb{R}^n$ с гладкой границей и линейного самосопряженного оператора A , удовлетворяющих спектральному условию (13).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
03.12.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Babin A. V. Inertial manifolds for travelling-wave solutions of reaction diffusion systems // Comm. Pure Appl. Math. 1996.
2. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
3. Бабин А. В. // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 2. С. 3–18.
4. Вишик М. И., Зелик С. В. // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 12. С. 21–56.