Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Х. Беккер, О смешанных абелевых группах с периодическими группами автоморфизмов, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 4, 483–493

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1528>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:19:30

УДК 512.541

О СМЕШАННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРУППАМИ АВТОМОРФИЗМОВ

И. Х. Беккер

В работе устанавливаются достаточные признаки расщепляемости смешанных абелевых групп с периодическими группами автоморфизмов. Выделяются классы смешанных расщепляющихся абелевых групп с совершенными голоморфами.

Библиография: 12 названий.

Группы автоморфизмов смешанных абелевых групп мало изучены. В [1], [2] установлены некоторые свойства смешанных абелевых групп с периодическими (в частности, гамильтоновыми) группами автоморфизмов. Ряд задач об автоморфизмах смешанных абелевых групп G , их поведении на периодических частях tG и факторгруппах G/tG связан с проблемой расщепляемости групп G [3, проблема 34]. Одной из первых работ в этом направлении является [4]. В [5] доказано, что смешанная абелева группа G с периодической нильпотентной группой $\text{Aut } G$ расщепляема. Однако требование нильпотентности – ограничение довольно сильное на периодическую группу $\text{Aut } G$ смешанной группы G . Периодические части tG таких групп G составляют довольно узкий класс групп – это конечные 2-группы вида $tG = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}(2^{k_i})$, где $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_m$. Естественно возникает вопрос: будет ли расщепляемой всякая смешанная абелева группа G с периодической группой $\text{Aut } G$?

В данной работе установлены достаточные условия расщепляемости смешанных абелевых групп G с периодическими группами $\text{Aut } G$. В § 1 рассматриваются свойства таких абелевых групп, приводятся вспомогательные предложения и примеры, доказываются теоремы расщепляемости (теоремы 1.8, 1.10). В § 2 изучается вопрос о совершенности голоморфов расщепляющихся смешанных абелевых групп, части без кручения которых обладают квазиразложениями с сильно неразложимыми сервантными квазислагаемыми.

Под словом “группа” далее понимаем каждый раз “абелеву группу”, кроме ее группы автоморфизмов и голоморфа. Используемые обозначения стандартны и соответствуют [6] и [7].

§ 1. Свойства смешанных групп с периодическими группами автоморфизмов

Пусть G – смешанная группа с периодической группой автоморфизмов $\text{Aut } G$, tG – периодическая часть группы G , π_t – множество простых чисел, к которому относятся

примарные компоненты G_p группы tG , $tG = \bigoplus_{p \in \pi_t} G_p$. Группы G_p будем называть также примарными компонентами группы G . Заметим, что смешанная группа G с периодической группой $\text{Aut } G$ является редуцированной группой. В противном случае она имеет прямые слагаемые, изоморфные $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Z}(p^\infty)$ для некоторого $p \in \pi_t$. Но группа $\text{Aut } \mathbb{Q}$ изоморфна мультипликативной группе поля $\mathbb{Q}$, а группа $\text{Aut}(\mathbb{Z}(p^\infty))$ изоморфна мультипликативной группе кольца целых p -адических $\mathbb{Q}_p^*$. Следовательно, G – группа редуцированная.

Рассмотрим далее некоторые смешанные группы.

1. Не существуют копериодические группы G с периодическими группами $\text{Aut } G$.

Действительно, пусть G – копериодическая группа с периодической группой $\text{Aut } G$. Тогда G – урегулированная копериодическая группа и $\text{Aut } G$ изоморфна группе $\text{Aut}(tG)$ [6, с. 278]. Так как всякая неограниченная группа G_p имеет автоморфизмы бесконечного порядка (например, умножение G_p на простое число $q \neq p$), то все группы G_p ограничены. Периодичность группы $\text{Aut } G$ влечет конечность множества π_t . Следовательно, tG есть сервантная ограниченная подгруппа группы G , и поэтому tG выделяется прямым слагаемым в G [6, с. 140]. Но это противоречит урегулированности группы G .

2. Всякая квазирасщепляющаяся группа G с периодической группой $\text{Aut } G$ – группа расщепляющаяся.

Смешанная группа G называется *квазирасщепляющейся*, если существует такое целое число $n \neq 0$, что $nG \leq tG \oplus B \leq G$, где B – группа без кручения.

Нетрудно убедиться, что группа B не p -делима для любого простого p , $pB \neq B$. Допустим, что группа G имеет неограниченную примарную компоненту G_p и для $g \in G$ $ng = a + b = a_1 + (a_0 + b)$, где

$$a \in tG, \quad a_1 \in G_p, \quad a_0 \in \bigoplus_{\substack{p' \in \pi_t \\ p' \neq p}} G_{p'}, \quad b \in B.$$

Отображение $\psi: G \rightarrow G$ вида $\psi g = g - (q^{\varphi(n)} - 1)c_1/n$, где q – простое число, $q \neq p$, $(q, n) = 1$, $\varphi(n)$ – функция Эйлера и $q^{\varphi(n)}c_1 = a_1$ есть автоморфизм группы G . Так как G_p – группа неограниченная, то ψ – автоморфизм бесконечного порядка группы G . Следовательно, группа G не имеет неограниченных примарных компонент. Она также не имеет ограниченных бесконечных примарных компонент, так как всякая такая группа разложима в прямую сумму циклических примарных групп и поэтому имеет автоморфизмы бесконечного порядка. Но тогда группа G также имеет такие автоморфизмы, что невозможно. Следовательно, все примарные компоненты группы G – конечные группы.

Допустим, что π_t – множество бесконечное. Всякая подгруппа G_p выделяется прямым слагаемым в G [6, с. 140]. Поэтому можно полагать, что существует простое $q \notin \pi_t$ взаимно простое с n , $(q, n) = 1$. Например, если π_t есть множество всех простых чисел, то можно G представить в виде $G = A \oplus G'$, где A – некоторая периодическая группа, а G' – смешанная квазирасщепляющаяся группа с периодической группой $\text{Aut } G'$ и рассматривать вместо G группу G' .

Пусть $nG' \leq tG' \oplus B' \leq G'$ и для $g' \in G'$ $ng' = a + b'$, $b' \in B'$, $a \in tG$. Группа G' имеет автоморфизм ω вида $\omega g' = g' - (q^{\varphi(n)} - 1)c/n$, где $q^{\varphi(n)}c = a$. Очевидно, ω – автоморфизм бесконечного порядка группы G' . Следовательно, π_t – конечное множество и tG выделяется прямым слагаемым в G .

ЛЕММА 1.1. Если G – смешанная группа с периодической группой $\text{Aut } G$, то G обладает такими свойствами:

- 1) G – группа редуцированная;
- 2) группа G/tG не p -делима ни по одному простому числу $p \notin \pi_t$;
- 3) всякая подгруппа B_{np} базисной подгруппы B_p группы G_p – группа конечная;
- 4) $|tG|$ не превосходит мощности континуума;
- 5) группа G не имеет ограниченных бесконечных примарных компонент G_p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) Допустим, что факторгруппа G/tG p -делима по некоторому простому числу $p \notin \pi_t$. Тогда для любого элемента $\bar{g} \in G/tG$ имеем $\bar{g} = p\bar{x}_0$ или $\bar{g} = g + tG = p(x_0 + tG)$. Отсюда $g = px_0 + t_0$ для некоторого $t_0 \in tG$. Так как $p \notin \pi_t$, то t_0 делится на p , $t_0 = pt'_0$ и $g = p(x_0 + t'_0)$. Следовательно, сама группа G – p -делимая группа, и поэтому отображение $g \rightarrow pg$ является ее автоморфизмом бесконечного порядка, что противоречит условию.

3) Пусть B_{np} – бесконечная подгруппа, $B_{np} = \bigoplus_{i \in I} \langle g_i \rangle$, где $o(g_i) = p^n$. Так как B_{np} сервантна в группе G и ограничена, то B_{np} выделяется прямым слагаемым в G , $G = B_{np} \oplus G'$. Группа B_{np} имеет автоморфизмы бесконечного порядка, поэтому и G имеет такие автоморфизмы.

4) Известно, что если B_p – базисная подгруппа редуцированной группы G_p , то $|G_p| \leq |B_p|^{\aleph_0}$ [5, с. 172]. Имеем $|B_p| \leq \aleph_0$, следовательно, мощность всякой G_p группы tG не превосходит мощности континуума. Поэтому мощность tG также не превосходит мощности континуума.

5) Действительно, допустим, что группа G имеет бесконечную ограниченную примарную компоненту G_p . Так как G_p сервантна в G , то G_p выделяется прямым слагаемым в G , $G = G_p \oplus G'$. Группа G_p разлагается в бесконечную прямую сумму циклических групп [5, с. 107]. Следовательно, G_p имеет автоморфизмы бесконечного порядка, поэтому группа G также имеет такие автоморфизмы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. а) Для расщепляющейся смешанной группы $G = tG \oplus F$ группа $\text{Aut } G$ – периодическая тогда и только тогда, когда tG – группа конечная, а $\text{Aut } F$ – группа периодическая.

б) Смешанная группа G с конечной группой $\text{Aut } G$ – группа расщепляющаяся.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $G = tG \oplus F$, где F – группа без кручения имеет периодическую группу автоморфизмов $\text{Aut } G$. Тогда $tG = \bigoplus_{p \in \pi_t} G_p$ такова, что всякая G_p – группа конечная, а π_t есть также множество конечное. Очевидно, что $\text{Aut } F$ – группа периодическая. Обратно, имеем $\text{Aut } G = \Phi \times (\text{Aut}(tG) \times \text{Aut } F)$, где $\Phi \cong \text{Hom}(F, tG)$. Следовательно, $\text{Aut } G$ – группа периодическая.

б) Если $\text{Aut } G$ – группа конечная, то всякая примарная компонента G_p группы tG – группа конечная. Допустив противное, получаем, что группа G имеет бесконечное множество примарных циклических прямых слагаемых. Достаточно учесть, что всякий элемент $a \in G_p$ порядка p высоты $h_p(a) = k$ можно включить в циклическое прямое слагаемое группы G порядка p^{k+1} . Но тогда получаем, что $\text{Aut } G$ – группа бесконечная. Множество π_t также не может быть бесконечным. Следовательно, $tG = \bigoplus_{p \in \pi_t} G_p$ есть прямая сумма конечного числа конечных примарных компонент. Так как tG сервантна в G , то tG выделяется прямым слагаемым в группе G .

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Группа автоморфизмов $\text{Aut } G$ группы G конечна тогда и только тогда, когда $G = tG \oplus F$, где F – группа без кручения, а группы tG , $\text{Aut } F$ и $\text{Hom}(F, tG)$ – группы конечные.*

Следуя [4], автоморфизм ψ группы tG назовем совместным с автоморфизмом ω группы $\overline{G} = G/tG$, если ψ и ω индуцируются некоторым автоморфизмом группы G .

Н. Я. Виленкиным поставлен вопрос [3, проблема 34]: следует ли расщепляемость группы G из того, что всякая пара автоморфизмов ψ, ω ($\psi \in \text{Aut}(tG)$, $\omega \in \text{Aut } \overline{G}$) совместима?

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Смешанная группа G с периодической группой $\text{Aut } G$, у которой всякий автоморфизм ψ ее периодической части совместим с некоторым автоморфизмом группы $\overline{G}$ – группа расщепляющаяся.*

Действительно, у такой группы G периодическая часть tG не имеет бесконечных примарных компонент. Следовательно, все примарные компоненты группы G – группы конечные. Допустим, что π_t – множество бесконечное. Тогда группа tG имеет автоморфизм бесконечного порядка, что невозможно. Следовательно, tG – ограниченная сервантная подгруппа группы G и tG выделяется прямым слагаемым в G .

СЛЕДСТВИЕ 1.5. *Смешанная группа G с периодической группой $\text{Aut } G$, у которой всякий автоморфизм ее периодической части tG продолжается до автоморфизма группы G , является расщепляющейся группой.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. *Пусть G – смешанная абелева группа с факторгруппой $G/tG \cong \bigoplus_{i \in I} A_i$, где $|I| \geq \aleph_0$, $tG = \bigoplus_{p \in \pi_t} G_p$. Если существует такая инъекция $\tau: I \rightarrow \pi_t$, что $A_i \neq \tau(i)A_i$, то группа автоморфизмов $\text{Aut } G$ не является периодической.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим стабилизатор цепочки $0 < tG < G$, изоморфный группе $\text{Hom}(G/tG, tG)$ [7, с. 295]. Имеем

$$\text{Hom}(G/tG, tG) \cong \text{Hom}\left(\bigoplus_{i \in I} A_i, \bigoplus_{p \in \pi_t} G_p\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}\left(A_i, \bigoplus_{p \in \pi_t} G_p\right).$$

Так как $A_i \neq \tau(i)A_i$, то $\text{Hom}(A_i, G_{\tau(i)}) \neq 0$. Отсюда следует, что $\prod_{i \in I} \text{Hom}(A_i, G_{\tau(i)})$ содержит гомоморфизмы бесконечного порядка. Следовательно, группа G имеет автоморфизмы бесконечного порядка.

СЛЕДСТВИЕ 1.7. *Пусть G – смешанная группа с периодической группой автоморфизмов $\text{Aut } G$, факторгруппа $\overline{G} = G/tG$ которой имеет эпиморфный образ $A = \bigoplus_{p \in \pi'} A_p$, где A_p – редуцированные p -примарные группы. Если $\pi'' = \pi' \cap \pi_t \neq \emptyset$ и в случае конечного $\pi'' = \pi_t$ для любого $p \in \pi''$ группа A_p – неограниченная, то G – расщепляющаяся группа.*

Действительно, если допустить, что π'' – множество бесконечное, то группа

$$\text{Hom}(A, tG) \cong \prod_{p \in \pi''} \text{Hom}(A_p, tG)$$

содержит гомоморфизмы бесконечного порядка. Следовательно, π'' – множество конечное.

Пусть $\pi'' = \pi_t$ и всякая группа A_p ($p \in \pi''$) неограничена, $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$ – базисная подгруппа группы A_p , G_p – неограниченная примарная компонента группы G , B_p – ее базисная подгруппа. Имеем $G \xrightarrow{\pi_p} A_p \xrightarrow{\chi} B$, где π_p – проекция, а χ – эпиморфизм группы A_p на свою базисную подгруппу B [6, с. 179]. Далее,

$$\text{Hom}(B, B_p) = \text{Hom}\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n, \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_{np}\right) \cong \prod_{n=1}^{\infty} \text{Hom}\left(B_n, \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_{np}\right)$$

и так как B и B_p – группы неограниченные, то $\text{Hom}(B, B_p)$ содержит элементы бесконечного порядка. Отсюда следует, что группа $\text{Hom}(G/tG, tG)$ также содержит гомоморфизмы бесконечного порядка. Но тогда группа $\text{Aut } G$ не является периодической. Следовательно, в рассматриваемом случае периодическая часть tG группы G ограничена и выделяется прямым слагаемым в G .

ТЕОРЕМА 1.8. Пусть G – смешанная группа с периодической группой автоморфизмов $\text{Aut } G$. Если для любого $p \in \pi_t$ p -ранг группы $\overline{G}$ бесконечен, то G – расщепляющаяся группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся сначала, что группа G не имеет неограниченных примарных компонент. Пусть G_p – неограниченная примарная компонента с базисной подгруппой $B_p = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_{np}$, где $B_{np} = \bigoplus_{i=1}^{m_n} \langle g_{ni} \rangle$ и $o(g_{ni}) = p^n$, $1 \leq m_n < \infty$ (лемма 1.1). Существуют гомоморфизмы группы $\overline{G} = G/tG$ в группы B_{np} ($n = 1, 2, \dots$). Следовательно, для любого n существуют также гомоморфизмы ω_n группы $\overline{G}$ в B_{np} , $\omega_n: \overline{G} \rightarrow B_{np}$. Тогда существует такой единственный гомоморфизм $\varphi: \overline{G} \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} B_{np}$, что все диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} & \overline{G} & \\ \varphi \swarrow & & \searrow \omega_n \\ \prod_{n=1}^{\infty} B_{np} & \xrightarrow{\pi_n} & B_{np} \end{array}$$

коммутативны, где π_n проекции [6, с. 53]. Гомоморфизм φ строится следующим образом: для $\overline{g} \in \overline{G}$ полагаем $\varphi \overline{g} = b$, где b – единственный элемент из $\prod_{n=1}^{\infty} B_{np}$, для которого $\pi_n b = \omega_n \overline{g}$ и $\pi_n \varphi = \omega_n$ для любого $n \geq 1$. Если гомоморфизмы ω_n таковы, что $\omega_n \overline{g} = 0$ почти для всех n (т.е. лишь для конечного числа индексов n $\omega_n \overline{g} \neq 0$), то получаем некоторый гомоморфизм η группы $\overline{G}$ в базисную подгруппу B_p группы G_p , $\eta: \overline{G} \rightarrow B_p$. Так как p -ранг группы $\overline{G}$ бесконечен и G_p – группа неограниченная, то такие гомоморфизмы η можно строить так, чтобы порядки элементов $\omega_n \overline{g}$ не были ограничены в совокупности. В таких случаях получаем, что порядок гомоморфизмов η группы $\overline{G}$ в G_p бесконечен. Рассмотрим теперь стабилизатор цепочки $0 < tG < G$, изоморфный группе $\text{Hom}(G/tG, tG)$. Он является нормальной подгруппой группы $\text{Aut } G$ [7, с. 295]. Но по условию $\text{Aut } G$ – группа периодическая, следовательно, группа G не содержит неограниченных примарных компонент.

Покажем теперь, что π_t – множество конечное. Допустим противное и рассмотрим диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} & \overline{G} & \\ \psi \swarrow & & \searrow \chi_p \\ \prod_{p \in \pi_t} G_p & \xrightarrow{\pi_p} & G_p \end{array},$$

где χ_p – гомоморфизм не p -делимой группы $\overline{G}$ в G_p , $\chi_p: \overline{G} \rightarrow \overline{G}/p\overline{G} \rightarrow G_p$, π_p – проекции. Существует единственный гомоморфизм ψ , замыкающий эти диаграммы до коммутативных [6, с. 53]. Пусть χ_p таковы, что для любого $\bar{g} \in \overline{G}$ и почти для всех $p \in \pi_t$ $\chi_p \bar{g} = 0$. Тогда получаем замыкающий гомоморфизм $\bar{\psi}: \overline{G} \rightarrow tG = \bigoplus_{p \in \pi_t} G_p$. Учитывая теперь бесконечность множества π_t и p -рангов группы $\overline{G}$ для любого $p \in \pi_t$, получаем, что среди гомоморфизмов $\bar{\psi}: \overline{G} \rightarrow tG$ есть гомоморфизмы бесконечного порядка. Следовательно, стабилизатор цепочки $0 < tG < G$, изоморфный группе $\text{Hom}(G/tG, tG)$ содержит автоморфизмы бесконечного порядка, что невозможно. Доказано, что π_t – множество конечное.

Итак, периодическая часть tG смешанной группы G не содержит неограниченных примарных компонент и $tG = \bigoplus_{i=1}^k G_{p_i}$ ($1 \leq k < \infty$). Следовательно, tG – ограниченная сервантная подгруппа группы G и tG выделяется прямым слагаемым в G . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.9. Если G – смешанная группа с периодической группой автоморфизмов $\text{Aut } G$ и $\overline{G} = G/tG$ имеет бесконечный p -ранг, $p \in \pi_t$, то p -компонента G_p – группа ограниченная.

Пусть далее $\Pi(\overline{G}) = \{p \mid p\overline{G} \neq \overline{G}\}$, $\Pi(\overline{G}) \cap \pi_t = \emptyset$, B'_p – p -базисная подгруппа группы G , $B'_p = B_{0p} \oplus (\bigoplus_{n=1}^{\infty} B_{np})$, где $B_{0p} = \bigoplus \mathfrak{N}_p \mathbb{Z}$, B_{np} – прямая сумма циклических групп порядка p^n ($n \geq 1$). Для всякого n группа B_{np} сервантна в G . Если $\text{Aut } G$ – группа периодическая, то B_{np} – группа конечная (лемма 1.1), $B_{np} = \bigoplus_{i=1}^{m_n} \langle g_{ni} \rangle$, где $o(g_{ni}) = p^n$, $1 \leq m_n < \infty$. Рассмотрим цепочку подгрупп $0 < \overline{B}_p < G$, где $\overline{B}_p = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_{np}$. Убедимся, что $G/\overline{B}_p = \hat{G}$ – группа не p -делимая. Допустим противное, пусть уравнение $b_0 + \overline{B}_p = p^k(x + \overline{B}_p)$, где $0 \neq b_0 \in B_{0p}$ разрешимо в $\hat{G}$ для всякого $k \geq 1$. Отсюда $b_0 = p^k x_0 + \bar{b}$ для некоторых $x_0 \in G$, $\bar{b} \in \overline{B}_p$ и $p^m b_0 = p^{k+m} x_0$, где $p^m = o(\bar{b})$. Так как B_{0p} p -сервантна в G [6, с. 163], то $x_0 \in B_{0p}$. Тогда из $p^m(b_0 - p^k x_0) = 0$ следует, что $b_0 = p^k x_0$ и B_{0p} – p -делимая группа. Следовательно, группа $\hat{G}$ не является p -делимой.

ТЕОРЕМА 1.10. Пусть G – смешанная группа с периодической группой автоморфизмов $\text{Aut } G$, у которой $\Pi(\overline{G}) \cap \pi_t = \emptyset$. Если для любого $p \in \pi_t$ ранг без кручения $\mathfrak{N}_p$ p -базисной подгруппы группы G бесконечен, то G – группа расщепляющаяся.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы убедиться, что группа G не содержит неограниченных примарных компонент, достаточно рассмотреть стабилизатор цепочки $0 < \overline{B}_p < G$ и учесть, что $\mathfrak{N}_p$ – бесконечный кардинал.

Пусть π_t – множество бесконечное, $\hat{B} = \bigoplus_{p \in \pi_t} tB'_p$ и $\tilde{G} = G/\hat{B}$. Для любого $p \in \pi_t$ группа $\tilde{G}$ не p -делима. Допустим противное, пусть $\tilde{G}$ p_1 -делимая группа для некоторого $p_1 \in \pi_t$. Тогда для $b_0 \in B_{0p_1}$ и любого $k \geq 1$ в $\tilde{G}$ разрешимо уравнение $b_0 + \hat{B} = p_1^k(x + \hat{B})$. Отсюда $b_0 = p_1^k x_0 + \hat{b}$ для некоторых $x_0 \in G$ и $\hat{b} \in \hat{B}$. Пусть $\hat{b} = b_1 + b_2$, где $b_1 \in tB_{p_1}$, $b_2 \in \bigoplus_{p \neq p_1} tB'_p$, $o(b_1) = p_1^s$, $o(b_2) = m$, причем $(m, p_1) = 1$.

Имеем $p_1^s b_0 = p_1^s(p_1^k x_0 + b_2)$ и так как $B_{0p_1} - p_1$ -сервантная подгруппа группы G , то $p_1^k x_0 + b_2 \in B_{0p_1}$. Но $b_2 = p_1^k b'_2$ для некоторого $b'_2 \in \bigoplus_{p \neq p_1} tB'_p$, тогда $b_0 = p_1^k(x_0 + b'_2)$ и $B_{0p_1} - p_1$ -делимая группа, что невозможно. Следовательно, группа $\tilde{G}$ не p -делима ни на одно $p \in \pi_t$. Рассмотрим теперь стабилизатор цепочки $0 < \tilde{B} < G$, т.е. группу $\text{Hom}(G/\tilde{B}, \tilde{B})$. Для каждой tB_p группа $\text{Hom}(\tilde{G}, tB_p) \neq 0$. Существуют такие гомоморфизмы $\tau: \tilde{G} \rightarrow \prod_{p \in \pi_t} tB_p$, что все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{G} & \\ \tau \swarrow & & \searrow \varphi_p \\ \prod_{p \in \pi_t} tB_p & \xrightarrow{\omega_p} & tB_p \end{array},$$

где $\varphi_p \in \text{Hom}(\tilde{G}, tB_p)$, ω_n – проекции, коммутативны [6, с. 53]. В случае бесконечного π_t , учитывая, что всякий кардинал $\aleph_p$ бесконечен, можно строить замыкающие гомоморфизмы $\tau': \tilde{G} \rightarrow \bigoplus_{p \in \pi_t} tB_p < \prod_{p \in \pi_t} tB_p$ бесконечного порядка. Для этого достаточно положить, что для любого $\tilde{g}$ $\varphi_p \tilde{g} = 0$ почти для всех $p \in \pi_t$. Но тогда получаем, что группа $\text{Aut } G$ содержит автоморфизмы бесконечного порядка. Следовательно, π_t – множество конечное и так как все компоненты G_p ограничены, то tG – группа ограниченная и прямое слагаемое группы G , $G = tG \oplus F$, где F – группа без кручения.

§ 2. Смешанные абелевы группы с совершенными голоморфами

Пусть G – смешанная группа, $\Gamma(G)$ – ее голоморф, т.е. полупрямое расширение группы $\text{Aut } G$ с помощью группы G . Всякий элемент группы $\Gamma(G)$ рассматриваем как пару (g, φ) , $g \in G$, $\varphi \in \text{Aut } G$. Групповая операция определена в $\Gamma(G)$ по правилу: если $(g, \varphi)(a, \psi) \in \Gamma(G)$, то $(g, \varphi) + (a, \psi) = (g + \varphi a, \varphi\psi)$. Элементы группы $\Gamma(G)$ вида (g, ε) , где ε – единица группы $\text{Aut } G$, образуют нормальную подгруппу, изоморфную группе G (отождествляем ее с G), а элементы вида $(0, \varphi)$, где 0 – нулевой элемент группы G , образуют подгруппу, изоморфную $\text{Aut } G$ (отождествляем ее с $\text{Aut } G$). Итак, $\Gamma(G) = G \rtimes \text{Aut } G$, $G \cap \text{Aut } G = (0, \varepsilon)$. Заметим, что если N – нормальная подгруппа группы $\Gamma(G)$ и N_1 , Ψ_1 – соответственно множества всех первых, вторых компонент ее элементов, то N_1 – характеристическая подгруппа группы G , а Ψ_1 – нормальная подгруппа группы $\text{Aut } G$. Группа G является максимальной нормальной абелевой подгруппой группы $\Gamma(G)$ и ее централизатор $C_{\Gamma}(G) = G$. Группу G назовем голоморфно разложимой, если из того, что $(g, \varphi) \in G^{\theta}$, где θ – автоморфизм ее голоморфа, следует (g, ε) , $(0, \varphi) \in G^{\theta}$. Такими группами являются, например, группы с нулевыми 2-компонентами и другие [8].

Пусть $\text{Aut}(\Gamma)$, $\text{Aut}'(\Gamma)$, $\text{Aut}_G(\Gamma)$ – соответственно группа всех автоморфизмов, группа всех внутренних автоморфизмов, группа всех автоморфизмов, отображающих группу G на себя, группы $\Gamma(G)$. Имеем $\text{Aut}'(\Gamma) \leq \text{Aut}_G(\Gamma) \leq \text{Aut}(\Gamma)$, $\text{Aut}'(\Gamma) \trianglelefteq \text{Aut}(\Gamma)$ и $\text{Aut}_G(\Gamma)/\text{Aut}'(\Gamma)$ изоморфна первой группе когомологии группы $\text{Aut } G$ над группой G , $\text{Aut}_G(\Gamma)/\text{Aut}'(\Gamma) \cong H^1(\text{Aut } G, G)$.

Рассмотрим вопрос о совершенности голоморфа смешанной группы G с периодической группой $\text{Aut } G$. Заметим, что если $\Gamma(G)$ – группа с центром $C(\Gamma)$, то $C(\Gamma)$ является 2-группой. Для решения вопроса о совпадении групп $\text{Aut}'(\Gamma) = \text{Aut}_G(\Gamma)$ (т.е. вопроса о характеристичности группы G в группе $\Gamma(G)$) воспользуемся таким свойством голоморфа абелевой группы.

ЛЕММА 2.1 [8, следствие 1]. Пусть G – голоморфно разложимая группа. Если $\Gamma(G)$ имеет такой автоморфизм θ , что $G^\theta \neq G$ и G_1, Φ_1 – соответственно множества всех первых, вторых компонент элементов G^θ , то

- 1) $G^\theta = G_1 \oplus \Phi_1$, $G_1 \neq \langle (0, \varepsilon) \rangle$, $\Phi_1 \neq \langle (0, \varepsilon) \rangle$;
- 2) G_1 – характеристическая подгруппа и прямое слагаемое группы G , $G = G_1 \oplus G_2$;
- 3) $\Phi_1 \cong \text{Hom}(G_2, G_1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Всякая голоморфно разложимая смешанная группа с периодической группой автоморфизмов $\text{Aut } G$ характеристична в своем голоморфе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть θ – такой автоморфизм группы $\Gamma(G)$, что $G^\theta \neq G$. Тогда по лемме 2.1 получаем разложения $G^\theta = G_1 \oplus \Phi_1$, $G = G_1 \oplus G_2$ и G_1 – характеристическая подгруппа группы G . Пусть $\pi_i(tG_i)$ – множество простых чисел, к которому относится периодическая часть tG_i группы G_i ($i = 1, 2$). Убедимся, что $tG \leq G_1$, т.е. $\pi_2(tG_2) = \emptyset$. Действительно, пусть $p \in \pi_1(tG_1) \cap \pi_2(tG_2)$. Тогда G_1 и G_2 – смешанные редуцированные группы. Они имеют циклические прямые слагаемые порядка p^α ($\alpha \geq 1$), поэтому $\text{Hom}(G_1, G_2) \neq 0$. Это противоречит характеристичности G_1 в G_2 . Допустим, что $\pi_1(tG_1) \cap \pi_2(tG_2) = \emptyset$ и $p \in \pi_2(tG_2)$. Тогда G_2 содержит примарную компоненту, каждый элемент которой неподвижен относительно всех автоморфизмов из Φ_1 . Следовательно, централизатор $C_\Gamma(G^\theta)$ группы G^θ относительно $\Gamma(G)$ не совпадает с G^θ , т.е. G^θ не является максимальной нормальной абелевой подгруппой группы $\Gamma(G)$, что невозможно. Отсюда следует $\pi_2(tG_2) = \emptyset$, $tG \leq G_1$ и Φ_1, G_2 – группы без кручения. Если допустить, что $pG_2 \neq G_2$ хотя бы для одного $p \in \pi_1(tG_1) = \pi_t$, то $\text{Hom}(G_2, G_1)$ содержит гомоморфизмы порядка p^α ($\alpha \geq 1$), что невозможно. Если G_2 p -делима для некоторого $p \in \pi_t$, то G_2 имеет автоморфизмы бесконечного порядка, что противоречит условию.

Пусть, далее, G – смешанная расщепляющая группа с периодической группой автоморфизмов $\text{Aut } G$, $G = tG \oplus F$. Согласно предложению 1.2 tG – группа конечная, а F – группа без кручения с периодической группой $\text{Aut } F$. Рассмотрим теперь вопрос: для каких групп G группы $\text{Aut}_G(\Gamma)$ и $\text{Aut}'(\Gamma)$ совпадают (т.е. $H^1(\text{Aut } G, G) = 0$)? Пусть $tG = \bigoplus_{i=1}^k G_{p_i}$, если 2-компонента группы tG нулевая, то $H^1(\text{Aut } tG, tG) = 0$ [9]. Пусть $G_2 \neq 0$, $G_2 = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}(n_i)$, где $n_i = 2^{k_i}$ и $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$. Согласно [10] $H^1(\text{Aut } G_2, G_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $n_1/2 = n_2 = \dots = n_m$ или $n_1 = n_2 < 4n_3 = 4n_4 = \dots = 4n_m$. Следовательно, $H^1(\text{Aut } tG, tG) = 0$ тогда и только тогда, когда $H^1(\text{Aut } G_2, G_2) = 0$ [9] и вычисление группы $H^1(\text{Aut } G, G)$ сводится к вычислению группы $H^1(\text{Aut } F, F)$. При изучении этой группы потребуются некоторые понятия, введенные в [9]. Группа F является FN -группой (т.е. группой без нильпотентных эндоморфизмов) [7, с. 315]. Подгруппа A группы F называется *квазиравной* F , $F \approx A$, если для некоторого натурального m $mF \leq A$. Если $\{F_i\}_{i \in I}$ – такое семейство подгрупп группы F , что $F \approx \bigoplus_{i \in I} F_i$ (I – произвольное множество индексов), то $\bigoplus_{i \in I} F_i$ называется *квазиразложением группы* F , а F_i – ее *квазислагаемым*. Если F имеет лишь тривиальные квазиразложения, то F называется *сильно неразложимой*. Оказывается, что всякая конечная группа автоморфизмов $\Phi \neq \langle \varepsilon \rangle$, $\Phi \leq \text{Aut } F$, содержащая нерегулярные автоморфизмы, индуцирует некоторое квазиразложение группы F вида

$F \approx \bigoplus_{i=1}^s F_i$, где каждое квазислагаемое F_i сервантно и вполне характеристично в F [9].

Пусть группа F обладает квазиразложением $F \approx \bigoplus_{i \in I} F_i$, где каждое квазислагаемое F_i сильно неразложимо и сервантно в F . Для такой группы F без кручения с периодической группой $\text{Aut } F$ справедлив аналог теоремы Холлета–Хирша о строении конечной группы автоморфизмов $\text{Aut } B$ абелевой группы B без кручения [7, с. 318]. В таком случае группа $\text{Aut } F$ и всякая ее подгруппа $\Phi \neq \langle \varepsilon \rangle$ являются подпрямыми произведениями групп, изоморфных $\mathbb{Z}(n)$ ($n = 2, 3, 4, 6$), Q_8 – группе кватернионов, DC_{12} – дициклической группе порядка 12 или BT_{24} – бинарной группе тетраэдра порядка 24 [9]. Если $F \approx \bigoplus_{i \in I} F_i$ – квазиразложение группы F без кручения с сильно неразложимыми сервантными квазислагаемыми F_i конечного ранга, то $\bigoplus_{i \in I} F_i$ называется *полным квазиразложением группы F* [11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть F – сильно неразложимая группа без кручения с периодической группой $\text{Aut } F$.

Голоморф $\Gamma(F)$ группы F совершенен тогда и только тогда, когда $\text{Aut } F$ изоморфна $\mathbb{Z}(6)$, DC_{12} или BT_{24} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.1 группа F характеристична в своем голоморфе. Так как F – группа без кручения, то $\Gamma(F)$ – группа без центра. Пусть $\Gamma(F)$ – группа совершенная. Заметим, что всякий автоморфизм $\varphi \neq \varepsilon$ группы F регулярен. В противном случае F имеет нетривиальные квазиразложения. Отсюда следует, что $\text{Aut } F$ конечна и изоморфна одной из групп $\mathbb{Z}(n)$ ($n = 2, 4, 6$), Q_8 , DC_{12} или BT_{24} [9]. Если допустить, что $\text{Aut } F$ изоморфна $\mathbb{Z}(2)$, $\mathbb{Z}(4)$ или Q_8 , то получаем, что $H^1(\text{Aut } F, F) \neq 0$, т.е. $\text{Aut}'(F) \neq \text{Aut}_G(F)$ [9]. Следовательно, совершенность $\Gamma(F)$ влечет изоморфизм группы $\text{Aut } F$ одной из групп $\mathbb{Z}(6)$, DC_{12} или BT_{24} . Обратно, пусть $\text{Aut } F$ изоморфна одной из этих трех групп. В каждом из этих случаев группа F имеет регулярный автоморфизм нечетного порядка, поэтому $H^1(\text{Aut } F, F) = 0$ [9]. Следовательно, в каждом из этих случаев голоморф $\Gamma(F)$ совершенен.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть F – группа без кручения с периодической группой $\text{Aut } F$ и $F \approx \bigoplus_{i \in I} F_i$ – ее квазиразложение с сильно неразложимыми сервантными квазислагаемыми F_i .

Голоморф $\Gamma(F_i)$ квазислагаемого F_i конечного ранга совершенен тогда и только тогда, когда $\text{Aut } F_i$ изоморфна одной из групп $\mathbb{Z}(6)$, DC_{12} или BT_{24} .

Достаточно учесть, что сильно неразложимое F_i конечного ранга группы F с периодической группой $\text{Aut } F$ имеет конечную группу $\text{Aut } F_i$ [9]. Если допустить, что такое квазислагаемое F_i имеет автоморфизм ψ бесконечного порядка, то некоторая его степень ψ^m ($m \geq 1$) может быть продолжена до автоморфизма самой группы F [11].

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $G = tG \oplus F$ – смешанная группа с $G_2 = 0$ и периодической группой $\text{Aut } G$, часть без кручения F которой обладает квазиразложением $F \approx \bigoplus_{i \in I} F_i$ с сильно неразложимыми сервантными F_i и периодическими $\text{Aut } F_i$.

- 1) Если голоморф группы G совершенен, то каждая группа F_i имеет совершенным голоморф.
- 2) Если $\mathbb{Z}(3) < \Phi_i = \text{Aut } F|_{F_i}$ для всякого $i \in I$, то голоморф $\Gamma(G)$ группы G совершенен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Заметим, что каждая F_i характеристична в F [9] и так как F_i сильно неразложима, то по лемме 2.1 F_i характеристична в своем голоморфе. Каждый ее автоморфизм $\varphi \neq \varepsilon$ регулярен и $\text{Aut } F_i$ изоморфна одной из групп $\mathbb{Z}(n)$ ($n = 2, 4, 6$), Q_8 , DC_{12} или BT_{24} .

Пусть $\Gamma(G)$ – группа совершенная, тогда $H^1(\text{Aut } F, F) = 0$ [12]. Отсюда следует, что и каждая группа $H^1(\Phi_i, F_i) = 0$, где $\Phi_i = \text{Aut } F|_{F_i}$, $\Phi_i \leq \text{Aut } F_i$ [9]. Следовательно, каждая из групп Φ_i содержит элементы порядка 3. Если допустить противное, то Φ_i есть 2-группа, и тогда $H^1(\Phi_i, F_i) \neq 0$ [9]. Доказано, что всякая группа $H^1(\text{Aut } F_i, F_i) = 0$ и каждая $\text{Aut } F_i$ изоморфна $\mathbb{Z}(6)$, DC_{12} или BT_{24} . Согласно предположению 2.3 получаем, что всякая группа F_i имеет совершенный голоморф.

2) Группа G , удовлетворяющая условию теоремы, характеристична в своем голоморфе (предложение 2.2). Убедимся, что группа $H^1(\text{Aut } F, F) = 0$. Пусть каждая Φ_i содержит элементы порядка 3. Следовательно, Φ_i содержит регулярные автоморфизмы нечетного порядка группы F_i , поэтому $H^1(\Phi_i, F_i) = 0$ [9]. Тогда

$$H^1\left(\prod_{i \in I} \Phi_i, \bigoplus_{i \in I} F_i\right) = 0.$$

Отсюда следует, что группа $H^1(\text{Aut } F, F)$ также нулевая [9], но тогда и $H^1(\text{Aut } G, G) = 0$ [12]. Так как G не содержит элементов порядка 2, то $\Gamma(G)$ – группа без центра. Доказано, что голоморф группы G совершенен.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Пусть G – расщепляющаяся смешанная группа с нулевой 2-компонентой и периодической группой $\text{Aut } G$, удовлетворяющая одному из условий:

- 1) F разложима в прямую сумму сильно неразложимых групп;
- 2) всякий автоморфизм каждого квазилагаемого F_i квазиразложения $F \approx \bigoplus_{i \in I} F_i$ с сильно неразложимыми сервантными F_i может быть продолжен до автоморфизма группы F .

Голоморф $\Gamma(G)$ группы G совершенен тогда и только тогда, когда каждая группа $\Gamma(F_i)$ совершенна.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Пусть G – расщепляющаяся смешанная группа с нулевой 2-компонентой и периодической группой $\text{Aut } G$, удовлетворяющая одному из условий:

- 1) F имеет полное квазиразложение, $F \approx \bigoplus_{i \in I} F_i$;
- 2) G – группа конечного ранга;
- 3) $\text{Aut } F$ – группа конечная и $F \approx \bigoplus_{i=1}^m F_i$ – квазиразложение, индуцированное группой $\text{Aut } F$.

Группа G имеет совершенный голоморф тогда и только тогда, когда каждая группа $\Phi_i = \text{Aut } F|_{F_i}$ изоморфна $\mathbb{Z}(6)$, DC_{12} или BT_{24} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если группа без кручения F имеет периодическую группу автоморфизмов $\text{Aut } F$, то $\text{Aut } F$ – группа разрешимая [9]. Будет ли разрешимой периодическая группа автоморфизмов $\text{Aut } G$ расщепляющейся смешанной группы G ?

Учитывая [2], получаем полный ответ на этот вопрос.

Периодическая группа автоморфизмов $\text{Aut } G$ расщепляющейся смешанной группы G разрешима тогда и только тогда, когда каждая ее примарная компонента

$$G_p = \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{m_{ip}} \mathbb{Z}(p^{k_{ip}}),$$

где $0 < k_{1p} < k_{2p} < \dots < k_{np}$, n не зависит от p и $m_{ip} = 0, 1$ или 2 при $p = 2, 3$; $m_{ip} = 0$ или 1 при $p \geq 5$.

Томский государственный университет

Поступило

18.05.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шляфер А. З. Об абелевых группах с периодическими группами автоморфизмов // Абелевы группы и модули. Вып. 6. Томск, 1986. С. 165–177.
- [2] Шляфер А. З. О разрешимости групп автоморфизмов абелевых групп // Абелевы группы и модули. Вып. 7. Томск, 1987. С. 148–155.
- [3] Fuchs L. Abelian groups. Budapest: Acad. Kiado, 1966.
- [4] Мишина А. П. Некоторые условия расщепления смешанных абелевых групп // Укр. матем. ж. 1951. Т. 3. С. 218–232.
- [5] Шляфер А. З. Периодические группы автоморфизмов абелевых групп и модулей. Дисс. ... к. ф.-м. н. Томск: ТГУ, 1986.
- [6] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974.
- [7] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977.
- [8] Беккер И. Х. О голоморфах нередуцированных абелевых групп // Изв. вузов. Матем. 1968. № 8. С. 3–10.
- [9] Беккер И. Х. Об абелевых группах без кручения с периодическими группами автоморфизмов // Изв. вузов. Матем. 1986. № 2. С. 3–12.
- [10] Mills W. H. The automorphisms of the holomorph of a finite Abelian group // Trans. Amer. Math. Soc. 1957. V. 85. № 1. P. 1–34.
- [11] Кожухов С. Ф. Абелевы группы без нильпотентных эндоморфизмов // Абелевы группы и модули. Томск, 1979. С. 87–94.
- [12] Беккер И. Х. О группах скрещенных голоморфизмов групп автоморфизмов абелевых групп без кручения // Изв. вузов. Матем. 1973. № 7. С. 3–11.