Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Гадыльшин, О собственных частотах тел с тонкими отростками. III. Расщепление частот, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 4, 494–502

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1529>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:48:51

УДК 517

О СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТАХ ТЕЛ С ТОНКИМИ ОТРОСТКАМИ. III. РАСЩЕПЛЕНИЕ ЧАСТОТ

Р. Р. Гадильшин

В работе рассматривается задача на собственные значения для оператора Лапласа с граничными условиями Неймана в области, имеющей узкий отросток конечной длины. Исследуется случай, когда предельное значение является собственным как для “основного” тела, так и для отростка. Методом согласования асимптотических разложений построены полные асимптотики собственных значений возмущенной задачи и получены явные формулы для главных членов асимптотик.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. В работах [1], [2] исследовались собственные частоты трехмерных тел Ω_ε , состоящих из двух компонент: фиксированного ограниченного объема Ω и присоединенного к нему тонкого цилиндрического отростка κ_ε , имеющего конечную длину h ; $\varepsilon \ll 1$ – “диаметр” сечения κ_ε (точное определение Ω_ε будет дано ниже). Математическая постановка задачи сводится к следующей краевой задаче на собственные значения (СЗ):

$$(\Delta + \lambda_\varepsilon)\psi_\varepsilon = 0 \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon, \quad (1.1)$$

где ν – внешняя нормаль к Ω_ε , а СЗ λ_ε являются квадратами собственных частот.

Пусть Σ^{in} – множество СЗ задачи Неймана в Ω , а

$$\Sigma^{\text{ch}} = \left\{ \left(\frac{\pi(2m-1)}{2h} \right)^2 \right\}_{m=1}^{\infty}.$$

Элементам из $\Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$ и $\Sigma^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$ предписывается кратность, равная соответственно единице и кратности этих элементов как СЗ задачи Неймана в Ω . Под кратностью $\lambda_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \cap \Sigma^{\text{in}}$, являющегося n -кратным СЗ из Σ^{in} , понимается число $n+1$.

В [1] было показано, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ СЗ задачи (1.1) сходятся к элементам из $\Sigma = \Sigma^{\text{in}} \cup \Sigma^{\text{ch}}$ с соответствием совокупной кратности СЗ возмущенной задачи и кратности предельного значения.

В [2] методом согласования асимптотических разложений [3]–[6] были построены асимптотики СЗ λ_ε задачи (1.1), сходящиеся к $\lambda_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$ и $\lambda_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-00193, и Международным научным фондом, грант NMB000.

где Σ_1^{in} – множество простых собственных значений задачи Неймана в Ω . Из этих построений, в частности, следовало, что первый член теории возмущений для λ_ε имеет порядки ε^2 и ε соответственно.

В настоящей работе строятся полные асимптотики СЗ краевой задачи (1.1), сходящейся к $\lambda_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \cap \Sigma^{\text{ch}}$. Отметим, что из [1] следует, что совокупная кратность СЗ возмущенной задачи, сходящихся к такому λ_0 , равна двум. Но на вопрос о расщеплении СЗ функциональные методы, применявшиеся в [1], естественно, не могут дать ответа. Построенные же в данной работе асимптотики показывают, что существует именно два простых СЗ задачи (1.1), имеющие первые члены теории возмущений порядка ε .

2. Предварительные сведения и формулировка результата. Пусть Ω – связанная ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$, совпадающая в окрестности начала координат с полупространством $x_3 > 0$, а интервал $(0, -h)$, лежащий на оси Ox_3 , не содержит точек из Ω ; $h > 0$.

Далее, пусть $\alpha(t)$ – положительная функция, такая, что

$$\alpha(t) \in C((-\infty, 0]) \cap C^\infty((-\infty, 0)), \\ \alpha^{(n)}(0) = \infty \quad \text{при } n \geq 1, \quad \alpha(t) \equiv 1 \quad \text{при } t \leq -1.$$

Обозначим $\Omega_\varepsilon = \Omega \cup \kappa_\varepsilon$, где

$$\kappa_\varepsilon = \left\{ x\varepsilon : x \in \bigcup_{x_3} (\omega_{\alpha(x_3)} \times x_3), -h\varepsilon^{-1} < x_3 \leq 0 \right\}, \\ \omega_\mu = \{x' = (x_1, x_2) : \mu^{-1}x' \in \omega\},$$

а ω – двумерная односвязная область с бесконечно дифференцируемой границей.

Обозначим через $\|\cdot\|_{0,Q}$ и $\|\cdot\|_{j,Q}$ нормы в $L_2(Q)$ и $W_2^j(Q)$. Ниже сформулировано утверждение, доказанное в [1] и необходимое для строгого обоснования строящихся в настоящей работе асимптотик.

ТЕОРЕМА 2.1. а) Совокупная кратность СЗ $\lambda_\varepsilon^{(j)}$ задачи (1.1), сходящихся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к $\lambda_0 \in \Sigma_1 \cap \Sigma$ равна двум.

б) При любых λ , близких к λ_0 , для решения краевой задачи

$$(\Delta + \lambda)u_\varepsilon = f, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon, \quad (2.1)$$

справедлива равномерная оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{1,\Omega_\varepsilon} \leq C \left(\prod_{j=1}^2 |\lambda_\varepsilon^{(j)} - \lambda| \right)^{-1} \|f\|_{0,\Omega_\varepsilon}. \quad (2.2)$$

в) Если $\lambda_\varepsilon^{(1)} \neq \lambda_\varepsilon^{(2)}$, а функция u_ε ортогональна в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственной функции (СФ), соответствующей СЗ $\lambda_\varepsilon^{(1)}$, то имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{1,\Omega_\varepsilon} \leq C |\lambda_\varepsilon^{(2)} - \lambda|^{-1} \|f\|_{0,\Omega_\varepsilon}. \quad (2.3)$$

Главные члены асимптотик СЗ $\lambda_\varepsilon^{(j)}$ и соответствующих собственных функций $\psi_\varepsilon^{(j)}$ зависят от тех же, что и в [2], вполне определенных постоянных функций.

Обозначим через X гармоническую в

$$\gamma_\omega = \left\{ \xi : \xi \in \bigcup_{\xi_3} (\omega_{\alpha(\xi_3)} \times \xi_3), -\infty < \xi_3 \leq 0 \right\}$$

функцию, удовлетворяющую граничному условию $\partial X / \partial \nu = 0$ на $\partial \gamma_\omega$ и имеющую при $|\xi| \rightarrow \infty$ асимптотики

$$X(\xi) = o(1), \quad \xi_3 \geq 0, \quad X(\xi) = \xi_3 + q_\omega + o(1), \quad \xi_3 < 0.$$

Существование такой функции было показано в [2].

Всюду ниже предполагается, что $\psi(0) \neq 0$, где ψ – СФ задачи Неймана в Ω , соответствующая СЗ λ_0 и нормированная в $L_2(\Omega)$, а через $S(R)$ обозначается шар радиуса R с центром в начале координат.

Основным содержанием работы является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\lambda_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \cap \Sigma^{\text{ch}}$. Тогда существует ровно два простых СЗ $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, $n = 1, 2$, краевой задачи (1.1), сходящихся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к λ_0 .

Асимптотики СЗ $\lambda_\varepsilon^{(n)}$ и соответствующих СФ $\psi_\varepsilon^{(n)}$ имеют вид

$$\lambda_\varepsilon^{(n)} = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \lambda_j^{(n)}, \quad (2.4)$$

$$\lambda_1^{(n)} = q_\omega \left(\frac{|\omega| \lambda_0}{2h} \right)^{1/2} + (-1)^n \left(q_\omega^2 \frac{|\omega| \lambda_0}{2h} + \left(\frac{2|\omega|^3 \lambda_0}{h} \right)^{1/2} \psi^2(0) \right)^{1/2}, \quad (2.5)$$

$$\psi_\varepsilon(x) \sim |\omega| \psi(0) (\lambda_1^{(n)})^{-1} \alpha_n \psi(x), \quad x \in \Omega \setminus S(\varepsilon^{1/2}),$$

$$\psi_\varepsilon(x) \sim \alpha_n \left(X \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + |\omega| \psi^2(0) (\lambda_1^{(n)})^{-1} \right), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}),$$

$$\psi_\varepsilon(x) \sim k_0^{-1} \alpha_n \sin(\lambda_0^{1/2} x_3), \quad x \in \varkappa_\varepsilon \setminus S(\varepsilon^{1/2}),$$

$$\alpha_n = \left(\left(\frac{h|\omega|}{2} \right) \lambda_0^{-1} + \psi^2(0) |\omega|^2 (\lambda_1^{(n)})^{-2} \right)^{-1/2} \quad (2.6)$$

в $L_2(\Omega_\varepsilon)$.

Подчеркнем, что

$$\lambda_1^{(1)} \lambda_1^{(2)} = - \left(\frac{2|\omega|^3 \lambda_0}{h} \right)^{1/2} \psi^2(0) < 0.$$

В заключение раздела для сравнения приведем асимптотики СЗ и СФ, полученные в [2] для случаев $\lambda_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$ и $\lambda_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma_1^{\text{in}}$. Асимптотики СЗ, сходящегося к $\lambda_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$, и соответствующей СФ имеют вид

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 - \varepsilon^2 \psi^2(0) \lambda_0^{1/2} \operatorname{tg}(\lambda_0^{1/2} h) |\omega| + O(\varepsilon^3),$$

$$\psi_\varepsilon(x) \sim \psi(x), \quad x \in \Omega \setminus S(\varepsilon^{1/2}),$$

$$\psi_\varepsilon(x) \sim \psi(0), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}),$$

$$\psi_\varepsilon(x) \sim \psi(0) \cos^{-1}(\lambda_0^{1/2} h) \cos(\lambda_0^{1/2} (x_3 + h)), \quad x \in \varkappa_\varepsilon \setminus S(\varepsilon^{1/2}).$$

Асимптотики СЗ, сходящегося к $\lambda_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$, и соответствующей СФ имеют вид

$$\begin{aligned}\lambda_\varepsilon &= \lambda_0 + \varepsilon q_\omega 2h^{-1} \lambda_0 + O(\varepsilon^2), \\ \psi_\varepsilon(x) &\sim -\varepsilon \left(\frac{2\lambda_0 |\omega|}{h} \right)^{1/2} G(x, 0, \lambda_0), \quad x \in \Omega \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \\ \psi_\varepsilon(x) &\sim \left(\frac{2\lambda_0}{h|\omega|} \right)^{1/2} X\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ \psi_\varepsilon(x) &\sim \varepsilon^{-1} \left(\frac{h|\omega|}{2} \right)^{-1/2} \sin(\lambda_0^{1/2} x_3), \quad x \in \kappa_\varepsilon \setminus S(\varepsilon^{1/2}).\end{aligned}$$

Здесь и всюду далее $G(x, y, \lambda)$ означает функцию Грина задачи Неймана в Ω . Отметим, что в последнем случае (в отличие от случая, рассматриваемого в настоящей работе) функция Грина регулярна по λ в точке λ_0 .

3. Построение асимптотик. Обозначим

$$\begin{aligned}\psi_\varepsilon^{(n)}(x, \lambda) &= (\lambda_0 - \lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j R_j^{(n)}(D_y) G(x, 0, \lambda), \\ R_j^{(n)}(D_y) &= \sum_{i=0}^j P_i^{jn}(D_y), \quad P_i^{jn}(D_y) = \sum_{q=0}^i a_{iqn}^j \frac{\partial^i}{\partial^q y_1 \partial^{i-q} y_2},\end{aligned}$$

где $y = (y_1, y_2, y_3)$, a_{iqn}^j — любые постоянные. Асимптотики СФ $\psi_\varepsilon^{(n)}$ будем искать в виде

$$\psi_\varepsilon^{(n)}(x) = \psi_\varepsilon^{(n)}(x, \lambda_\varepsilon^{(n)}), \quad x \in \Omega \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \quad (3.1)$$

$$\psi_\varepsilon^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j v_j^{(n)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \quad (3.2)$$

$$\psi_\varepsilon^{(n)}(x) = \sum_{j=-1}^{\infty} \varepsilon^j w_j^{(n)}(x_3), \quad x \in \kappa_\varepsilon \setminus S(\varepsilon^{1/2}). \quad (3.3)$$

Внешнее неудобство того, что в ряде (3.1) каждый коэффициент при степенях ε сам зависит от малого параметра, входящего, к тому же, в определение еще найденной функции $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, компенсируется тем, что в такой записи все коэффициенты ряда $\psi_\varepsilon^{(n)}(x, \lambda)$ удовлетворяют уравнению $(\Delta + \lambda)U = 0$ в Ω и граничному условию $\partial U / \partial \nu = 0$ на $\partial\Omega \setminus \{0\}$ при любом λ . Отметим также, что если $\lambda_\varepsilon^{(n)} \rightarrow \lambda_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то при формальном (почленном) переходе к пределу в $\psi_\varepsilon^{(n)}(x, \lambda_\varepsilon^{(n)})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем, что

$$\psi_\varepsilon^{(n)}(x, \lambda_\varepsilon^{(n)}) \rightarrow R_0^{(n)} \psi(0) \psi(x). \quad (3.4)$$

С другой стороны, в [1] доказано, что из любой последовательности $\varepsilon_j \rightarrow 0$ можно выделить подпоследовательность такую, что на ней для нормированных в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ СФ $\Psi_\varepsilon^{(n)}$ имеет место сходимость

$$\|\Psi_\varepsilon^{(n)} - (\alpha_n \psi + \varepsilon^{-1} b_n \varphi)\|_{0, \Omega_\varepsilon} \rightarrow 0, \quad (3.5)$$

где

$$\varphi(x_3) = \left(\frac{h|\omega|}{2} \right)^{-1/2} \sin(\lambda_0^{1/2} x_3), \quad -h < x_3 \leq 0,$$

функции ψ и φ считаются продолженными нулем вне Ω и вне $\mathcal{K}_\varepsilon$ соответственно, а a_n и b_n некоторые постоянные, удовлетворяющие нормирующему равенству

$$a_n^2 + b_n^2 = 1. \quad (3.6)$$

Из (3.5) следует, что главный член асимптотики СФ в отрезке $\mathcal{K}_\varepsilon$ имеет вид $\varepsilon^{-1} b_n \varphi$, что определяет как нижний предел суммирования в (3.3), так и равенство

$$w_{-1}^{(n)} = b_n \varphi. \quad (3.7)$$

Более того, из соотношений (3.4)–(3.6) вытекает необходимость выполнения равенства

$$(R_0^{(n)} \psi(0))^2 + b_n^2 = 1. \quad (3.8)$$

Подставляя ряды (2.4) и (3.3) в (1.1), получаем уравнения на $w_j^{(n)}$:

$$\frac{d^2}{dx_3^2} w_j^{(n)}(x_3) + \lambda_0 w_j^{(n)}(x_3) = - \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i^{(n)} w_{j-i}(x_3), \quad -h < x_3 < 0. \quad (3.9)$$

Легко видеть, что функции (3.7) и

$$w_q^{(n)}(x_3) = -\lambda_0^{-1/2} \sum_{i=1}^{q+1} \lambda_i^{(n)} \int_{-h}^{x_3} \sin(\lambda_0^{1/2}(x_3 - t)) w_{q-i}^{(n)}(t) dt, \quad q \geq 0, \quad (3.10)$$

рассматриваемые как функции, определенные на $\mathcal{K}_\varepsilon$, удовлетворяют уравнению (3.9) и однородному граничному условию Неймана на $\partial \mathcal{K}_\varepsilon \setminus S(\varepsilon)$. Поэтому всюду в дальнейшем коэффициенты ряда (3.3) предполагаются выбранными в соответствии с (3.7) и (3.10).

Краевые задачи для коэффициентов ряда (3.2) получаются стандартным для метода согласования переходом к переменным $\xi = x/\varepsilon$ [2]–[6] и имеют в этих переменных следующий вид:

$$\Delta v_j^{(n)} = -\lambda_0 v_{j-2}^{(n)} - \sum_{i=1}^{j-2} \lambda_i^{(n)} v_{j-i-2}^{(n)}, \quad \xi \in \gamma_\omega, \quad \frac{\partial v_j^{(n)}}{\partial \nu} = 0, \quad \xi \in \partial \gamma_\omega. \quad (3.11)$$

Обозначим через $T_j(\xi)$ однородные функции степени j , удовлетворяющие граничному условию $\partial T_j(\xi)/\partial \xi_3 = 0$ при $\xi_3 = 0$, $\xi \neq 0$, и представляющие собой полиномы или полиномы, умноженные на ρ^{-2q-1} при каком-нибудь целом $q \geq 1$; $\rho = |\xi|$. Ряды вида

$$T(\xi) = \sum_{q=-\infty}^j T_q(\xi)$$

обозначим посредством $\tilde{A}_j$.

На суммах $U(x, \varepsilon)$ типа (3.1) и (3.3) определим оператор переразложения K_q . Разложим коэффициенты $U(x, \varepsilon)$ в ряды при $r = |x| \rightarrow 0$, а функцию $\lambda_\varepsilon^{(n)}$ заменим на ее асимптотический ряд и перейдем к переменным $\xi = x\varepsilon^{-1}$. В полученном таким образом двойном ряду возьмем сумму членов $\varepsilon^j \varphi(\xi)$ при $j \leq q$. Эту сумму и обозначим $K_q(U(x, \varepsilon))$.

Обозначим через $w_\varepsilon^{(n)}$ ряд (3.3). Из определения коэффициентов ряда $w_\varepsilon^{(n)}$ и асимптотик в нуле функции Грина и ее производных (см. [2, леммы 3.1, 3.2]) вытекает справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 3.1. Пусть произвольная функция $\lambda_\varepsilon^{(n)}$ имеет асимптотику вида (2.4). Тогда для любого целого $N \geq 0$

$$K_N(\psi_\varepsilon^{(n)}(x, \lambda_\varepsilon^{(n)})) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i V_i^{(n)}(\xi), \quad K_N(w_\varepsilon^{(n)}(x)) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i W_i^{(n)}(\xi).$$

Ряды $V_i^{(n)} \in \tilde{A}_i$ являются формальными асимптотическими решениями (3.11) при $\rho \rightarrow \infty$ и $\xi_3 \geq 0$, где функции $v_q^{(n)}$ заменены на $V_q^{(n)}$. Многочлены $(i+1)$ -го порядка $W_i^{(n)}$ являются формальными асимптотическими решениями (3.11) при $\rho \rightarrow \infty$ и $\xi_3 < 0$, где функции $w_q^{(n)}$ заменены на $W_q^{(n)}$.

Справедливы следующие представления

$$\begin{aligned} W_i^{(n)}(\xi) &= \tilde{W}_i^{(n)}(\xi) + k_0^{-1} \lambda_{i+1}^{(n)} \left(\frac{2|\omega|}{h} \right)^{-1/2}, \quad k_0 = \lambda_0^{1/2}, \\ \tilde{W}_0^{(n)}(\xi) &= b_n \left(\frac{h|\omega|}{2} \right)^{-1/2} k_0 \xi_3, \\ V_0^{(n)}(\xi) &= R_0^{(n)} \psi^2(0) - \lambda_1^{(n)} \Pi_0^{(n)}, \\ V_s^{(n)}(\xi) &= \tilde{V}_s^{(n)}(\xi) + P_0^{s,n} \psi^2(0) - \lambda_1^{(n)} \Pi_s^{(n)} - \lambda_{s+1}^{(n)} \Pi_0^{(n)}, \quad s \geq 1, \\ \Pi_i^{(n)} &= (2\pi)^{-1} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t P_t^{t+i,n}(D) \rho^{-1}, \quad P_0^{0,n} = R_0^{(n)}, \end{aligned}$$

где $\tilde{V}_i^{(n)}$ и $\tilde{W}_i^{(n)}$ не зависят от $\lambda_{q+1}^{(n)}$ и $P_t^{t+q,n}$ при $q \geq i$.

Согласование асимптотических разложений (3.1)–(3.3) заключается в подборе постоянных $\lambda_{q+2}^{(n)}$ и $P_i^{i+q,n}$ таким образом, чтобы асимптотики функций $v_i^{(n)}$ на бесконечности совпадали с $V_i^{(n)}$ и $W_i^{(n)}$ соответственно при $\xi_3 \geq 0$ и $\xi_3 < 0$.

В силу (3.11) краевая задача для $v_0^{(n)}$ имеет вид

$$\Delta v_0^{(n)} = 0, \quad \xi \in \gamma_\omega, \quad \frac{\partial v_0^{(n)}}{\partial \nu} = 0, \quad \xi \in \partial \gamma_\omega. \quad (3.12)$$

Требуемые же леммой 3.1 главные члены асимптотики на бесконечности имеют вид

$$\begin{aligned} v_0^{(n)}(\xi) &= b_n \left(\frac{h|\omega|}{2} \right)^{-1/2} k_0 \xi_3 + R_0^{(n)} \psi^2(0) + O(\rho^{-1}), \quad \xi_3 \geq 0, \\ v_0^{(n)}(\xi) &= R_0^{(n)} \psi^2(0) + o(1), \quad \xi_3 < 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, функция X является решением (3.12) и имеет на бесконечности асимптотики (см. [2]) вида

$$\begin{aligned} X(\xi) &= c_\omega \rho^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} Z_j(\xi) \rho^{-2j-1}, \quad \xi_3 \geq 0, \\ X(\xi) &= \xi_3 + q_\omega + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \beta_j(\xi') \exp\{\mu_j \xi_3\}, \quad \xi_3 < 0, \end{aligned}$$

где $c_\omega = -(2\pi)^{-1}|\omega|$, Z_j – однородные гармонические полиномы степени j , μ_j^2 – собственные значения задачи Дирихле для $-\Delta$ в ω , а β_j – соответствующие нормированные в $L_2(\omega)$ собственные функции.

Ясно, что положив

$$v_0^{(n)} = b_n \left(\frac{h|\omega|}{2} \right)^{-1/2} k_0 X + R_0^{(n)} \psi^2(0), \quad (3.13)$$

получим решение (3.12) с требуемыми главными членами асимптотик.

Далее, из (3.13) и леммы 3.1 следует, что при $\rho \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} v_0^{(n)}(\xi) - V_0^{(n)}(\xi) &= \left(b_n \left(\frac{h|\omega|}{2} \right)^{-1/2} k_0 c_\omega + (2\pi)^{-1} \lambda_1^{(n)} R_0^{(n)} \right) \rho^{-1} \\ &+ \sum_{t=1}^{\infty} \left(b_n \left(\frac{h|\omega|}{2} \right)^{-1/2} k_0 Z_t(\xi) \rho^{-2t-1} + (-1)^t (2\pi)^{-1} \lambda_1^{(n)} P_t^{t,n}(D) \rho^{-1} \right), \\ \xi_3 &\geq 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} v_0^{(n)}(\xi) - W_0^{(n)}(\xi) &= \left(b_n \left(\frac{h|\omega|}{2} \right)^{-1/2} k_0 q_\omega + R_0^{(n)} \psi^2(0) \right. \\ &\left. - k_0^{-1} \lambda_1^{(n)} \left(\frac{2|\omega|}{h} \right)^{-1/2} \right) + O(\exp\{\mu_1 \xi_3\}), \quad \xi_3 < 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Приравнивая к нулю первые скобки в правых частях (3.14) и (3.15), получаем уравнения

$$\begin{aligned} -b_n \left(\frac{h|\omega|}{2} \right)^{-1/2} k_0 |\omega| + \lambda_1^{(n)} R_0^{(n)} &= 0, \\ b_n \left(\frac{h|\omega|}{2} \right)^{-1/2} k_0 q_\omega + R_0^{(n)} \psi^2(0) - k_0^{-1} \lambda_1^{(n)} \left(\frac{2|\omega|}{h} \right)^{-1/2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Разрешая систему уравнений (3.8), (3.16), находим значение (2.5) для $\lambda_1^{(n)}$ и выражаем через него постоянные $R_0^{(n)}$ и b_n в виде

$$b_n = \left(\frac{h|\omega|}{2} \right)^{-1/2} k_0^{-1} \alpha_n, \quad R_0^{(n)} = |\omega| (\lambda_1^{(n)})^{-1} \alpha_n, \quad (3.17)$$

где множитель α_n определяется равенством (2.6).

Приравнивая в правой части (3.14) к нулю коэффициенты при остальных степенях ρ , определяем дифференциальные операторы $P_t^{t,n}$ при $t \geq 1$.

В результате проделанной процедуры определили постоянные $\lambda_1^{(n)}$, $R_0^{(n)}$ и b_n и решение $v_0^{(n)}$ задачи (3.11), дающие асимптотические равенства при $\rho \rightarrow \infty$

$$v_0^{(n)} = V_0^{(n)}, \quad \xi_3 \geq 0, \quad v_0^{(n)} = W_0^{(n)} + \text{ЭМЧ}, \quad \xi_3 < 0,$$

где ЭМЧ означает экспоненциально малый член.

Дальнейшее доказательство проводится по индукции (см. доказательство теоремы 4.1 в [2]). На N -м шаге по рядам $\tilde{V}_{N-1}^{(n)}$ и многочленам $\tilde{W}_{N-1}^{(n)}$ определяется решение $v_{N-1}^{(n)}$ краевой задачи (3.11), имеющее на бесконечности асимптотики

$$v_{N-1}^{(n)} = \tilde{V}_{N-1}^{(n)} + O(1), \quad \xi_3 \geq 0, \quad v_{N-1}^{(n)} = \tilde{W}_{N-1}^{(n)} + O(1), \quad \xi_3 < 0.$$

Существование таких решений следует из утверждения леммы 3.5 работы [2] и леммы 3.1. Далее, приравнивая к нулю коэффициенты ряда $v_{N-1}^{(n)} - V_{N-1}^{(n)}$ с точностью до членов $O(\rho^{-2})$, а ряда $v_{N-1}^{(n)} - W_{N-1}^{(n)}$ с точностью до ЭМЧ, получаем систему двух линейных уравнений на $\lambda_N^{(n)}$ и $P_0^{N-1,n}$, разрешая которую находим эти постоянные. И, наконец, приравнивая разность $v_{N-1}^{(n)} - V_{N-1}^{(n)}$ к нулю, определяем дифференциальные полиномы $P_t^{N-1+t,n}$ и получаем асимптотические равенства (при $\rho \rightarrow \infty$)

$$v_{N-1}^{(n)} = V_{N-1}^{(n)}, \quad \xi_3 \geq 0, \quad v_{N-1}^{(n)} = W_{N-1}^{(n)} + \text{ЭМЧ}, \quad \xi_3 < 0.$$

Если обозначить через $v_{\varepsilon,N}^{(n)}(x/\varepsilon)$ частичные суммы ряда (3.2), то приведенную выше процедуру можно сформулировать в виде следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3.1. *Существуют функции $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, имеющие асимптотики (2.4), и ряды (3.1)–(3.3) такие, что*

- а) *коэффициенты $v_i^{(n)}$ ряда (3.2) являются решениями рекуррентной системы краевых задач (3.11) и при $\rho \rightarrow \infty$ имеют рост $O(\rho^{i+1})$;*
- б) *имеют место равенства (2.5), (2.6), (3.7), (3.10), (3.13), (3.17), (3.5);*
- в) *для любого целого $N \geq 0$ при $\rho \rightarrow \infty$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} K_N(\psi_\varepsilon^{(n)}(x, \lambda_\varepsilon^{(n)})) &= v_{\varepsilon,N}^{(n)}(\xi), & \xi_3 \geq 0, \\ K_N(w_\varepsilon^{(n)}(x)) &= v_{\varepsilon,N}^{(n)}(\xi) + \text{ЭМЧ}, & \xi_3 < 0. \end{aligned}$$

Обозначим через $\psi_{\varepsilon,N}^{(n)}(x, \lambda)$, $w_{\varepsilon,N}^{(n)}(x)$ частичные суммы рядов $\psi_\varepsilon^{(n)}(x, \lambda)$, $w_\varepsilon^{(n)}(x)$, продолженные нулем соответственно вне Ω и вне $\mathcal{K}_\varepsilon$, и положим

$$\psi_{\varepsilon,N}^{(n)}(x) = \chi(r\varepsilon^{-1/2})(\psi_{\varepsilon,N}^{(n)}(x, \lambda_\varepsilon^{(n)}) + w_{\varepsilon,N}^{(n)}(x)) + (1 - \chi(r\varepsilon^{-1/2}))v_{\varepsilon,N}^{(n)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где $\chi(t)$ гладкая срезающая функция, равная нулю при $t < 1$ и единице при $t > 2$.

Из утверждений теоремы 3.1 вытекает

ЛЕММА 3.2. *Пусть функция $\lambda_\varepsilon^{(n)}$ и ряды (3.1)–(3.3) удовлетворяют утверждениям теоремы 3.1. Тогда для любого $N \geq 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$\|\psi_{\varepsilon,N}^{(n)}\|_{0,\Omega} \rightarrow 1 \tag{3.18}$$

и функция $\psi_{\varepsilon,N}^{(n)} \in C^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ является решением задачи (2.1) при $\lambda = \lambda_\varepsilon^{(n)}$ и

$$\|f\|_{0,\Omega_\varepsilon} < C_N \varepsilon^{N_1}, \tag{3.19}$$

где N_1 растет неограниченно вместе с N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Тот факт, что СЗ имеют асимптотики, совпадающие с асимптотиками, построенными в теореме 3.1, непосредственно вытекает из утверждения леммы 3.2, произвола в выборе N и оценки (2.2).

В свою очередь, из явного вида главных членов асимптотик СЗ следует, что СЗ $\lambda_\varepsilon^{(n)}$ – простые.

С учетом последнего результата, справедливость построенных асимптотик СФ вытекает из (3.18), (3.19) и оценки (2.3).

Явные формулы для главных членов асимптотик СФ следуют из (3.7), (3.13) и (3.17). Теорема доказана.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа

Поступило

22.12.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гадильшин Р. Р. О собственных частотах тел с тонкими отростками. I. Сходимость и оценки // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 10–21.
- [2] Гадильшин Р. Р. О собственных частотах тел с тонкими отростками. II. Асимптотики // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 1. С. 20–34.
- [3] Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
- [4] Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
- [5] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
- [6] Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 2. С. 347–371.