Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Данилова, Отображение Абеля–Якоби для вещественных гиперэллиптических римановых поверхностей, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 6, 833–839

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm153>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:33:46

УДК 512.7

ОТОБРАЖЕНИЕ АБЕЛЯ–ЯКОБИ ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

О. В. Данилова

Для вещественной гиперэллиптической римановой поверхности произвольного рода рассматриваются степени отображения Абеля–Якоби. Изучаются ограничения соответствующих отображений на симметрические произведения множества вещественных точек данной римановой поверхности.

Библиография: 7 названий.

Введение. Рассмотрим компактную риманову поверхность S рода g с вещественной структурой $\tau: S \rightarrow S$, где τ – антиголоморфная инволюция. Будем предполагать, что множество вещественных точек $S(\mathbb{R}) = S^\tau$ непусто. Выберем точку $p_0 \in S(\mathbb{R})$; тогда определено *отображение Абеля–Якоби*

$$\mu: S \rightarrow J$$

и оно вещественно, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\tau} & S \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ J & \xrightarrow{\theta} & J \end{array},$$

где $\theta: J \rightarrow J$ – вещественная структура на многообразии Якоби J , индуцированная вещественной структурой τ на S . Ограничим отображение Абеля–Якоби на вещественные точки поверхности S :

$$\mu: S(\mathbb{R}) \rightarrow J(\mathbb{R}). \quad (1)$$

Это отображение является вложением, оно изучалось в работах Краснова (см. [1], [2]). В частности, в них было доказано, что отображение (1) переводит разные компоненты связности множества $S(\mathbb{R})$ в разные компоненты связности множества $J(\mathbb{R})$, а также, что образ $\mu(S(\mathbb{R}))$ порождает группу $J(\mathbb{R})$. Последнее утверждение означает, что симметрическая степень отображения (1)

$$\mu^{(k)}: S(\mathbb{R})^{(k)} \rightarrow J(\mathbb{R}) \quad (2)$$

будет сюръективным отображением при больших k , где $S(\mathbb{R})^{(k)}$ – k -кратное симметрическое произведение множества $S(\mathbb{R})$ на себя, а отображение (2) определяется правилом:

$$\text{если } p_1 + \dots + p_k \in S(\mathbb{R})^{(k)}, \quad \text{то } \mu^{(k)}(p_1 + \dots + p_k) = \mu(p_1) + \dots + \mu(p_k).$$

Возникает вопрос об устройстве отображения (2) при всех k . Соответствующее отображение для множества комплексных точек

$$\mu^{(k)}: S^{(k)} \rightarrow J \quad (3)$$

глубоко изучено (см., например, [3]–[5]). В этой статье сделана попытка обобщить результаты, полученные для гиперэллиптических римановых поверхностей рода 2 и 3 (см. [6]). Отметим, что мы рассматриваем отображение (2) только для $k \leq g$.

1. Обозначения и предварительные замечания. В этом пункте излагаются основные факты из алгебраической геометрии и топологии, необходимые нам для описания структуры отображения (2).

Напомним прежде всего, что n -я симметрическая степень $X^{(n)}$ топологического пространства X определяется как фактор прямого произведения $X^n = X \times \dots \times X$ по действию симметрической группы G_n . Одной из интерпретаций этого пространства является пространство неупорядоченных наборов из n точек на X . В частности, если X является поверхностью, то $X^{(n)}$ – многообразие; если X является многообразием, то $X^{(n)}$ – орбиобразие¹.

В случае, когда X является окружностью, Мортонем было доказано (см. [7]), что симметрическое произведение $X^{(n)}$ имеет структуру топологического многообразия с краем. Введем некоторые обозначения. Пусть Σ – стандартная окружность, заданная уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Определим отображение $e: \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ как накрывающее отображение $e(t) = e^{2\pi i t}$. Отображение $\Sigma^n \rightarrow \Sigma$, определяемое правилом $(\lambda_1, E, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 \cdots \lambda_n$, инвариантно относительно действия группы G_n и, таким образом, определено той же формулой отображение симметрической степени $\Sigma^{(n)} \rightarrow \Sigma$. Оно является расслоением над окружностью со слоем $\Sigma_0^{(n)}$ – пространством неупорядоченных n -ок точек на окружности с произведением 1. Пусть Δ^{n-1} – $(n-1)$ -мерный симплекс, определяемый как множество точек

$$\{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \leq \dots \leq x_n \leq x_1 + 1, x_1 + \dots + x_n = 0\}.$$

Мортонем было построено отображение $\psi: \Delta^{n-1} \rightarrow \Sigma_0^{(n)}$, действующее по правилу

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = e(x_1) + \dots + e(x_n),$$

которое является гомеоморфизмом. Таким образом, $\Sigma^{(n)}$ является расслоением на диски над окружностью. При четных n оно является неориентируемым расслоением, при нечетном n – ориентируемым (тривиальным) расслоением.

¹Напомним, что *орбиобразием* (или *V-многообразием*) называется хаусдорфово пространство M , которое локально гомеоморфно в каждой точке $x \in M$ факторпространству $\mathbb{R}^n/G_x$, где G_x – некоторая конечная группа, возможно различная для разных точек x .

Пусть далее на топологическом пространстве X определена инволюция $j: X \rightarrow X$. Рассмотрим подмножества $X_l^{(n)}$, $1 \leq l \leq [n/2]$, и $X^{\{n\}}$ симметрического произведения $X^{(n)}$, состоящие соответственно из точек вида

$$p_1 + j(p_1) + \dots + p_l + j(p_l) + q_1 + \dots + q_{n-2l} \quad \text{и} \quad q_1 + \dots + q_n,$$

где ни одна пара точек q_{i_1}, q_{i_2} не связана на X инволюцией j . Заметим, что каждая точка множества $\{p + j(p)\} \subset X^{(2)}$ определяется как неупорядоченная пара $(p, j(p))$ из X , следовательно, это множество совпадает с факторпространством X/j . Тогда множество $X_l^{(n)}$ является образом отображения-вложения

$$(X/j)^{(l)} \times X^{\{n-2l\}} \rightarrow X^{(n)},$$

определяемого по правилу

$$(p_1 + j(p_1) + \dots + p_l + j(p_l), q_1 + \dots + q_m) \mapsto p_1 + j(p_1) + \dots + p_l + j(p_l) + q_1 + \dots + q_{n-2l};$$

поэтому мы будем отождествлять его с прямым произведением $(X/j)^{(l)} \times X^{\{n-2l\}}$.

Предположим теперь, что пространство X состоит из m компонент связности и инволюция $j: X \rightarrow X$ переводит каждую компоненту X_k , $1 \leq k \leq m$, в себя. Симметрическое произведение $X^{(n)}$ является в этом случае несвязной суммой

$$\bigsqcup_{i_1 + \dots + i_m = n} X_1^{(i_1)} \times \dots \times X_m^{(i_m)}.$$

Обозначим каждое слагаемое $X_1^{(i_1)} \times \dots \times X_m^{(i_m)}$ через $X^{(i_1, \dots, i_m)}$. Тогда справедливо равенство

$$\bigsqcup_{i_1 + \dots + i_m = n} X_1^{(i_1)} \times \dots \times X_m^{(i_m)} = \bigsqcup_{i_1 + \dots + i_m = n} X^{(i_1, \dots, i_m)},$$

причем если для некоторого слагаемого $X^{(i_1, \dots, i_m)}$ какое-либо $i_r = 0$, то соответствующий сомножитель $X_r^{(i_r)}$ отсутствует.

В силу того, что инволюция $j: X \rightarrow X$ переводит каждую компоненту X_k в себя, для множества $X_l^{(n)}$ имеем

$$(X/j)^{(l)} = (X_1/j \sqcup \dots \sqcup X_m/j)^{(l)} = \bigsqcup_{i_1 + \dots + i_m = l} (X_1/j)^{(i_1)} \times \dots \times (X_m/j)^{(i_m)}.$$

Кроме того, имеет место равенство

$$X^{\{n-2l\}} = \bigsqcup_{k_1 + \dots + k_m = n-2l} X^{\{k_1, \dots, k_m\}}.$$

Таким образом,

$$X_l^{(n)} = \bigsqcup_{\substack{i_1 + \dots + i_m = l \\ k_1 + \dots + k_m = n-2l}} (X/j)^{(i_1)} \times \dots \times (X/j)^{(i_m)} \times X_1^{\{k_1\}} \times \dots \times X_m^{\{k_m\}}.$$

Предположим, что каждая компонента связности X_k , $1 \leq k \leq m$, пространства X является стандартной окружностью Σ_k , заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Рассмотрим на каждой окружности Σ_k два типа инволюции $j: \Sigma_k \rightarrow \Sigma_k$: отражение относительно оси Ox ; отражение относительно начала координат O .

В первом случае $\Sigma_k/j = D_k$ — диаметр Σ_k , совпадающий с осью Ox , и, следовательно,

$$X_l^{(n)} = \bigsqcup_{\substack{i_1 + \dots + i_m = l \\ k_1 + \dots + k_m = n - 2l}} D^{(i_1, \dots, i_m)} \times \Sigma^{\{k_1, \dots, k_m\}},$$

где $D^{(i_1, \dots, i_m)} = D_1^{(i_1)} \times \dots \times D_m^{(i_m)}$ и $\Sigma^{\{k_1, \dots, k_m\}} = \Sigma_1^{\{k_1\}} \times \dots \times \Sigma_m^{\{k_m\}}$.

Во втором случае $\Sigma_k/j = \Sigma_k$ и, следовательно,

$$X_l^{(n)} = \bigsqcup_{\substack{i_1 + \dots + i_m = l \\ k_1 + \dots + k_m = n - 2l}} \Sigma^{(i_1, \dots, i_m)} \times \Sigma^{\{k_1, \dots, k_m\}}.$$

В конце этого пункта опишем кратко структуру отображения (3) в случае, когда поверхность S является гиперэллиптической, т.е. представляется в виде двулистного (разветвленного) накрытия комплексной проективной прямой $\mathbb{CP}^1$. Пусть

$$j: S \rightarrow S$$

— соответствующая инволюция, переставляющая листы этого накрытия. Рассмотрим подмножество $S_l^{(k)}$ симметрического произведения $S^{(k)}$. Заметим, что множество точек $p + j(p) \subset S^{(2)}$ биголоморфно комплексной проективной прямой $\mathbb{CP}^1$ (см. [3]), поэтому множество точек $p_1 + j(p_1) + \dots + p_l + j(p_l) \in S^{(2l)}$ биголоморфно ее l -й симметрической степени $(\mathbb{CP}^1)^{(l)} = \mathbb{CP}^l$ и множество $S_l^{(n)}$ отождествляется с прямым произведением $\mathbb{CP}^l \times S^{\{k-2l\}}$. Пусть W_k — образ отображения (3). Заметим, что $W_k = J$, если $k = g$. Тогда для отображения

$$\mu^{(k)}: S^{(k)} \rightarrow W_k$$

справедливо следующее утверждение (см., например, [5]): это отображение бирационально и стягивает каждое множество $S_l^{(k)}$ вдоль слоев $\mathbb{CP}^l \times b$ на множество

$$lq_0 + \mu^{(k-2l)}(S^{\{k-2l\}}), \quad \text{где } q_0 = \mu(j(p_0)),$$

причем каждая точка образа является особой точкой кратности $(g - k + l)$ и, кроме того, имеет место вложение

$$\mu^{(k-2l)}: S^{\{k-2l\}} \hookrightarrow J.$$

2. Кратное отображение Абеля–Якоби на вещественных точках. Итак, пусть S – гиперэллиптическая поверхность рода g . Если

$$l_K: S \rightarrow \mathbb{CP}^{g-1}, \quad p \mapsto [\omega_1(p), \omega_2(p), \dots, \omega_g(p)],$$

– каноническое отображение, где $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g$ – базис в $H^0(S, \Omega^1)$, то его образ биголоморфен $\mathbb{CP}^1 = \overline{\mathbb{C}}$ и оно является двулистным накрытием над $\overline{\mathbb{C}}$, задающим структуру гиперэллиптической алгебраической кривой. Тогда

$$j: S \rightarrow S$$

– соответствующая инволюция, переставляющая листы этого накрытия. Она является вещественным отображением (т.е. коммутирующим с инволюцией τ), так как каноническое отображение l_K будет вещественным отображением, если выбрать формы $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g$, удовлетворяющие условиям

$$\tau^*(\omega_1) = \overline{\omega}_1, \quad \tau^*(\omega_2) = \overline{\omega}_2, \quad \dots, \quad \tau^*(\omega_g) = \overline{\omega}_g.$$

Каноническое отображение

$$l_K: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

имеет по теореме Римана–Гурвица $2g + 2$ точек ветвления (см. [4]). Если среди них есть вещественные точки, то их может быть: $2, 4, \dots, 2g + 2$. Чтобы разобраться с отображением

$$\mu^{(k)}: S(\mathbb{R})^{(k)} \rightarrow W_k(\mathbb{R}),$$

нужно выяснить как устроено симметрическое произведение $S(\mathbb{R})^{(k)} \subset S^{(k)}$ и вычислить каждое множество $(S(\mathbb{R}))_l^{(k)} \subset S_l^{(k)}$.

Пусть сначала отображение l_K имеет $2m$, $1 \leq m \leq g + 1$, вещественных точек ветвления. Выберем в качестве точки p_0 одну из них. Следовательно, в этом случае $q_0 = 0$. Множество $S(\mathbb{R})$ состоит из m компонент связности, причем инволюция $j: S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$ переводит каждую компоненту (овал) в себя, оставляя при этом две неподвижные точки (они являются точками ветвления). Поэтому мы можем топологически отождествить каждую такую компоненту с окружностью Σ , заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$, на которой инволюция $j: \Sigma \rightarrow \Sigma$ действует отражением относительно оси Ox . Таким образом,

$$S(\mathbb{R}) = \Sigma_1 \sqcup \dots \sqcup \Sigma_m$$

и, следовательно,

$$S(\mathbb{R})^{(k)} = \bigsqcup_{i_1 + \dots + i_m = k} \Sigma^{(i_1, \dots, i_m)}.$$

В силу вычислений, проведенных в п. 1,

$$S(\mathbb{R})_l^{(k)} = \bigsqcup_{\substack{i_1 + \dots + i_m = l \\ k_1 + \dots + k_m = k - 2l}} D^{(i_1, \dots, i_m)} \times \Sigma^{\{k_1, \dots, k_m\}}.$$

Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть каноническое отображение $l_K: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ имеет $2t$, $1 \leq t \leq g+1$, вещественных точек ветвления. Тогда отображение

$$\mu^{(k)}: D^{(i_1, \dots, i_m)} \times \Sigma^{\{k_1, \dots, k_m\}} \rightarrow \mu^{(k-2l)}(\Sigma^{\{k_1, \dots, k_m\}})$$

является проекцией, стягивающей множество $D^{(i_1, \dots, i_m)} \times b$ в точку $\mu^{(k-2l)}(b)$ множества $\mu^{(k-2l)}(\Sigma^{\{k_1, \dots, k_m\}})$, причем каждая точка образа является особой кратности $(g-l^{k+1})$. Кроме того, имеет место вложение

$$\mu^{(k-2l)}: \Sigma^{\{k_1, \dots, k_m\}} \hookrightarrow J(\mathbb{R}).$$

Осталось разобрать случай, когда двулистное накрытие $l_K: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ не имеет вещественных точек ветвления. Будем сначала предполагать, что риманова поверхность S имеет четный род g . Тогда множество $S(\mathbb{R})$ состоит из одной компоненты связности (см. [6]), причем инволюция $j: S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$ не имеет неподвижных точек. Поэтому мы можем топологически отождествить эту компоненту со стандартной окружностью Σ , заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$, на которой инволюция $j: \Sigma \rightarrow \Sigma$ действует отражением относительно начала координат O . Тогда симметрическое произведение $S(\mathbb{R})^{(k)}$ является k -й симметрической степенью окружности $\Sigma^{(k)}$ и в силу вычислений в п. 1 $S(\mathbb{R})_l^k = \Sigma^{(l)} \times \Sigma^{\{k-2l\}}$.

Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть каноническое отображение $l_K: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ не имеет вещественных точек ветвления, и пусть род g поверхности S четен. Тогда отображение

$$\mu^{(k)}: \Sigma^{(l)} \times \Sigma^{\{k-2l\}} \rightarrow \mu^{(k-2l)}(\Sigma^{\{k-2l\}}) + lq_0,$$

где $q_0 = \mu(p_0)$, является проекцией, стягивающей множество $\Sigma^{(l)} \times b$ в точку $b + lq_0$ множества $\mu^{(k-2l)}(\Sigma^{\{k-2l\}}) + lq_0$, причем каждая точка образа является особой кратности $(g-l^{k+1})$. Кроме того, имеет место вложение

$$\mu^{(k-2l)}: \Sigma^{\{k-2l\}} \hookrightarrow J(\mathbb{R}).$$

Пусть теперь поверхность S имеет нечетный род g . Тогда множество вещественных точек $S(\mathbb{R})$ состоит из двух овалов, причем инволюция $j: S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$ переставляет эти овалы. Если мы отождествим их со стандартными окружностями Σ_1, Σ_2 , то инволюция $j: S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$ отождествляет их друг с другом. Множество $S(\mathbb{R})^{(k)}$ является в этом случае несвязной суммой $\bigsqcup_{i_1+i_2=k} \Sigma^{(i_1, i_2)}$. Заметим далее, что множество точек $p+j(p) \subset \Sigma_1 \times \Sigma_2$ образует диагональ Δ тора $\Sigma_1 \times \Sigma_2 = \Sigma_1 \times \Sigma_1$, если мы отождествим Σ_1 с Σ_2 с помощью отображения $j: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$. Поэтому множество

$$S(\mathbb{R})_l^{(k)} = \bigsqcup_{k_1+k_2=k-2l} \Delta^{(l)} \times \Sigma^{\{k_1, k_2\}}.$$

Тогда после этих вычислений получаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть каноническое отображение $l_K: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ не имеет вещественных точек ветвления, и пусть род g поверхности S нечетный. Тогда отображение

$$\mu^{(k)}: \Delta^{(l)} \times \Sigma\{k_1, k_2\} \rightarrow \mu^{(k-2l)}(\Sigma\{k_1, k_2\}) + lq_0,$$

где $q_0 = \mu(p_0)$, является проекцией, стягивающей множество $\Delta^{(l)} \times b$ в точку $b + lq_0$ множества $\mu^{(k-2l)}(\Sigma\{k_1, k_2\}) + lq_0$, причем каждая точка образа является особой кратности $\binom{g-k+l}{l}$. Кроме того, имеет место вложение

$$\mu^{(k-2l)}: \Sigma\{k_1, k_2\} \hookrightarrow J(\mathbb{R}).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Краснов В. А. Отображение Альбанезе для вещественных алгебраических многообразий // Матем. заметки. 1982. Т. 32. № 3. С. 365–374.
- [2] Краснов В. А. Отображение Альбанезе для $GM\mathbb{Z}$ -многообразий // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 5. С. 739–747.
- [3] Gunning R. C. Lectures on Riemann Surfaces, Jacobi Varieties. Princeton Math. Notes. V. 12. Princeton, 1972.
- [4] Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. I. М.: Мир, 1982.
- [5] Mumford D. Curves and their Jacobians. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1975.
- [6] Данилова О. В., Краснов В. А. Отображение Абеля–Якоби для вещественной гиперэллиптической римановой поверхности рода 3 // Матем. заметки. 2004. Т. 75. № 5. С. 644–651.
- [7] Morton H. R. Symmetric products of the circle // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1967. V. 63. P. 349–352.

Ярославский государственный университет
E-mail: olga-dan@mail.ru

Поступило
10.06.2003