Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Горбачев, Построение экстремальной функции для одного функционала на классе $H_{\omega}^{(n)}$, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 4, 519–529

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1531>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 10:18:32

УДК 517.5

ПОСТРОЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА КЛАССЕ $H_{\omega}^{(n)}$

Д. В. Горбачёв

Для одного функционала на классе $H_{\omega}^{(n)}$ при $n \geq 3$ строится экстремальная функция, на которой достигается оценка сверху, полученная А. И. Степанцом.
Библиография: 3 названия.

Введение. Пусть

$$P_{ab} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$$

– n -мерный прямоугольник;

$$H_{\omega}^{(n)}(P_{ab}) = \left\{ f(x) \in C(P_{ab}) \mid \forall x, x' \in P_{ab} \right. \\ \left. |f(x) - f(x')| = |f(x_1, \dots, x_n) - f(x'_1, \dots, x'_n)| \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(|x_i - x'_i|) \right\},$$

где $\omega_i(x_i)$ – одномерные модули непрерывности; $c \in P_{ab}$,

$$\psi(x) = \prod_{i=1}^n \psi_i(x_i),$$

$\psi_i(x_i)$ – суммируемые на (a_i, b_i) функции, обладающие свойством, что $\psi_i(x_i) < 0$ ($\psi_i(x_i) > 0$) почти всюду на (a_i, c_i) , $\psi_i(x_i) > 0$ ($\psi_i(x_i) < 0$) почти всюду на (c_i, b_i) и

$$\int_{a_i}^{b_i} \psi_i(x_i) dx_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Рассмотрим задачу о точной верхней грани функционала

$$\int_{P_{ab}} \psi(x) f(x) dx$$

на классе $H_\omega^{(n)}(P_{ab})$. Положим

$$\mathcal{E}(\psi, \omega) = \sup_{f \in H_\omega^{(n)}(P_{ab})} \left| \int_{P_{ab}} \psi(x) f(x) dx \right|. \quad (2)$$

Знание величины (2) и экстремальной функции в (2) играет большую роль при нахождении точных верхних граней уклонений на классах $W^r H_\omega$ (см. [1]).

Для выпуклого модуля непрерывности в одномерном случае рассматриваемая задача была решена Н. П. Корнейчуком и, независимо, С. Б. Стечкиным, и ее решение известно как лемма Корнейчука–Стечкина (историю вопроса см. в [1], [2]).

В двумерном случае (для выпуклых модулей непрерывности) эта задача полностью решена А. И. Степанцом [1], [3]. Им же (см. [1, с. 71]) получена оценка сверху (2) и в случае произвольной размерности:

$$\mathcal{E}(\psi, \omega) \leq 2^{n-1} \int_{P_{ac}} |\psi(x)| \min_i \omega_i(\rho_i(x_i) - x_i) dx. \quad (3)$$

Здесь

$$P_{ac} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq c_i, i = 1, \dots, n\},$$

$\rho_i(x_i)$ – функции, которые определяются на $[a_i, c_i]$ посредством равенств

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{x_i} \psi_i(t_i) dt_i &= \int_{a_i}^{\rho_i(x_i)} \psi_i(t_i) dt_i, \\ a_i \leq x_i \leq c_i \leq \rho_i(x_i) &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

Точность оценки (3) для выпуклых модулей непрерывности $\omega_i(x_i)$ была установлена А. И. Степанцом (см. [1]) только лишь для симметричного ядра $\psi(x)$, для которого

$$\psi_i(x_i) = -\psi_i(2c_i - x_i), \quad c_i = \frac{a_i + b_i}{2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

В настоящей работе строится экстремальная функция в оценке (3) для произвольного ядра $\psi(x)$ и произвольных выпуклых модулей непрерывности $\omega_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, и тем самым доказывается ее точность в этом случае.

Автор благодарит В. И. Иванова за постановку задачи и внимание к работе

1. Построение экстремальной функции. В дальнейшем

P_n – множество всех перестановок $\{1, \dots, n\}$;

C_n – множество всех упорядоченных по возрастанию подмножеств $\{1, \dots, n\}$;

$C_{n,k} \subset C_n$ – множество всех упорядоченных по возрастанию подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$, не содержащих числа k ;

$|M|$ – количество элементов в конечном множестве M .

Известно, что $|\Pi_n| = n!$, $|C_n| = 2^n$, $|C_{n,k}| = 2^{n-1}$.

Пусть $x \in P_{ac}$, $J = \{j_1, \dots, j_p\} \in C_n$, $D \subset P_{ac}$,

$$\begin{aligned} x(J) &= (x_1, \dots, \rho_{j_1}(x_{j_1}), \dots, \rho_{j_p}(x_{j_p}), \dots, x_n), \\ D(J) &= \{x(J) \mid x \in D\}, \\ P_{ac}(J) &= \{x \in P_{ab} \mid a_1 \leq x_1 \leq c_1, \dots, c_{j_1} \leq x_{j_1} \leq b_{j_1}, \dots, \\ &\quad c_{j_p} \leq x_{j_p} \leq b_{j_p}, \dots, a_n \leq x_n \leq c_n\}. \end{aligned}$$

Отображение $D \rightarrow D(J)$ непрерывно и взаимно однозначно, так как $\rho_i(x_i)$ в силу (4) непрерывны и строго убывают (см. [1, с. 19]). Ясно, что $P_{ab} = \bigcup_{J \in C_n} P_{ac}(J)$, $P_{ac}(\emptyset) = P_{ac}$.

В дальнейшем, без ограничения общности, мы можем считать, что $\omega_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, строго монотонны и

$$\omega_i(b_i - a_i) = \omega_j(b_j - a_j), \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (5)$$

Если $P_{ij} = \{a_i \leq x_i \leq c_i, a_j \leq x_j \leq c_j\}$, то множество

$$L = \{(x_i, x_j) \in P_{ij} \mid \omega_i(\rho(x_i) - x_i) = \omega_j(\rho_j(x_j) - x_j)\},$$

будет графиком абсолютно непрерывной, строго возрастающей функции $x_j = \xi_{ji}(x_i)$, $a_i \leq x_i \leq c_i$, $\xi_{ji}(a_i) = a_j$, $\xi_{ji}(c_i) = c_j$. Отметим, что $\xi_{ji}^{-1}(x_j) = \xi_{ij}(x_j)$ (см. [1]). Имеем

$$\omega_i(\rho_i(x_i) - x_i) = \omega_j(\rho_j(\xi_{ji}(x_i)) - \xi_{ji}(x_i)), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j. \quad (6)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\begin{aligned} \omega_i(\rho_i(\xi_{ik}(x_k)) - \xi_{ik}(x_k)) &= \omega_j(\rho_j(\xi_{jk}(x_k)) - \xi_{jk}(x_k)), \\ 1 \leq i, j, k \leq n, \quad i \neq j \neq k. \end{aligned}$$

Полагая $x_i = \xi_{ik}(x_k)$, получим $\xi_{jk}(x_k) = \xi_{ji}(x_i) = \xi_{ji}(\xi_{ik}(x_k))$. Окончательно

$$\xi_{ji}(\xi_{ik}(x_k)) = \xi_{jk}(x_k), \quad a_k \leq x_k \leq c_k, \quad 1 \leq i, j, k \leq n, \quad i \neq j \neq k. \quad (7)$$

Кривая $x_j = \xi_{ji}(x_i)$ разбивает P_{ij} на два множества

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x_i, x_j) \in P_{ij} \mid \omega_i(\rho_i(x_i) - x_i) \leq \omega_j(\rho_j(x_j) - x_j)\} \\ &= \{(x_i, x_j) \in P_{ij} \mid a_i \leq x_i \leq c_i, a_j \leq x_j \leq \xi_{ji}(x_i)\}, \\ E_2 &= \{(x_i, x_j) \in P_{ij} \mid \omega_j(\rho_j(x_j) - x_j) \leq \omega_i(\rho_i(x_i) - x_i)\} \\ &= \{(x_i, x_j) \in P_{ij} \mid a_j \leq x_j \leq c_j, a_i \leq x_i \leq \xi_{ij}(x_j)\} \end{aligned}$$

(подробнее об этих кривых и множествах см. [1, с. 39–40]).

Разобьем P_{ac} на $n!$ множеств следующим образом. Если $I = \{i_1, \dots, i_n\} \in \Pi_n$, то

$$\begin{aligned} E(I) &= \{x \in P_{ac} \mid \omega_{i_1}(\rho_{i_1}(x_{i_1}) - x_{i_1}) \leq \dots \leq \omega_{i_n}(\rho_{i_n}(x_{i_n}) - x_{i_n})\} \\ &= \{x \in P_{ac} \mid a_{i_1} \leq x_{i_1} \leq c_{i_1}, a_{i_2} \leq x_{i_2} \leq \xi_{i_2 i_1}(x_{i_1}), \dots, \\ &\quad a_{i_n} \leq x_{i_n} \leq \xi_{i_n i_{n-1}}(x_{i_{n-1}})\}. \end{aligned}$$

Для $J \in C_n$ обозначим $E(I)(J) = E(I, J)$. В силу однозначности отображения $E(I) \rightarrow E(I)(J)$ выполнено

$$E(I, J) \subset P_{ac}(J), \quad P_{ac}(J) = \bigcup_{I \in \Pi_n} E(I, J), \quad P_{ab} = \bigcup_{\substack{I \in \Pi_n \\ J \in C_n}} E(I, J).$$

Найдем границу $E(I, J)$. Граница $E(I)$, лежащая внутри P_{ab} , будет состоять из следующих кусков:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{x \in E(I) \mid x_{i_1} = c_{i_1}\} = E(I) \cap E(I, \{i_1\}), \\ L_{2,k} &= \{x \in E(I) \mid \omega_{i_k}(\rho_{i_k}(x_{i_k}) - x_{i_k}) = \omega_{i_{k+1}}(\rho_{i_{k+1}}(x_{i_{k+1}}) - x_{i_{k+1}})\} \\ &= \{x \in E(I) \mid x_{i_{k+1}} = \xi_{i_{k+1}i_k}(x_{i_k})\} = E(I) \cap E(I'), \\ I &= \{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_n\}, \quad I' = \{i_1, \dots, i_{k+1}, i_k, \dots, i_n\} \in \Pi_n, \\ k &= 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{8}$$

Ясно, что граница $E(I, J)$, лежащая внутри P_{ab} , состоит из следующих кусков:

$$E(I, J) \cap E(I, J') \quad \text{и} \quad E(I, J) \cap E(I', J), \quad J' = \begin{cases} J \cup \{i_1\}, & i_1 \notin J, \\ J \setminus \{i_1\}, & i_1 \in J. \end{cases} \tag{9}$$

Пусть

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) \in E(I), \\ x' &= (x_1, \dots, x_{k-1}, x'_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \in P_{ac}, \\ I &= \{i_1, \dots, i_{m-1}, i_m = k, i_{m+1}, \dots, i_n\} \in \Pi_n. \end{aligned}$$

Тогда точка x' может принадлежать только одному из множеств $E(I')$,

$$I' = \{i_1, \dots, i_{m'-1}, i_{m'} = k, i_{m'+1}, \dots, i_n\} \in \Pi_n, \quad m' = 1, \dots, n. \tag{10}$$

Действительно, для $x \in E(I)$

$$\begin{aligned} \omega_{i_1}(\rho_{i_1}(x_{i_1}) - x_{i_1}) &\leq \dots \leq \omega_{i_{m-1}}(\rho_{i_{m-1}}(x_{i_{m-1}}) - x_{i_{m-1}}) \\ &\leq \omega_k(\rho_k(x_k) - x_k) \leq \omega_{i_{m+1}}(\rho_{i_{m+1}}(x_{i_{m+1}}) - x_{i_{m+1}}) \leq \dots \\ &\leq \omega_{i_n}(\rho_{i_n}(x_{i_n}) - x_{i_n}). \end{aligned}$$

Меняя x_k , мы меняем только $\omega_k(\rho_k(x_k) - x_k)$. Поэтому x' принадлежит множеству, для которого

$$\begin{aligned} \omega_{i_1}(\rho_{i_1}(x_{i_1}) - x_{i_1}) &\leq \dots \leq \omega_{i_{m'-1}}(\rho_{i_{m'-1}}(x_{i_{m'-1}}) - x_{i_{m'-1}}) \\ &\leq \omega_k(\rho_k(x'_k) - x'_k) \leq \omega_{i_{m'+1}}(\rho_{i_{m'+1}}(x_{i_{m'+1}}) - x_{i_{m'+1}}) \leq \dots \\ &\leq \omega_{i_n}(\rho_{i_n}(x_{i_n}) - x_{i_n}), \end{aligned}$$

т.е. $E(I')$. Заметим при этом, что если $x_k < x'_k$, то в силу невозрастания функции $\omega_k(\rho_k(x_k) - x_k)$ при $a_k \leq x_k \leq c_k$ будем иметь $m > m'$.

Аналогично, если $x \in E(I, J)$ и $x' \in P_{ac}(J)$, то $x' \in E(I', J)$. Если при этом $x_k < x'_k$ и $k \in J$, то в силу неубывания функции $\omega_k(x_k - \rho_k^{-1}(x_k))$ при $c_k \leq x_k \leq b_k$ будем иметь $m < m'$. Если же $k \notin J$, то по-прежнему, $m > m'$.

Построим экстремальную в оценке (3) функцию $f^*(x)$. Если

$$I = \{i_1, \dots, i_n\} \in \Pi_n, \quad I_m = \{i_1, \dots, i_m\}, \quad I \setminus I_m = \{i_{m+1}, \dots, i_n\}, \quad m = 1, \dots, n, \\ I \setminus I_n = \emptyset, \quad J = \{j_1, \dots, j_p\} \in C_n,$$

ТО ПОЛОЖИМ

$$\hat{f}_1(x_{i_1}; I_1) = \omega'_{i_1}(\rho_{i_1}(x_{i_1}) - x_{i_1}), \quad m = 1,$$

$$\hat{f}_m(x_{i_m}; I_m) = \omega'_{i_m}(\rho_{i_m}(x_{i_m}) - x_{i_m}) \prod_{i \in I_{m-1}} \frac{\rho'_i(\xi_{i i_m}(x_{i_m})) + 1}{\rho'_i(\xi_{i i_m}(x_{i_m})) - 1}, \quad m = 2, \dots, n, \quad (11)$$

$$f_m(x_{i_m}; I_m) = \begin{cases} \int_{x_{i_m}}^{c_{i_m}} \hat{f}_m(t_{i_m}; I_m) dt_{i_m}, & a_{i_m} \leq x_{i_m} \leq c_{i_m} \\ - \int_{c_{i_m}}^{x_{i_m}} \hat{f}_m(\rho_{i_m}^{-1}(t_{i_m}); I_m) dt_{i_m}, & c_{i_m} \leq x_{i_m} \leq b_{i_m} \end{cases}, \quad m = 1, \dots, n, \quad (12)$$

$$f^*(x) = f(x; I, J) = \sum_{m=1}^n (-1)^{|\{I \setminus I_m\} \cap J|} f_m(x_{i_m}; I_m), \quad x \in E(I, J). \quad (13)$$

2. Свойства функций $f_m(x_{i_m}; I_m)$.

а) Если $i_m = k, i_{m+1} = l$,

$$I = \{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}, \dots, i_n\}, \quad I' = \{i_1, \dots, i_{m+1}, i_m, \dots, i_n\} \in \Pi_n,$$

ТО ПРИ $a_k \leq x_k \leq c_k, x_l = \xi_{lk}(x_k)$

$$f_m(x_k; I_m) + f_{m+1}(x_l; I_{m+1}) - f_m(x_l; I'_m) - f_{m+1}(x_k; I'_{m+1}) = 0, \quad (14)$$

ПРИ $a_k \leq x_k \leq c_k, x_l = \rho_l(\xi_{lk}(x_k))$

$$f_m(x_k; I_m) - f_{m+1}(x_l; I_{m+1}) + f_m(x_l; I'_m) + f_{m+1}(x_k; I'_{m+1}) = 0, \quad (15)$$

ПРИ $c_k \leq x_k \leq b_k, x_l = \xi_{lk}(\rho_k^{-1}(x_k))$

$$f_m(x_k; I_m) + f_{m+1}(x_l; I_{m+1}) + f_m(x_l; I'_m) - f_{m+1}(x_k; I'_{m+1}) = 0, \quad (16)$$

ПРИ $c_k \leq x_k \leq b_k, x_l = \rho_l(\xi_{lk}(\rho_k^{-1}(x_k)))$

$$f_m(x_k; I_m) - f_{m+1}(x_l; I_{m+1}) - f_m(x_l; I'_m) + f_{m+1}(x_k; I'_{m+1}) = 0. \quad (17)$$

Проверим, например, (14), (16). Если $a_k \leq x_k \leq c_k, x_l = \xi_{lk}(x_k)$, то в силу (11), (12)

$$\begin{aligned} & f_m(x_k; I_m) + f_{m+1}(x_l; I_{m+1}) - f_m(x_l; I'_m) - f_{m+1}(x_k; I'_{m+1}) \\ &= - \int_{x_k}^{c_k} (\hat{f}_{m+1}(t_k; I'_{m+1}) - \hat{f}_m(t_k; I_m)) dt_k + \int_{x_l}^{c_l} (\hat{f}_{m+1}(t_l; I_{m+1}) - \hat{f}_m(t_l; I'_m)) dt_l \\ &= -2 \int_{x_k}^{c_k} \omega'_k(\rho_k(t_k) - t_k) \prod_{i \in I_{m-1}} \frac{\rho'_i(\xi_{i k}(t_k)) + 1}{\rho'_i(\xi_{i k}(t_k)) - 1} \frac{dt_k}{\rho'_l(\xi_{lk}(t_k)) - 1} \\ &\quad + 2 \int_{x_l}^{c_l} \omega'_l(\rho_l(t_l) - t_l) \prod_{i \in I_{m-1}} \frac{\rho'_i(\xi_{i l}(t_l)) + 1}{\rho'_i(\xi_{i l}(t_l)) - 1} \frac{dt_l}{\rho'_k(\xi_{kl}(t_l)) - 1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Дифференцируя (6), получим

$$\begin{aligned}\Delta(t_k) &= \omega'_k(\rho_k(t_k) - t_k)(\rho'_k(t_k) - 1) \\ &\quad - \omega'_l(\rho_l(\xi_{lk}(t_k)) - \xi_{lk}(t_k))l'_{lk}(t_k)(\rho'_l(\xi_{lk}(t_k)) - 1) = 0.\end{aligned}\quad (19)$$

Делая замену переменной $t_l = \xi_{lk}(t_k)$ в (18) и учитывая (19), а также $\xi_{kl}(\xi_{lk}(t_k)) = t_k$, $\xi_{il}(\xi_{lk}(t_k)) = \xi_{ik}(t_k)$ в силу (7), и $|(\rho'_l(\xi_{lk}(t_k)) - 1)(\rho'_k(t_k) - 1)| > 1$ почти всюду, получим

$$\begin{aligned}&f_m(x_k; I_m) + f_{m+1}(x_l; I_{m+1}) - f_m(x_l; I'_m) - f_{m+1}(x_k; I'_{m+1}) \\ &= -2 \int_{x_k}^{c_k} \prod_{i \in I_{m-1}} \frac{\rho'_i(\xi_{ik}(t_k)) + 1}{\rho'_i(\xi_{ik}(t_k)) - 1} \frac{\Delta(t_k)}{(\rho'_l(\xi_{lk}(t_k)) - 1)(\rho'_k(t_k) - 1)} dt_k = 0.\end{aligned}$$

Пусть теперь $c_k \leq x_k \leq b_k$, $x_l = \xi_{lk}(\rho_k^{-1}(x_k))$. В силу (11), (12)

$$\begin{aligned}&f_m(x_k; I_m) + f_{m+1}(x_l; I_{m+1}) + f_m(x_l; I'_m) - f_{m+1}(x_k; I'_{m+1}) \\ &= \int_{c_k}^{x_k} (\hat{f}_{m+1}(\rho_k^{-1}(t_k); I'_{m+1}) - \hat{f}_m(\rho_k^{-1}(t_k); I_m)) dt_k \\ &\quad + \int_{x_l}^{c_l} (\hat{f}_{m+1}(t_l; I_{m+1}) - \hat{f}_m(t_l; I'_m)) dt_l.\end{aligned}$$

Делая в этих интегралах замены переменных $t_k = \rho_k(\tau_k)$, $t_l = \xi_{lk}(\tau_k)$ и рассуждая далее, как и при доказательстве (14), получим

$$\begin{aligned}&f_m(x_k; I_m) + f_{m+1}(x_l; I_{m+1}) + f_m(x_l; I'_m) - f_{m+1}(x_k; I'_{m+1}) \\ &= 2 \int_{c_k}^{\rho_k^{-1}(x_k)} \prod_{i \in I_{m-1}} \frac{\rho'_i(\xi_{ik}(\tau_k)) + 1}{\rho'_i(\xi_{ik}(\tau_k)) - 1} \frac{\rho'_k(\tau_k)\Delta(\tau_k)}{(\rho'_l(\xi_{lk}(\tau_k)) - 1)(\rho'_k(\tau_k) - 1)} d\tau_k = 0.\end{aligned}$$

Равенство (16) доказано. Равенства (15), (17) доказываются аналогично.

б) Так как $\rho'_i(t_i) \leq 0$, $i = 1, \dots, n$, то

$$\left| \frac{\rho'_i(\xi_{ii_m}(t_{i_m})) + 1}{\rho'_i(\xi_{ii_m}(t_{i_m})) - 1} \right| \leq 1,$$

следовательно, для $m = 2, \dots, n$

$$\left| \prod_{i \in I_{m-1}} \frac{\rho'_i(\xi_{ii_m}(t_{i_m})) + 1}{\rho'_i(\xi_{ii_m}(t_{i_m})) - 1} \right| \leq 1.$$

Отсюда, как и в [1, с. 50], выводится неравенство

$$\begin{aligned}&|f_m(x_{i_m}; I_m) - f_m(x'_{i_m}; I_m)| \leq \int_{x_{i_m}}^{x'_{i_m}} \Omega_{i_m}(t_{i_m}) dt_{i_m}, \\ &\Omega_k(t_k) = \begin{cases} \omega'_k(\rho_k(t_k) - t_k), & a_k \leq x_k \leq c_k, \\ \omega'_k(t_k - \rho_k^{-1}(t_k)), & c_k \leq x_k \leq b_k. \end{cases}\end{aligned}\quad (20)$$

3. Вычисление функционала на экстремальной функции. Сначала вычислим

$$\int_{E(I,J)} \psi(x) f^*(x) dx, \quad (21)$$

$$I = \{i_1, \dots, i_n\} \in \Pi_n, \quad J = \{j_1, \dots, j_p\} \in C_n.$$

При замене переменных

$$x_1 = t_1, \dots, x_{j_1} = \rho_{j_1}(t_{j_1}), \dots, x_{j_p} = \rho_{j_p}(t_{j_p}), \dots, x_n = t_n,$$

т.е. $x = t(J)$,

$$dx = \prod_{j \notin J} dt_j \prod_{j \in J} \rho'_j(t_j) dt_j.$$

В силу (4)

$$\psi_i(x_i) = \psi_i(\rho_i(x_i)) \rho'_i(x_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\psi(t(J)) \prod_{j \in J} \rho'_j(t_j) = \prod_{j \notin J} \psi_j(t_j) \prod_{j \in J} \psi_j(\rho_j(t_j)) \rho'_j(t_j) = \prod_{i=1}^n \psi_i(t_i) = \psi(t).$$

Поэтому, меняя $|J|$ раз в (21) местами пределы интегрирования, получим

$$\int_{E(I,J)} \psi(x) f^*(x) dx = (-1)^{|J|} \int_{E(I)} \psi(t) f^*(t(J)) dt. \quad (22)$$

Функцию $f(x; I, J)$ можно представить в виде

$$f(x; I, J) = (-1)^{|\{I \setminus I_1\} \cap J|} f_1(x_{i_1}; I_1) + g(x),$$

где $g(x)$ не зависит от x_{i_1} . Имеем

$$\begin{aligned} \int_{P_{ab}} \psi(x) f^*(x) dx &= \sum_{\substack{I \in \Pi_n \\ J \in C_n}} \int_{E(I,J)} \psi(x) f^*(x) dx \\ &= \sum_{I \in \Pi_n} \sum_{J \in C_{n, i_1}} \left(\int_{E(I,J)} \psi(x) f^*(x) dx + \int_{E(I, J \cup \{i_1\})} \psi(x) f^*(x) dx \right). \end{aligned}$$

В силу (22) и независимости $g(x)$ от x_{i_1}

$$\begin{aligned} &\int_{E(I,J)} \psi(x) g(x) dx + \int_{E(I, J \cup \{i_1\})} \psi(x) g(x) dx \\ &= (-1)^{|J|} \left(\int_{E(I)} \psi(x) g(x(J)) dx - \int_{E(I)} \psi(x) g(x(J \cup \{i_1\})) dx \right) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \int_{P_{ab}} \psi(x) f^*(x) dx &= \sum_{\substack{I \in \Pi_n \\ J \in C_n}} \int_{E(I, J)} \psi(x) f(x; I, J) dx \\
 &= \sum_{I \in \Pi_n} \sum_{J \in C_{n, i_1}} \left((-1)^{|J|} \int_{E(I)} \psi(x) (-1)^{|\{I \setminus I_1\} \cap J|} f_1(x_{i_1}; I_1) dx \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{|J \cup \{i_1\}|} \int_{E(I)} \psi(x) (-1)^{|\{I \setminus I_1\} \cap \{J \cup \{i_1\}\}|} f_1(\rho_{i_1}(x_{i_1}); I_1) dx \right) \\
 &= \sum_{I \in \Pi_n} \sum_{J \in C_{n, i_1}} \int_{E(I)} \psi(x) (f_1(x_{i_1}; I_1) - f_1(\rho_{i_1}(x_{i_1}); I_1)) dx. \tag{23}
 \end{aligned}$$

Так как при $x \in E(I)$,

$$\begin{aligned}
 \min_i \omega_i(\rho_i(x_i) - x_i) &= \omega_{i_1}(\rho_{i_1}(x_{i_1}) - x_{i_1}), \quad \sum_{J \in C_{n, i_1}} 1 = |C_{n, i_1}| = 2^{n-1}, \\
 f_1(x_{i_1}; I_1) - f_1(\rho_{i_1}(x_{i_1}); I_1) &= \int_{x_{i_1}}^{c_{i_1}} \omega'_{i_1}(\rho_{i_1}(t_{i_1}) - t_{i_1}) dt_{i_1} + \int_{c_{i_1}}^{\rho_{i_1}(x_{i_1})} \omega'_{i_1}(t_{i_1} - \rho_{i_1}^{-1}(t_{i_1})) dt_{i_1} \\
 &= \omega_{i_1}(\rho_{i_1}(x_{i_1}) - x_{i_1})
 \end{aligned}$$

(см. [1, с. 20]), то в силу (23) получаем

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{P_{ab}} \psi(x) f^*(x) dx \right| &= 2^{n-1} \left| \sum_{I \in \Pi_n} \int_{E(I)} \psi(x) \omega_{i_1}(\rho_{i_1}(x_{i_1}) - x_{i_1}) dx \right| \\
 &= 2^{n-1} \left| \int_{P_{ac}} \psi(x) \min_i \omega_i(\rho_i(x_i) - x_i) dx \right| \\
 &= 2^{n-1} \int_{P_{ac}} |\psi(x)| \min_i \omega_i(\rho_i(x_i) - x_i) dx.
 \end{aligned}$$

Итак, равенство в (3) для функции $f^*(x)$ доказано. Остается доказать ее непрерывность и принадлежность к классу $H_\omega^{(n)}(P_{ab})$.

4. Непрерывность экстремальной функции. Функция $f^*(x)$ может иметь разрывы только на границе множеств $E(I, J)$, лежащей внутри P_{ab} , т.е. в точках x , принадлежащих одному из множеств (9).

Пусть $x \in E(I, J) \cap E(I, J \cup \{i_1\})$, $i_1 \notin J$. Тогда $x_{i_1} = c_{i_1}$, $f_1(x_{i_1}; I_1) = f_1(c_{i_1}; I_1) = 0$,

$$\begin{aligned}
 f(x; I, J) &= \sum_{m=1}^n (-1)^{|\{I \setminus I_m\} \cap J|} f_m(x_{i_m}; I_m) \\
 &= \sum_{m=2}^n (-1)^{|\{I \setminus I_m\} \cap J|} f_m(x_{i_m}; I_m) = f(x; I, J \cup \{i_1\}).
 \end{aligned}$$

Пусть $x \in E(I, J) \cap E(I', J)$,

$$I = \{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_n\}, \quad I' = \{i_1, \dots, i_{k+1}, i_k, \dots, i_n\} \in \Pi_n.$$

Для $m < k$ или $m > k + 1$ $|\{I \setminus I_m\} \cap J| = |\{I' \setminus I'_m\} \cap J|$, поэтому

$$\begin{aligned} f(x; I, J) - f(x; I', J) &= (-1)^{|\{I \setminus I_k\} \cap J|} f_k(x_{i_k}; I_k) + (-1)^{|\{I \setminus I_{k+1}\} \cap J|} f_{k+1}(x_{i_{k+1}}; I_{k+1}) \\ &\quad - (-1)^{|\{I' \setminus I'_k\} \cap J|} f_k(x_{i_{k+1}}; I'_k) - (-1)^{|\{I' \setminus I'_{k+1}\} \cap J|} f_{k+1}(x_{i_k}; I'_{k+1}). \end{aligned}$$

Рассмотрим четыре возможных случая.

1) Если $i_k, i_{k+1} \notin J$, то

$$|\{I \setminus I_k\} \cap J| = |\{I' \setminus I'_k\} \cap J| = |\{I \setminus I_{k+1}\} \cap J| = |\{I' \setminus I'_{k+1}\} \cap J|,$$

в силу (8), (9) $a_{i_k} \leq x_{i_k} \leq c_{i_k}$, $x_{i_{k+1}} = \xi_{i_{k+1}i_k}(x_k)$. Отсюда и из (14)

$$\begin{aligned} f(x; I, J) - f(x; I', J) &= (-1)^{|\{I \setminus I_k\} \cap J|} \{f_k(x_{i_k}; I_k) + f_{k+1}(x_{i_{k+1}}; I_{k+1}) \\ &\quad - f_k(x_{i_{k+1}}; I'_k) - f_{k+1}(x_{i_k}; I'_{k+1})\} = 0. \end{aligned}$$

2) Если $i_k \notin J$, $i_{k+1} \in J$, то

$$|\{I \setminus I_k\} \cap J| = |\{I' \setminus I'_k\} \cap J| + 1 = |\{I \setminus I_{k+1}\} \cap J| + 1 = |\{I' \setminus I'_{k+1}\} \cap J| + 1,$$

в силу (8), (9) $a_{i_k} \leq x_{i_k} \leq c_{i_k}$, $x_{i_{k+1}} = \rho_{i_{k+1}i_k}(\xi_{i_{k+1}i_k}(x_k))$. Отсюда и из (15)

$$\begin{aligned} f(x; I, J) - f(x; I', J) &= (-1)^{|\{I \setminus I_k\} \cap J|} \{f_k(x_{i_k}; I_k) - f_{k+1}(x_{i_{k+1}}; I_{k+1}) \\ &\quad + f_k(x_{i_{k+1}}; I'_k) + f_{k+1}(x_{i_k}; I'_{k+1})\} = 0. \end{aligned}$$

3) Если $i_k \in J$, $i_{k+1} \notin J$, то

$$|\{I \setminus I_k\} \cap J| + 1 = |\{I' \setminus I'_k\} \cap J| = |\{I \setminus I_{k+1}\} \cap J| + 1 = |\{I' \setminus I'_{k+1}\} \cap J| + 1,$$

в силу (8), (9) $c_{i_k} \leq x_{i_k} \leq b_{i_k}$, $x_{i_{k+1}} = \xi_{i_{k+1}i_k}(\rho_{i_{k+1}i_k}^{-1}(x_k))$. Отсюда и из (16)

$$\begin{aligned} f(x; I, J) - f(x; I', J) &= (-1)^{|\{I \setminus I_k\} \cap J|} \{f_k(x_{i_k}; I_k) + f_{k+1}(x_{i_{k+1}}; I_{k+1}) \\ &\quad + f_k(x_{i_{k+1}}; I'_k) - f_{k+1}(x_{i_k}; I'_{k+1})\} = 0. \end{aligned}$$

4) Если $i_k, i_{k+1} \in J$, то

$$|\{I \setminus I_k\} \cap J| = |\{I' \setminus I'_k\} \cap J| = |\{I \setminus I_{k+1}\} \cap J| + 1 = |\{I' \setminus I'_{k+1}\} \cap J| + 1,$$

в силу (8), (9) $c_{i_k} \leq x_{i_k} \leq b_{i_k}$, $x_{i_{k+1}} = \rho_{i_{k+1}i_k}(\xi_{i_{k+1}i_k}(\rho_{i_{k+1}i_k}^{-1}(x_k)))$. Отсюда и из (17)

$$\begin{aligned} f(x; I, J) - f(x; I', J) &= (-1)^{|\{I \setminus I_k\} \cap J|} \{f_k(x_{i_k}; I_k) - f_{k+1}(x_{i_{k+1}}; I_{k+1}) \\ &\quad - f_k(x_{i_{k+1}}; I'_k) + f_{k+1}(x_{i_k}; I'_{k+1})\} = 0. \end{aligned}$$

Непрерывность $f^*(x)$ доказана.

5. Принадлежность экстремальной функции классу $H_{\omega}^{(n)}(P_{ab})$. Покажем, что если

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n), \\ x' &= (x_1, \dots, x_{k-1}, x'_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \in P_{ab}, \quad x_k < x'_k, \end{aligned}$$

то $|f^*(x) - f^*(x')| \leq \omega_i(|x_k - x'_k|)$.

Возможны следующие случаи расположения точек x, x' :

а) $x, x' \in E(I, J)$, $I = \{i_1, \dots, i_m = k, \dots, i_n\}$. Тогда, используя (13), (20), получим

$$\begin{aligned} |f^*(x) - f^*(x')| &= |f^*(x_1, \dots, x_n) - f^*(x_1, \dots, x'_k, \dots, x_n)| \\ &= |f(x; I, J) - f(x'; I, J)| = \left| \sum_{s=1}^n (-1)^{|\{I \setminus I_s\} \cap J|} f_s(x_{i_s}; I_s) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^n (-1)^{|\{I \setminus I_s\} \cap J|} f_s(x_{i_s}; I_s) + (-1)^{|\{I \setminus I_m\} \cap J|} f_m(x'_k; I_m) \right) \right| \\ &= |f_m(x_k; I_m) - f_m(x'_k; I_m)| \leq \int_{x_k}^{x'_k} \Omega_k(t_k) dt_k. \end{aligned} \quad (24)$$

б) $x \in E(I, J)$, $x' \in P_{ac}(J) \setminus E(I, J)$. Отсюда в силу (10)

$$x' \in E(I', J), \quad I = \{i_1, \dots, i_{m'} = k, \dots, i_n\}.$$

Будем предполагать, что $m < m'$. При этом, так как $x_k < x'_k$, то $k \in J$. Случай $m > m'$, т.е. $k \notin J$ аналогичен (и сводится переобозначением m и m').

Существуют числа x_k^q , $q = 1, \dots, m' - m$, такие, что

$$\begin{aligned} x_k &\leq x_k^1 < \dots < x_k^{m'-m} \leq x'_k, \\ x^q &= (x_1, \dots, x_k^q, \dots, x_n) \in E(I^{m+q-1, k}, J) \cap E(I^{m+q, k}, J), \\ I^{qk} &= \{i_1, \dots, i_q = k, \dots, i_n\} \in \Pi_n. \end{aligned} \quad (25)$$

Учитывая непрерывность функции $f^*(x)$, (13), (20), (24), (25) и что $I^{mk} = I$, $I^{m'k} = I'$, получим

$$\begin{aligned} |f^*(x) - f^*(x')| &= |f(x; I, J) - f(x'; I', J)| \\ &= |f(x; I, J) - f(x^1; I^{mk}, J) + f(x^1; I^{m+1, k}, J) \\ &\quad - f(x^2; I^{m+1, k}, J) + \dots + f(x^{m'-m}; I^{m'k}, J) - f(x'; I', J)| \\ &\leq |f_m(x_k; I_m) - f_m(x_k^1; I_m^k)| + |f_{m+1}(x_k^1; I_{m+1}^{m+1, k}) \\ &\quad - f_{m+1}(x_k^2; I_{m+1}^{m+1, k})| + \dots + |f_{m'}(x_k^{m'-m}; I_{m'}^{m'k}) - f_{m'}(x'_k; I_{m'}^{m'k})| \\ &\leq \int_{x_k}^{x_k^1} \Omega_k(t_k) dt_k + \int_{x_k^1}^{x_k^2} \Omega_k(t_k) dt_k + \dots + \int_{x_k^{m'-m}}^{x'_k} \Omega_k(t_k) dt_k \\ &= \int_{x_k}^{x'_k} \Omega_k(t_k) dt_k. \end{aligned} \quad (26)$$

в) $x \in P_{ac}(J)$, $x' \in P_{ac}(J \cup \{k\})$, $k \notin J$,

$$x'' = (x_1, \dots, c_k, \dots, x_n) \in P_{ac}(J) \cap P_{ac}(J \cup \{k\}).$$

Вновь, учитывая непрерывность $f^*(x)$, (26), получим

$$\begin{aligned} |f^*(x) - f^*(x')| &= |f^*(x) - f^*(x'') + f^*(x'') - f^*(x')| \\ &\leq |f^*(x) - f^*(x'')| + |f^*(x'') - f^*(x')| \\ &\leq \int_{x_k}^{c_k} \Omega_k(t_k) dt_k + \int_{c_k}^{x'_k} \Omega_k(t_k) dt_k = \int_{x_k}^{x'_k} \Omega_k(t_k) dt_k. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем во всех случаях

$$|f^*(x) - f^*(x')| \leq \int_{x_k}^{x'_k} \Omega_k(t_k) dt_k.$$

Легко видеть, что в случае произвольных $x, x' \in P_{ab}$

$$|f^*(x) - f^*(x')| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x'_k} \Omega_k(t_k) dt_k$$

(см. [1, с. 77–78]).

Если $\omega_k(x_k)$ – выпуклые модули непрерывности, то

$$\int_{x_k}^{x'_k} \Omega_k(t_k) dt_k \leq \omega_k(|x_k - x'_k|)$$

(см. [1, с. 21]). Таким образом, $f^*(x) \in H_\omega^{(n)}(P_{ab})$.

От дополнительных ограничений (5) на модули непрерывности $\omega_i(x_i)$ можно освободиться так же, как это сделано в [1].

Итак, нами доказана

ТЕОРЕМА. Если $\omega_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, – выпуклые модули непрерывности, ядро $\psi(x) = \prod_{i=1}^n \psi_i(x_i)$ удовлетворяет условиям (1), то можно построить функцию $f^*(x) \in H_\omega^{(n)}(P_{ab})$, для которой

$$\mathcal{E}(\psi, \omega) = 2^{n-1} \int_{P_{ac}} |\psi(x)| \min_i \omega_i(\rho_i(x_i) - x_i) dx.$$

Тульский государственный университет

Поступило

08.03.94

Исправленный вариант

25.02.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Степанец А. И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Киев: Наукова думка, 1981.
- [2] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближений. М.: Наука, 1976.
- [3] Степанец А. И. Об одной экстремальной задаче в пространстве непрерывных функций двух переменных // Вопросы теории приближений функций и ее приложений. Киев: ИМАН УССР, 1976. С. 160–178.