Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Дудов, Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 4, 530–542

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1532>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:38:34

УДК 519.853.62

СУБДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И СУПЕРДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ

С. И. Дудов

Получены необходимые и достаточные условия субдифференцируемости и супердифференцируемости (в смысле В. Ф. Демьянова–А. М. Рубинова) функции расстояния в произвольной норме от точки до множества для конечномерного случая. Дается описание геометрической структуры и ее субдифференциала и супердифференциала.

Библиография: 9 названий.

Функция расстояния от точки до множества (ФР)

$$\rho_{\Omega}(x) = \min_{y \in \Omega} n(x - y),$$

где Ω – некоторое замкнутое множество из $\mathbb{R}^p$, а $n(\cdot)$ – функция, удовлетворяющая аксиомам нормы, часто бывает инструментом и объектом исследований (см., например, [1]–[7]). Знание дифференциальных свойств ФР существенно при решении задач об оценке и аппроксимации множеств и многозначных отображений.

Основная цель данной работы получить необходимые и достаточные условия суб- и супердифференцируемости ФР (в терминах В. Ф. Демьянова–А. М. Рубинова) в заданной точке $x \in \mathbb{R}^p$. Это те случаи, когда ФР дифференцируема в точке x по всем направлениям и существуют соответственно выпуклые компакты $\underline{\partial}\rho_{\Omega}(x)$ или $\overline{\partial}\rho_{\Omega}(x)$ такие, что производную ФР по любому направлению g можно подсчитать по формуле

$$\rho'_{\Omega}(x, g) = \max_{v \in \underline{\partial}\rho_{\Omega}(x)} (v, g) \quad \text{или} \quad \rho'_{\Omega}(x, g) = \min_{w \in \overline{\partial}\rho_{\Omega}(x)} (w, g).$$

Эти компакты называются соответственно субдифференциалом и супердифференциалом ФР в точке x . Из [1], [2] известно, что если $n(\cdot)$ – евклидова норма, то ФР супердифференцируема в точках $x \notin \Omega$. Если же $x \in \Omega$ или $n(\cdot)$ – негладкая норма, то, как показано в [2] и соответственно в [8], не гарантируется уже дифференцируемость по направлениям ФР.

Введем используемые обозначения и сформулируем основной результат работы [8], продолжением которой является данная статья:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \{z \in \Omega \mid n(x - z) = \rho_{\Omega}(x)\}, & W(x) &= \{y \in \mathbb{R}^p \mid n(x - y) \leq \rho_{\Omega}(x)\}, \\ A - B &= \{a - b \mid a \in A, b \in B\}, & K(A) &= \{v \in \mathbb{R}^p \mid \exists \alpha > 0, a \in A : v = \alpha a\}, \\ K^+(A) &= \{w \in \mathbb{R}^p \mid (v, w) \geq 0 \forall v \in A\}, \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95–01–00156.

$\underline{\partial}n(x)$ – субдифференциал нормы $n(\cdot)$ в точке x . Известно [9], что

$$\begin{aligned}\underline{\partial}n(0) &= \{v \in \mathbb{R}^p \mid n^*(v) \leq 1\}, \\ \underline{\partial}n(x) &= \{v \in \mathbb{R}^p \mid n^*(v) = 1, n(x) = (v, x)\}, \quad x \neq 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где $n^*(v) = \max_{n(w) \leq 1} (v, w)$. Под Ψ_p , как и в [3], будем понимать множество, состоящее из функций $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, определенных на некотором отрезке $[0, \alpha_\psi]$, действующих из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^p$ и обладающих тем свойством, что $\alpha^{-1}\psi(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \downarrow 0$. Напомним, что конусом касательных направлений и конусом Булигана множества A в точке $x \in A$ называются соответственно множества

$$\begin{aligned}K(x, A) &= \{g \in \mathbb{R}^p \mid \exists \alpha_g > 0, \psi(\cdot) \in \Psi_p : x + \alpha_g g + \psi(\alpha) \in A, \alpha \in [0, \alpha_g]\}, \\ \Gamma(x, A) &= \{g \in \mathbb{R}^p \mid \exists \psi(\cdot) \in \Psi_p, \{\alpha_k\} \downarrow 0, k \rightarrow \infty : x + \alpha_k g + \psi(\alpha_k) \in A\}.\end{aligned}$$

Будут также использованы следующие множества

$$\begin{aligned}\Gamma_\rho(x, z) &= \{g \in \mathbb{R}^p \mid \exists y(\alpha) \in \Omega, z(\alpha) \in W(x), \psi(\cdot) \in \Psi_p, \{\alpha_k\} \downarrow 0, k \rightarrow \infty : \\ &\quad y(\alpha_k) \rightarrow z, u(\alpha_k) - z(\alpha_k) = \alpha_k g + \psi(\alpha_k)\}, \\ K_\rho(x, z) &= \{g \in \mathbb{R}^p \mid \exists y(\alpha) \in \Omega, z(\alpha) \in W(x), \psi(\cdot) \in \Psi_p, \{\alpha_k\} \downarrow 0, k \rightarrow \infty, \\ &\quad \alpha_g > 0 : y(\alpha_k) \rightarrow z, y(\alpha) - z(\alpha) - \alpha g + \psi(\alpha), \alpha \in [0, \alpha_\psi]\}, \\ L_\rho(x, z) &= \{g \in \mathbb{R}^p \mid \exists y(\alpha) \in \Omega, z(\alpha) \in W(x), \psi(\cdot) \in \Psi_p, \alpha_g > 0 : \\ &\quad y(\alpha) \rightarrow z, \alpha \downarrow 0, y(\alpha) - z(\alpha) = \alpha g + \psi(\alpha), \alpha \in [0, \alpha_\psi]\}, \\ \Omega\Gamma(x) &= \bigcup_{z \in Q(x)} (z + \Gamma_\rho(x, z)), \quad \Omega K(x) = \bigcup_{z \in Q(x)} (z + K_\rho(x, z)), \\ \Omega L(x) &= \bigcup_{z \in Q(x)} (z + L_\rho(x, z)).\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы ФР была дифференцируемой в точке x по всем направлениям необходимо, чтобы $\Omega\Gamma(x) = \Omega K(x)$, и достаточно, чтобы $\Omega\Gamma(x) = \Omega L(x)$.*

ТЕОРЕМА 2. *Для любых x и g из $\mathbb{R}^p$ имеет место формула*

$$\rho_\Omega^\downarrow(x, g) \equiv \liminf_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1} [\rho_\Omega(x + \alpha g) - \rho_\Omega(x)] = \inf_{z \in Q(x)} \inf_{\zeta \in \Gamma_\rho(x, z)} n'(x - z, g - \zeta).$$

Кроме того, для любого $g \in \mathbb{R}^p$, если $x \in \Omega$, и g , удовлетворяющего неравенству $n(g) \leq \rho_\Omega(x)$, если $x \notin \Omega$, имеет место равенство

$$\rho_\Omega^\downarrow(x, g) = \rho_{\Omega\Gamma(x)}(x + g) - \rho_\Omega(x).$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *ФР дифференцируема в точке $x \in \Omega$ по всем направлениям тогда и только тогда, когда $\Gamma(x, \Omega) = K(x, \Omega)$, причем*

$$\rho_\Omega'(x, g) = \min_{\zeta \in \Gamma(x, \Omega)} n(g - \zeta).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если только ФР дифференцируема в точке x по направлению g , то

$$\rho'_\Omega(x, g) = \rho'_{\Omega\Gamma(x)}(x, g) = \inf_{z \in Q(x)} \inf_{\zeta \in \Gamma_\rho(x, z)} n'(x - z, g - \zeta). \quad (2)$$

Заметим сразу, что использование этих результатов предполагает умение подсчитывать конусы $\Gamma_\rho(x, z)$, $K_\rho(x, z)$, $L_\rho(x, z)$ и через них множества $\Omega\Gamma(x)$, $\Omega K(x)$ и $\Omega L(x)$. В [9] описан ряд случаев, когда справедливы равенства

$$\Gamma_\rho(x, z) = \Gamma(z, \Omega) - \Gamma(z, W(x)), \quad K_\rho(x, z) = L_\rho(x, z) = K(z, \Omega) - K(z, W(x))$$

для точек $z \in Q(x)$. Учитывая некоторую наработанную технику подсчета конуса Булигана и конуса касательных направлений множества в точке (см., например, [1], [2]), это придает теоремам 1, 2, а также излагаемым далее результатам конструктивный смысл.

§ 1. Случай выпуклости и вогнутости ФР

1. Известно, что если Ω – выпуклое множество, то ФР является выпуклой на $\mathbb{R}^p$. В [1] получена соответствующая формула субдифференциала ФР

$$\underline{\partial}\rho_\Omega(x) = \begin{cases} \underline{\partial}\delta(x/\Omega) \cap \{v \in \mathbb{R}^p \mid n^*(v) \leq 1\}, & x \in \Omega, \\ \underline{\partial}\delta(x/\Omega + \rho_\Omega(x) \cdot S_1(0)) \cap \{v \in \mathbb{R}^p \mid n^*(v) = 1\}, & x \notin \Omega, \end{cases} \quad (3)$$

где $\delta(x/A)$ – индикаторная функция множества A , $\underline{\partial}\delta(x/A)$ – ее субдифференциал в точке x , а $S_1(0) = \{v \in \mathbb{R}^p \mid n(v) \leq 1\}$. Преобразуем формулу (3) к более компактной форме. Поскольку (см. [1]) $\underline{\partial}\delta(x/\Omega) = -K^+(x, \Omega)$, то используя (1), из (3) получаем

$$\underline{\partial}\rho_\Omega(x) = \underline{\partial}n(0) \cap -K^+(x, \Omega), \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Чтобы рассмотреть случай $x \notin \Omega$, докажем вспомогательный факт.

ЛЕММА 1. Если A и B – выпуклые множества, причем $A \cap B \neq \emptyset$, то

$$\overline{K}(A - B) = \overline{K(z, A) - K(z, B)} \quad \forall z \in A \cap B. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть для некоторого $z \in A \cap B$ элемент $g \in K(z, A) - K(z, B)$, т.е. $g = g_1 - g_2$, и при этом существуют число $\alpha_0 > 0$, функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ из Ψ_p такие, что

$$a(\alpha) = z + \alpha g_1 + \psi_1(\alpha) \in A, \quad b(\alpha) = z + \alpha g_2 + \psi_2(\alpha) \in B$$

для всех $\alpha \in [0, \alpha_0]$. Отсюда получаем, что $\alpha^{-1}(a(\alpha) - b(\alpha)) \in K(A - B)$ и, следовательно, $g_1 - g_2 \in \overline{K}(A - B)$. Таким образом, имеем

$$K(z, A) - K(z, B) \subset \overline{K}(A - B). \quad (6)$$

б) Пусть теперь $g \in K(A - B)$, $g \neq 0$, т.е. существуют $\alpha_0 > 0$, $a \in A$, $b \in B$ такие, что $g = \alpha_0(a - b)$. В силу выпуклости A и B имеем $g_1 = \alpha_0(a - z) \in K(z, A)$, $g_2 = \alpha_0(b - z) \in K(z, B)$ для произвольно выбранной точки $z \in A \cap B$. Отсюда получаем, что $g = g_1 - g_2 \in K(z, A) - K(z, B)$, откуда $K(A - B) \subset K(z, A) - K(z, B)$ в силу произвольного выбора g из $K(A - B)$. Что с учетом (6) дает включение (5).

Используем лемму, а также то, что (см. [2, с. 222])

$$K(z, W(x)) = K^+(\underline{\partial n}(x - z)), \quad z \in Q(x), \quad (7)$$

получаем

$$\begin{aligned} \underline{\partial \delta}(x/\Omega + \rho_\Omega(x) \cdot S_1(0)) &= -K^+(\Omega + \rho_\Omega(x) \cdot S_1(0) - x) = -K^+(\Omega - W(x)) \\ &= -(K(z, \Omega) - K(z, W(x)))^+ = K(\underline{\partial n}(x - z)) \cap -K^+(z, \Omega), \quad z \in Q(x). \end{aligned}$$

Поэтому из (3), учитывая (1), получаем

$$\underline{\partial \rho}_\Omega(x) = \underline{\partial n}(x - z) \cap -K^+(z, \Omega) \quad \forall z \in Q(x). \quad (8)$$

Сравнивая (4) и (8), приходим к выводу, что формула (8) является общей и для $x \in \Omega$ и для $x \notin \Omega$.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы ФР была выпуклой (квазивыпуклой) на $\mathbb{R}^p$ необходимо и достаточно, чтобы множество Ω было выпуклым. Субдифференциал ФР при этом выражается формулой (8).*

Учитывая вышесказанное, для доказательства этого утверждения осталось заметить, что квазивыпуклость ФР означает выпуклость ее лебегова множества и, в частности, множества $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \rho_\Omega(x) \leq 0\}$.

2. Рассмотрим теперь случай вогнутости ФР. Под $\text{ri } A$ будем понимать относительную внутренность множества A .

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы ФР была вогнутой на выпуклом множестве D , не содержащемся в Ω , необходимо и достаточно, чтобы $\Omega \cap \text{ri } D = \emptyset$ и множество $D_0 = \bigcup_{x \in D} V(x)$, где $V(x) = \{y \in \mathbb{R}^p \mid n(x - y) < \rho_\Omega(x)\}$, было выпуклым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. а) По условию теоремы существует $x_1 \in D$, $x_1 \notin \Omega$, т.е. $\rho_\Omega(x_1) > 0$. Если предположить, что существует точка $x_0 \in \Omega \cap \text{ri } D$, то можно указать точку $x_2 \in D$ такую, что $x_0 = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$, где $\alpha \in (0, 1)$. В силу вогнутости ФР: $\rho_\Omega(x_0) \geq \alpha \rho_\Omega(x_1) + (1 - \alpha)\rho_\Omega(x_2) > 0$. Это противоречит тому, что $x_0 \in \Omega$. Таким образом, $\Omega \cap \text{ri } D = \emptyset$.

б) Предположим, что множество D_0 не выпуклое, т.е. найдутся y_1 и y_2 из D_0 , $\alpha \in (0, 1)$ такие, что $y_\alpha = \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2 \notin D_0$. Поскольку $y_i \in D_0$, то существуют $x_i \in D$ такие, что $n(x_i - y_i) < \rho_\Omega(x_i)$, $i = 1, 2$. Но тогда

$$\begin{aligned} \rho_\Omega(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &\leq n(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 - y_\alpha) \leq \alpha n(x_1 - y_1) + (1 - \alpha)n(x_2 - y_2) \\ &< \alpha \rho_\Omega(x_1) + (1 - \alpha)\rho_\Omega(x_2), \end{aligned}$$

что противоречит вогнутости ФР.

Достаточность. Пусть $\Omega \cap \text{ri } D = \emptyset$ и D_0 – выпуклое множество. Известно, что ФР является липшицевой и поэтому нам достаточно доказать ее вогнутость на $\text{ri } D$. По условию теоремы для любых $x_i \in \text{ri } D$ имеем $\rho_\Omega(x_i) > 0$, $i = 1, 2$. Тогда для произвольной точки $y \in \mathbb{R}^p$, удовлетворяющей неравенству

$$n(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 - y) < \alpha \rho_\Omega(x_1) + (1 - \alpha)\rho_\Omega(x_2), \quad \alpha \in (0, 1), \quad (9)$$

построим точки

$$y_i = x_i + (\alpha \rho_\Omega(x_1) + (1 - \alpha) \rho_\Omega(x_2))^{-1} \rho_\Omega(x_i) (y - \alpha x_1 - (1 - \alpha) x_2), \quad i = 1, 2.$$

Легко убедиться, что $y_i \in V(x_i)$, $i = 1, 2$, и $y = \alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2$. Поэтому в силу выпуклости D_0 $y \in D_0 \subset \mathbb{R}^p \setminus \Omega$. Выполнение этого включения для любой точки y , удовлетворяющей (9), означает, что выполняется неравенство

$$\rho_\Omega(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) \geq \alpha \rho_\Omega(x_1) + (1 - \alpha) \rho_\Omega(x_2).$$

ТЕОРЕМА 5. Если $D = \mathbb{R}^p \setminus \Omega$ является выпуклым множеством, то ФР является вогнутой на $\overline{D}$, причем ее супердифференциал для точек $x \in D$ имеет вид

$$\overline{\partial} \rho_\Omega(x) = \text{co} \{ \underline{\partial} n(x - z) \cap \Gamma^+(z, D) \mid z \in Q(x) \}. \quad (10)$$

В граничных точках $x \in \Omega$ ФР дифференцируема по направлениям, причем

$$\rho'_\Omega(x, g) = \max \left\{ 0, \min_{\substack{w \in \Gamma^+(x, D) \\ n^*(w) = 1}} (w, g) \right\}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вогнутость ФР на $\overline{D}$ очевидным образом следует из теоремы 4. Выпуклость множества D обеспечивает выполнение равенства $\Gamma(x, \Omega) = K(x, \Omega)$ в граничных точках $x \in \Omega$. Поэтому в силу следствия 1 из теорем 1 и 2 ФР дифференцируема по всем направлениям в этих точках. Нам осталось доказать справедливость формул (10), (11).

Из выпуклости D следуют соотношения (см. [9])

$$\Gamma_\rho(x, z) = \Gamma(z, \Omega), \quad \Gamma(z, \Omega) = \bigcup_{\substack{w \in \Gamma^+(x, D) \\ w \neq 0}} -K^+(w), \quad z \in Q(x).$$

Используя их в формуле (2), получаем

$$\begin{aligned} \rho'_\Omega(x, g) &= \inf_{z \in Q(x)} \inf_{\zeta \in \Gamma(z, \Omega)} n'(x - z, g - \zeta) \\ &= \inf_{z \in Q(x)} \inf_{\substack{w \in \Gamma^+(z, D) \\ w \neq 0}} \inf_{\zeta \in K^+(w)} \max_{v \in \underline{\partial} n(x - z)} (v, g + \zeta). \end{aligned} \quad (12)$$

Ясно, что $W(x) \subset \overline{D}$ и поэтому $\Gamma(z, W(x)) \subset \Gamma(z, D)$. Следовательно, применяя формулу (7), имеем включение

$$\Gamma^+(z, D) \subset K(\underline{\partial} n(x - z)), \quad z \in Q(x). \quad (13)$$

Учитывая это, а также то, что

$$\inf_{\zeta \in K^+(w)} (v, \zeta) = \begin{cases} 0, & v \in K(w), \\ -\infty, & v \notin K(w), \end{cases}$$

и теорему о минимаксе [3, с. 396], которая выполнена в данной ситуации, получаем

$$\begin{aligned} \inf_{\zeta \in K^+(w)} \max_{v \in \partial n(x-z)} (v, g + \zeta) &= \max_{v \in \partial n(x-z)} \inf_{\zeta \in K^+(w)} (v, g + \zeta) \\ &= \max_{v \in \partial n(x-z)} \left[(v, g) + \inf_{\zeta \in K^+(w)} (v, \zeta) \right] = \max_{v \in \partial n(x-z) \cap K(w)} (v, g). \end{aligned} \quad (14)$$

а) Пусть $x \in D$. Для $w \in \Gamma^+(z, D)$ в силу (1) и (13) имеем $\partial n(x-z) \cap K(w) = (n^*(w))^{-1}w$. Тогда, подставляя (14) в (12), получаем

$$\rho'_\Omega(x, g) = \inf_{z \in Q(x)} \inf_{w \in \Gamma^+(z, D) \cap \partial n(x-z)} (w, g). \quad (15)$$

Множество $\{\partial n(x-z) \cap \Gamma^+(z, D) \mid z \in Q(x)\}$, как это следует из замкнутости множества $Q(x) = W(x) \cap \Omega$ и полунепрерывности сверху многозначных отображений $z \rightarrow \Gamma^+(z, D)$ и $z \rightarrow \partial n(x-z)$, действующих из D в $2^{\mathbb{R}^p}$ [2], является замкнутым. Поэтому из (15) в итоге имеем

$$\rho'_\Omega(x, g) = \min_{w \in \text{co}\{\partial n(x-z) \cap \Gamma^+(z, D) \mid z \in Q(x)\}} (w, g),$$

т.е. действительно супердифференциал ФР на D имеет вид (10).

б) Пусть x – граничная точка Ω . Тогда $Q(x) = \{x\}$, а из (12) и (14) следует

$$\begin{aligned} \rho'_\Omega(x, g) &= \inf_{\substack{w \in \Gamma^+(x, D) \\ w \neq 0}} \max_{v \in \partial n(0) \cap K(w)} (v, g) = \inf_{\substack{w \in \Gamma^+(x, D) \\ w \neq 0}} \max\{0, ((n^*(w))^{-1}w, g)\} \\ &= \max\left\{0, \inf_{\substack{w \in \Gamma^+(x, D) \\ w \neq 0}} ((n^*(w))^{-1}w, g)\right\} = \max\left\{0, \min_{\substack{w \in \Gamma^+(x, D) \\ n^*(w)=1}} (w, g)\right\}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ввиду включения (13) формулу (10) можно переписать в виде

$$\overline{\partial \rho}_\Omega(x) = \text{co}\{w \in \Gamma^+(z, D) \mid z \in Q(x), n^*(w) = 1\}.$$

§ 2. Условия субдифференцируемости ФР

1. Докажем вспомогательный факт.

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$\Omega\Gamma(x) = \{y \in \mathbb{R}^p \mid \rho_\Omega^\perp(x, y - x) \leq \rho_\Omega(x)\}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Ω_0 множество, стоящее в правой части равенства (16). Для произвольного элемента $y \in \Omega\Gamma(x)$ найдутся $z \in Q(x)$ и $\zeta \in \Gamma_\rho(x, z)$ такие, что $y = z + \zeta$. Тогда, используя теорему 2 и формулу (1), получаем

$$\begin{aligned}\rho_\Omega^\downarrow(x, y - x) &\leq n'(x - z, y - x - \zeta) = n'(x - z, z - x) \\ &= \max_{v \in \partial n(x - z)}(v, z - x) = -n(x - z) = -\rho_\Omega(x).\end{aligned}$$

Тем самым мы доказали включение $\Omega\Gamma(x) \subset \Omega_0$.

Пусть теперь $y \in \Omega_0$ и, следовательно, существуют $\{\alpha_k\} \downarrow 0, k \rightarrow \infty, \psi_1(\cdot) \in \Psi_1$ такие, что

$$\rho_\Omega(x + \alpha_k(y - x)) \leq \rho_\Omega(x) - \alpha_k \rho_\Omega(x) + \psi_1(\alpha_k).$$

Поэтому для $y(\alpha_k) \in Q(x + \alpha_k(y - x))$ имеем неравенство

$$n(x + \alpha_k(y - x) - y(\alpha_k)) \leq \rho_\Omega(x) - \alpha_k \rho_\Omega(x) + \psi_1(\alpha_k)$$

или, считая без потери общности, что $y(\alpha_k) \rightarrow z \in Q(x), k \rightarrow \infty$:

$$n(x + \alpha_k(y - x) - y(\alpha_k)) + \alpha_k n(x - z) \leq \rho_\Omega(x) + \psi_1(\alpha_k).$$

Отсюда следует, что найдется функция $\psi_2(\cdot) \in \Psi_p$ такая, что

$$n(x - (y(\alpha_k) - \alpha_k(y - z) - \psi_2(\alpha_k))) \leq \rho_\Omega(x)$$

или $z(\alpha_k) = y(\alpha_k) - \alpha_k(y - z) - \psi_2(\alpha_k) \in W(x)$. Тем самым, $y - z \in \Gamma_\rho(x, z)$ или $y \in z + \Gamma_\rho(x, z) \subset \Omega\Gamma(x)$. Таким образом, $\Omega_0 \subset \Omega\Gamma(x)$ и, учитывая ранее доказанное обратное включение, получаем (16).

ТЕОРЕМА 6. Для того чтобы $\Phi\mathcal{P}$ была субдифференцируемой в точке $x \in \Omega$ и выпуклый компакт A был ее субдифференциалом необходимо и достаточно, чтобы

$$A = \text{co}\{\{0\} \cup \{v \in A \mid n^*(v) = 1\}\}, \quad (17)$$

$$\Gamma(x, \Omega) = K(x, \Omega) = -K^+(A). \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Из дифференцируемости $\Phi\mathcal{P}$ по любому направлению в соответствии со следствием 1 из теорем 1 и 2 имеем $\Gamma(x, \Omega) = K(x, \Omega)$. Известно [3, с. 22], что $\Gamma(x, \Omega) = \{g \in \mathbb{R}^p \mid \rho_\Omega^\downarrow(x, g) \leq 0\}$. А поскольку

$$\rho_\Omega^\downarrow(x, g) = \rho'_\Omega(x, g) = \max_{v \in A}(v, g),$$

то отсюда, как и в [2, с. 222], получаем (18).

В данном случае множество $\Omega\Gamma(x) = x + \Gamma(x, \Omega)$ является выпуклым. Рассмотрим $\Phi\mathcal{P}$ до этого множества. Ее субдифференциал в точке x , как это следует из теоремы 3 и (18), имеет вид $\underline{\partial}\rho_{\Omega\Gamma(x)}(x) = K(A) \cap \partial n(0)$. В то же время, ссылаясь на следствие 2 из теорем 1 и 2, имеем $\underline{\partial}\rho_{\Omega\Gamma(x)}(x) = \underline{\partial}\rho_\Omega(x) = A$. Поэтому, учитывая (1), множество A должно обладать свойством (17).

Достаточность. Пусть в точке $x \in \Omega$ выполняются соотношения (17), (18). Из (18) в силу следствия 1 получаем дифференцируемость $\Phi\mathcal{P}$ по любому направлению в точке x и выпуклость множества $\Omega\Gamma(x) = x + \Gamma(x, \Omega)$. Тогда из (18) и теоремы 3 получаем, что $\Phi\mathcal{P}$ до множества $\Omega\Gamma(x)$ является выпуклой и ее субдифференциал в точке x имеет вид $\underline{\partial}\rho_{\Omega\Gamma(x)}(x) = K(A) \cap \partial n(0)$. Но поскольку выпуклый компакт удовлетворяет свойству (17), то $\underline{\partial}\rho_{\Omega\Gamma(x)}(x) = A$. Теперь, ссылаясь на следствие 2, осталось сделать вывод, что $\Phi\mathcal{P}$ до множества Ω является субдифференциальной в точке x и $\underline{\partial}\rho_\Omega(x) = A$.

ТЕОРЕМА 7. Для того чтобы ФР была субдифференцируема в точке $x \notin \Omega$ и выпуклый компакт A был ее субдифференциалом необходимо, а в случае, когда $\Omega\Gamma(x) = \Omega L(x)$, то и достаточно, чтобы

$$A = \{v \in A \mid n^*(v) = 1\}, \quad (19)$$

$$\Omega\Gamma(x) = \Omega K(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^p \mid \max_{v \in A} (v, y - x) + \rho_\Omega(x) \leq 0\right\}. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть ФР субдифференцируема в точке x и A является ее субдифференциалом, т.е. она дифференцируема по любому направлению, а следовательно, по теореме 1 $\Omega\Gamma(x) = \Omega K(x)$ и $\rho'_\Omega(x, g) = \max_{v \in A} (v, g) \forall g \in \mathbb{R}^p$. Отсюда и из леммы 2 следует (20). Множество $\Omega\Gamma(x)$, как это видно из (20), является выпуклым. Поэтому ФР до $\Omega\Gamma(x)$ является выпуклой и ее субдифференциал можно подсчитать, пользуясь теоремой 3. Из формул (8) и (1) следует, что он содержится на сфере единичного радиуса нормы $n^*(\cdot)$. Тогда в силу следствия 2 субдифференциал ФР до Ω в точке x должен удовлетворять этому же свойству, т.е. (19).

Достаточность. Пусть для точки $x \notin \Omega$ выполняются соотношения (19), (20) и $\Omega\Gamma(x) = \Omega L(x)$. Последнее по теореме 1 влечет дифференцируемость ФР в точке x по всем направлениям. Обозначим $\pi^+(v) = \{y \in \mathbb{R}^p \mid (v, y - x) + \rho_\Omega(x) \leq 0\}$. Поскольку расстояние от точки x до гиперплоскости $\pi = \{y \in \mathbb{R}^p \mid (a, y) + b = 0\}$, где $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^1$, выражается формулой $\rho_\pi(x) = |(a, x) + b| (n^*(a))^{-1}$, то из (19) следует, что

$$\rho_{\pi^+(v)}(x) = \rho_\Omega(x) \quad \forall v \in A. \quad (21)$$

А так как в соответствии с (20) $\Omega\Gamma(x) = \bigcap_{v \in A} \pi^+(v)$, то из (21) имеем $\rho_{\Omega\Gamma(x)}(x) \geq \rho_\Omega(x)$. Но, с другой стороны, из определения $Q(x)$ видно, что $Q(x) \subset \Omega\Gamma(x)$ и, следовательно, $\rho_{\Omega\Gamma(x)}(x) \leq \rho_\Omega(x)$. Таким образом, получаем равенство $\rho_{\Omega\Gamma(x)}(x) = \rho_\Omega(x)$. Отсюда и из (21) следует, что $Q_0(x) = W(x) \cap \Omega\Gamma(x) \neq \emptyset$ и

$$(v, z - x) + \rho_\Omega(x) = 0 \quad \forall v \in A, \quad z \in Q_0(x). \quad (22)$$

Учитывая (20), это позволяет сделать вывод, что $K(z, \Omega\Gamma(x)) = -K^+(A) \forall z \in Q_0(x)$. Тогда, применяя теорему 3 к ФР до выпуклого множества $\Omega\Gamma(x)$, получаем

$$\underline{\partial}\rho_{\Omega\Gamma(x)}(x) = K(A) \cap \partial n(x - z) \quad \forall z \in Q_0(x). \quad (23)$$

Из (21) следует включение $W(x) \subset \{y \in \mathbb{R}^p \mid (v, y - x) + \rho_\Omega(x) \geq 0\} \forall v \in A$, что влечет включение конусов касательных направлений соответствующих множеств в общих точках. Тогда, принимая во внимание (7) и (22), получаем $K^+(\underline{\partial}n(x - z)) \subset K^+(v) \forall v \in A, z \in Q_0(x)$, а значит и $K(A) \subset K(\underline{\partial}n(x - z))$. Учитывая это, а также (1) и (19), из (23) получаем $\underline{\partial}\rho_{\Omega\Gamma(x)}(x) = A$. Отсюда в силу следствия 2 заключаем, что ФР до множества Ω в точке x субдифференцируема и A является ее субдифференциалом.

Договоримся далее называть множество M телом некоторой нормы, если M – выпуклый телесный, симметричный относительно нулевого элемента, компакт из $\mathbb{R}^p$. Пусть также ∂M – граница множества M , $M^* = \{w \in \mathbb{R}^p \mid (v, w) \leq 1 \forall v \in M\}$ – его поляра, а $\varphi_M(x) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid x \in \alpha M\}$ – его функция Минковского.

Из теорем 6 и 7 можно сделать выводы о геометрической структуре субдифференциала ФР и построении ФР, обладающей заданным субдифференциалом в заданной точке.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для того чтобы выпуклый компакт $A \subset \mathbb{R}^p$ был субдифференциалом некоторой ФР в какой-либо точке необходимо и достаточно, чтобы либо $A \subset \partial M$, либо $A = M \cap K$, где M – тело некоторой нормы, а K – выпуклый замкнутый конус.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть M – тело некоторой нормы, а K – выпуклый конус.

а) Если $A = M \cap K$, то для нормы $n(\cdot) = \varphi_{M^*}(\cdot)$ и любого множества Ω , содержащего точку x и такого, что $\Gamma(x, \Omega) = K(x, \Omega) = -K^+(A)$ (в частности, для $\Omega = x - K^+(A)$), ФР субдифференцируема в точке x и A – ее субдифференциал.

б) Если выпуклый компакт $A \subset \partial M$, то для $n(\cdot) = \varphi_{M^*}(\cdot)$ и любого множества Ω такого, что

$$\Omega \Gamma(x) = \Omega L(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^p \mid \max_{v \in A} (v, y - x) + \rho \leq 0 \right\},$$

где $\rho > 0$, ФР субдифференцируема в точке x , а A – ее субдифференциал и $\rho_\Omega(x) = \rho$. В частности, это выполнено для

$$\Omega = \left\{ y \in \mathbb{R}^p \mid \max_{v \in A} (v, y - x) + \rho \leq 0 \right\}.$$

2. Пример 4 из [9] может служить иллюстрацией того, что равенство $\Omega \Gamma(x) = \Omega L(x)$, являясь вместе с соотношениями (19), (20) достаточным, не всегда является необходимым условием субдифференцируемости ФР в точке $x \notin \Omega$.

Приведем пример, показывающий, что соотношения (19), (20), являясь необходимыми, не всегда являются достаточными.

ПРИМЕР 1. Пусть $p = 3$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \in \mathbb{R}^3$, $n(x) = \max\{|x^{(1)}| + |x^{(2)}|, |x^{(3)}|\}$,

$$\Omega = \bigcup_{i=1,2,3} \Omega_i,$$

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^{(2)} = 0, x^{(3)} = -1, -\infty \leq x^{(1)} \leq \infty\},$$

$$\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^{(2)} = 0, x^{(3)} = 1, -\infty \leq x^{(1)} \leq \infty\},$$

$$\Omega_3 = \{(-2^{-k}, 0, 0)\}_{k=1}^\infty \cup \{(2^{-k}, 0, 0)\}_{k=1}^\infty \cup \{(0, 0, 0)\}, \quad x_0 = (0, -1, 0).$$

1) Покажем, что ФР не дифференцируема в точке x_0 по направлению $g = (1, 1, 0)$. В самом деле, возьмем $\alpha_k = 2^{-k}$, $\beta_k = 2^{-k} - 2^{-k-2}$. Тогда

$$x_0 + \alpha_k g = (2^{-k}, -1 + 2^{-k}, 0), \quad x_0 + \beta_k g = (2^{-k} - 2^{-k-2}, -1 + 2^{-k} - 2^{-k-2}, 0),$$

$$\rho_\Omega(x_0 + \alpha_k g) = \min_{y \in \Omega} \max\{|2^{-k} - y^{(1)}| + |-1 + 2^{-k} - y^{(2)}|, |y^{(3)}|\} = 1 - 2^{-k},$$

$$\rho_\Omega(x_0 + \beta_k g) = \min_{y \in \Omega} \max\{|2^{-k} - 2^{-k-2} - y^{(1)}| + |-1 + 2^{-k} - 2^{-k-2} - y^{(2)}|, |y^{(3)}|\}$$

$$= |2^{-k-2}| + |-1 + 2^{-k} - 2^{-k-2}| = 1 - 2^{-k} + 2^{-k-1},$$

$$\rho_\Omega^\downarrow(x_0, g) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k^{-1} [\rho_\Omega(x_0 + \alpha_k g) - \rho_\Omega(x_0)] = -1,$$

$$\rho_\Omega^\uparrow(x_0, g) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k^{-1} [\rho_\Omega(x_0 + \beta_k g) - \rho_\Omega(x_0)] = \frac{2}{3},$$

т.е. дифференцируемости по направлению g нет.

2) Покажем, что

$$\Omega\Gamma(x_0) = \Omega K(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^{(2)} \geq 0\} = D. \quad (24)$$

В нашем случае $Q(x_0) = \{z_1, z_2, z_3\}$, где $z_1 = (-1, 0, 0)$, $z_2 = (1, 0, 0)$, $z_3 = (0, 0, 0)$. Используя очевидные включения $\Omega \subset D$, $-W(x_0) \subset D$ и соответствующие определения, нетрудно показать, что конусы $\Gamma_\rho(x_0, z_i)$ и $K_\rho(x_0, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, содержатся в полупространстве D , кроме того,

$$\Omega K(x_0) \subset \Omega\Gamma(x_0) \subset D. \quad (25)$$

Пусть $\zeta = (\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \zeta^{(3)})$ – произвольный элемент из $\mathbb{R}^3$, у которого $\zeta^{(1)} > 0$, $\zeta^{(2)} \geq 0$, $\zeta^{(3)} \geq 0$. Возьмем $\alpha_k = 2^{-k}(\zeta^{(1)})^{-1}$ и построим вектор-функции

$$y(\alpha) = \begin{cases} (2^{-k}, 0, 0), & \alpha = \alpha_k, \\ (\alpha\zeta^{(1)} + \alpha\zeta^{(2)}, 0, 1), & \alpha \neq \alpha_k, \quad k = \overline{1, \infty}, \end{cases}$$

$$z(\alpha) = \begin{cases} (2^{-k} - \alpha_k\zeta^{(1)}, -\alpha_k\zeta^{(2)}, -\alpha_k\zeta^{(3)}), & \alpha = \alpha_k, \\ (\alpha\zeta^{(2)}, -\alpha\zeta^{(2)}, 1 - \alpha\zeta^{(3)}), & \alpha \neq \alpha_k, \quad k = \overline{1, \infty}. \end{cases}$$

Легко убедиться, что

$$y(\alpha) \in \Omega, \quad z(\alpha) \in W(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \max\{|x^{(1)}| + |x^{(2)} + 1|, |x^{(3)}|\} \leq 1\}$$

при всех достаточно малых α и, кроме того, $y(\alpha_k) \rightarrow z_3$, $k \rightarrow \infty$, $y(\alpha) - z(\alpha) = \alpha\zeta$. Следовательно, в соответствии с определением $\zeta \in K_\rho(x_0, z_3)$. Аналогично это включение доказывается и для случаев, когда $\zeta^{(1)} < 0$ или $\zeta^{(3)} \leq 0$. Если же $\zeta^{(1)} = 0$, то оно вытекает из включения $\zeta \in -K(z_3, W(x_0)) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^{(2)} \geq |x^{(1)}|\}$, поскольку из определения следует, что $-K(z, W(x_0)) \subset K_\rho(x, z)$ для $z \in Q(x_0)$. Таким образом, получаем $D \subset K_\rho(x_0, z_3) = z_3 + K_\rho(x_0, z_3) \subset \Omega K(x_0) \subset \Omega\Gamma(x_0)$. Отсюда и из (25) получаем (24).

3) Так как $\rho_\Omega(x_0) = 1$, то, взяв в качестве $A = \{v_0\}$, где $v_0 = (0, -1, 0)$, можно записать множество D в виде

$$D = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \mid \max_{v \in A} (v, y - x_0) + \rho_\Omega(x_0) \leq 1 \right\}.$$

Тогда, учитывая, что $n^*(x) = \max\{|x^{(1)}|, |x^{(2)}|\} + |x^{(3)}|$ и $n^*(v_0) = 1$, в целом получаем, что соотношения (19), (20) выполняются.

Теперь рассмотрим простые примеры построения ФР по заданному субдифференциалу в соответствии со следствиями 3 и 4.

ПРИМЕР 2. Пусть $p = 2$, $A = \text{co}\{(0, 0), (1, 1), (1, -1)\}$. Построение ФР неоднозначно. Так, например, множество A можно представить двумя способами $A = M_1 \cap K = M_2 \cap K$, где

$$M_1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|v^{(1)}|, |v^{(2)}|\} \leq 1\}, \quad K = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v^{(1)} \geq |v^{(2)}|\},$$

$$M_2 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|v^{(1)}|, 2^{-1}|v^{(2)}|\} \leq 1\}.$$

Построим поляры к M_1 и M_2 :

$$M_1^* = \{w \in \mathbb{R}^2 \mid |w^{(1)}| + |w^{(2)}| \leq 1\}, \quad M_2^* = \{w \in \mathbb{R}^2 \mid |w^{(1)}| + 2|w^{(2)}| \leq 1\},$$

которые через функцию Минковского порождают соответствующие нормы $n_1(x) = |x^{(1)}| + |x^{(2)}|$ и $n_2(x) = |x^{(1)}| + 2|x^{(2)}|$. Для любой из этих норм и множества

$$\Omega = x_0 - K^+(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x^{(2)} - x_0^{(2)}| \leq x_0^{(1)} - x^{(1)}\}$$

ФР будет субдифференцируема в точке x_0 и A является ее субдифференциалом в этой точке.

ПРИМЕР 3. Пусть $p = 2$, $A = \text{co}\{(1, 1), (1, -1)\}$, а M_i и $n_i(\cdot)$ из примера 2. Ясно, что $A \subset \partial M_1$ и $A \subset \partial M_2$. Тогда в качестве нормы можно взять $n_1(\cdot)$ или $n_2(\cdot)$. Если зафиксировать точку x_0 и $\rho > 0$, то ФР с любой из этих норм и множеством

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^{(1)} - x_0^{(1)} + x^{(2)} - x_0^{(2)} + \rho \leq 0, x^{(1)} - x_0^{(1)} + x_0^{(2)} - x^{(2)} + \rho \leq 0\}$$

будет субдифференцируема в точке x_0 с субдифференциалом A и $\rho_\Omega(x_0) = \rho$.

§ 3. Условия супердифференцируемости ФР

1. ТЕОРЕМА 8. Для того чтобы ФР была супердифференцируема в точке $x \in \Omega$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\Gamma(x, \Omega) = K(x, \Omega) = \mathbb{R}^p, \quad (26)$$

что эквивалентно тому, что ФР дифференцируема по Фреше в точке x и ее градиент $\rho'_\Omega(x) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 1 супердифференцируемость ФР в точке $x \in \Omega$ эквивалентна тому, что

$$\Gamma(x, \Omega) = K(x, \Omega), \quad \rho'_\Omega(x, g) = \min_{w \in \partial \rho_\Omega(x)} (w, g) \quad \forall g \in \mathbb{R}^p,$$

причем

$$\rho'_\Omega(x, g) = \min_{\zeta \in \Gamma(x, \Omega)} n(g - \zeta) \geq 0. \quad (27)$$

Если бы супердифференциал содержал элемент $w_0 \neq 0$, то $\rho'_\Omega(x, -w_0) \leq -\|w_0\|^2 < 0$, что противоречит (27). Поэтому $\overline{\partial \rho_\Omega}(x) = \{0\}$ и $\rho'_\Omega(x, g) = 0 \forall g \in \mathbb{R}^p$. Следовательно, ФР дифференцируема по Гато, а в силу ее липшицевости и по Фреше в точке x и $\rho'_\Omega(x) = 0$. Отсюда и из (27) следует (26). Нетрудно также увидеть, что из (26) следует дифференцируемость ФР с $\rho'_\Omega(x) = 0$.

ТЕОРЕМА 9. *Для того чтобы ΦP была супердифференцируемой в точке $x \notin \Omega$ и выпуклый компакт B был ее супердифференциалом необходимо, а в случае, когда $\Omega\Gamma(x) = \Omega L(x)$, то и достаточно, чтобы*

$$B = \text{co}\{w \in B \mid n^*(w) = 1\}, \quad (28)$$

$$\Omega\Gamma(x) = \Omega K(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^p \mid \min_{w \in B} (w, y - x) + \rho_\Omega(x) \leq 0\right\}. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость доказывается, как и в теореме 7, но с привлечением теоремы 5.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Равенство $\Omega\Gamma(x) = \Omega L(x)$ гарантирует по теореме 1 дифференцируемость ΦP по всем направлениям в точке x . Используя (28), (29), имеем

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega\Gamma(x)}(x + \alpha g) &= \min_{\substack{w \in B \\ n^*(w)=1}} \min_{y \in \{y \in \mathbb{R}^p \mid (w, y - x) + \rho_\Omega(x) \leq 0\}} n(x + \alpha g - y) \\ &= \min_{\substack{w \in B \\ n^*(w)=1}} \{\alpha(w, g) + \rho_\Omega(x)\} = \rho_\Omega(x) + \min_{w \in B} (w, g). \end{aligned}$$

Поскольку $\rho_{\Omega\Gamma(x)}(x) = \rho_\Omega(x)$, то отсюда следует, что B является супердифференциалом ΦP до множества $\Omega\Gamma(x)$, а следовательно, в соответствии со следствием 2 и ΦP до Ω в точке x .

СЛЕДСТВИЕ 5. *Выпуклый компакт $B \neq \{0\}$ является супердифференциалом некоторой ΦP в какой-либо точке тогда и только тогда, когда существует множество M , являющееся телом некоторой нормы, такое, что B – выпуклая оболочка некоторых граничных точек M .*

СЛЕДСТВИЕ 6. *Пусть M – тело некоторой нормы и B является выпуклой оболочкой некоторых его граничных точек. Тогда для нормы $n(\cdot) = \varphi_{M^*}(\cdot)$ и любого множества Ω такого, что*

$$\Omega\Gamma(x) = \Omega L(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^p \mid \min_{w \in B} (w, y - x) + \rho \leq 0\right\},$$

где $\rho > 0$, ΦP супердифференцируема в точке x , а B – ее супердифференциал и $\rho_\Omega(x) = \rho$. В частности, для

$$\Omega = \left\{y \in \mathbb{R}^p \mid \min_{w \in B} (w, y - x) + \rho \leq 0\right\}.$$

2. Уже цитированный пример 4 из [9], где ΦP была дифференцируема по Фреше в точке x , может также служить и иллюстрацией того факта, что равенство $\Omega\Gamma(x) = \Omega L(x)$, являясь вместе с соотношениями (28), (29) достаточным, не всегда является необходимым условием супердифференцируемости ΦP в точке $x \notin \Omega$. Аналогично, на примере 1 из настоящей статьи легко видно, что соотношения (28), (29), являясь необходимыми, не всегда являются достаточными.

В заключение приведем простой пример построения ΦP по заданному супердифференциалу в соответствии со следствиями 5 и 6.

ПРИМЕР 4. Пусть $p = 2$, $B = \text{co}\{(0, 1), (1, 0)\}$. Построение ФР по супердифференциалу также неоднозначно. Угловые точки множества B принадлежат, например, как границе множества

$$M_3 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid (v^{(1)})^2 + (v^{(2)})^2 \leq 1\}, \quad \text{так и} \quad M_4 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v^{(1)}| + |v^{(2)}| \leq 1\}.$$

Функции Минковского, построенные по полярам к этим множествам, порождают нормы $n_3(x) = [(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2]^{1/2}$ и $n_4(x) = \max\{|x^{(1)}|, |x^{(2)}|\}$. Для любой из этих норм и множества

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \min\{y^{(1)} - x_0^{(1)} + \rho, y^{(2)} - x_0^{(2)} + \rho\} \leq 0\}$$

ФР будет супердифференцируема в точке $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)})$ с супердифференциалом B и $\rho_\Omega(x_0) = \rho$.

Автор выражает глубокую признательность В.Ф. Демьянову и М.С. Никольскому за полезные обсуждения результатов.

Саратовский государственный университет

Поступило

19.12.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
- [2] Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
- [3] Демьянов В. Ф., Рубинов Л. В. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
- [4] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
- [5] Минченко Л. И., Борисенко О. Ф., Грицай С. П. Мнозначный анализ и возмущенные задачи нелинейного программирования. Минск: Навука і тэхніка, 1993.
- [6] Минченко Л. И. Вычисление субдифференциалов маргинальных функций с помощью функции расстояния // Кибернетика. 1989. № 5. С. 83–85.
- [7] Балаганский В. С. Достаточные условия дифференцируемости метрической функции // Тр. ИММ УрО РАН. Т. 1. С. 84–89.
- [8] Дулов С. И. Дифференцируемость по направлениям функции расстояния // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 3. С. 29–52.
- [9] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.