Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Зелик, Операторное уравнение Матье–Хилла с диссипацией и оценки его индекса неустойчивости, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 4, 543–560

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1533>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 05:39:01

УДК 517.956.3

ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ МАТЬЕ–ХИЛЛА С ДИССИПАЦИЕЙ И ОЦЕНКИ ЕГО ИНДЕКСА НЕУСТОЙЧИВОСТИ

С. В. Зелик

Исследовано поведение при $t \rightarrow \infty$ решений уравнения

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u + Au + f(t)u = 0$$

в гильбертовом пространстве, в котором $A = A^*$ – положительно определенный оператор с компактным обратным, а оператор f периодичен по t . Введено понятие индекса неустойчивости этого уравнения и доказана его конечность при выполнении естественных условий подчиненности оператора f оператору A . Получены асимптотические оценки при $\gamma \rightarrow 0$ индекса неустойчивости уравнения и построен пример, показывающий их неулучшаемость. Кроме этого, исследованы качественные характеристики спектра оператора монодромии данной задачи и вопрос о существовании представления Флоке.

Библиография: 16 названий.

Введение. Многие задачи теории параметрических колебаний распределенных систем (см. [1]), а также некоторые задачи теории аттракторов (см. [2]) сводятся к исследованию операторного уравнения Матье–Хилла

$$\partial_t^2 u + Au + f(t)u = 0 \quad (1)$$

в бесконечномерном гильбертовом пространстве, в котором A является самосопряженным положительно определенным оператором с компактным обратным, а оператор $f(t)$ является периодическим по времени и удовлетворяет естественным условиям подчиненности оператору A .

Системы вида (1) изучались многими авторами [1], [3]–[5].

Как показано в работе [6], в бесконечномерном случае естественно считать резонансным не всякое неограниченное решение (1), а лишь то, которое экспоненциально растет при $t \rightarrow \infty$ (т.е. его показатель Ляпунова больше некоторого положительного γ). С математической точки зрения такой подход эквивалентен введению в уравнение (1) диссипативного члена $2\gamma \partial_t u$

$$\partial_t^2 u + 2\gamma \partial_t u + Au + f(t)u = 0. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Немецкого Математического Общества.

Данная работа посвящена исследованию динамики неустойчивых решений системы (2) и ее зависимости от диссипативного параметра γ . Для описания этой динамики вводится понятие индекса неустойчивости $N = N(\gamma)$ системы (2), т.е. коразмерности подпространства ограниченных решений в пространстве всех ее решений. Как будет показано в п. 2, для весьма широкого класса операторов $f(t)$ индекс неустойчивости $N(\gamma) < \infty$, а поведение неустойчивых решений (2) при $t \rightarrow \infty$ определяется некоторой конечномерной системой порядка $N(\gamma)$ линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, построенной по системе (2).

Целью данной статьи является получение оценки индекса $N(\gamma)$ в зависимости от спектральных свойств оператора A и норм оператора f в соответствующей A шкале гильбертовых пространств. Для получения этой оценки к уравнению (2) применяется математический аппарат, разработанный в теории аттракторов [2], [7], [8].

В работе получена асимптотическая по $\gamma \rightarrow 0$ оценка вида $N(\gamma) \leq C\gamma^{-p}$ и построены примеры динамических систем вида (2), для которых справедлива и обратная оценка $C_2\gamma^{-p} \leq N(\gamma) \leq C_1\gamma^{-p}$. Кроме этого, в п. 3 предложена новая схема оценки коэффициента изменения n -мерных объемов под действием разрешающего оператора задачи (2), представляющая интерес и для теории аттракторов.

Некоторая модификация традиционной схемы оценки этих коэффициентов приведена в п. 4, где она применяется для улучшения оценки $N(\gamma)$ в случае дополнительной гладкости оператора f .

Качественные характеристики спектра разрешающего оператора задачи (2) исследуются в п. 5.

Приложения полученных результатов к различным уравнениям математической физики рассмотрены в п. 6.

1. Разрешающий оператор и его основные свойства. Введем некоторые обозначения. Пусть H – гильбертово пространство, $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в нем, $A: D(A) \rightarrow H$ – положительно определенный самосопряженный оператор, обратный к которому компактен. По оператору A , как обычно, строится шкала гильбертовых пространств H_s , $s \in \mathbb{R}$, $\|\cdot\|_s = \|A^{s/2} \cdot\|$ и энергетическое пространство $E = H_1 \times H$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем семейство операторов $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, действующих из H_α в H_β , $\alpha > \beta$, *равномерно компактным*, если

$$\forall \varepsilon \quad \exists C = C(\varepsilon) \quad \|f(t)x\|_\beta \leq \varepsilon \|x\|_\alpha + C\|x\|_\beta, \quad x \in H_\alpha, \quad (3)$$

причем константа C не зависит от t .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Известно, что оператор f , не зависящий от времени, компактен тогда и только тогда, когда выполнено условие (3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как вложение $H_{p_1} \subset H_{p_2}$ вполне непрерывно при $p_1 > p_2$, то условие (3) будет заведомо выполнено, если $f \in C[\mathbb{R}, L(H_{\alpha-\theta}, H_\beta)]$ при некотором малом $\theta > 0$.

В пространстве H рассматривается следующая задача:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u + \gamma \partial_t u + Au + f(t)u &= 0, \\ u|_{t=0} &\in H_1, \quad \partial_t u|_{t=0} \in H, \end{aligned} \quad (4)$$

где коэффициент рассеяния энергии $\gamma > 0$, а на операторы $f(t)$ накладываются условия (*):

- 1) при любом $t \in \mathbb{R}$ $f(t)$ симметричен в H ;
- 2) f и f'_t равномерно компактны из H_1 в H_{-1} ;
- 3) f и f'_t равномерно компактны из H_2 в H .

Кроме этого, предполагается, что оператор f зависит от времени периодическим образом:

$$f(t+T) \equiv f(t). \quad (5)$$

Исследование задачи (4) начнем с построения разрешающего оператора неоднородного уравнения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $h(t) \in L_2([0, T], H)$, $(u_0, v_0) \in E$ и выполнены условия (*), тогда задача

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u + \gamma \partial_t u + Au + f(t)u &= h(t), \\ u|_{t=0} &= u_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = v_0 \end{aligned}$$

однозначно разрешима в классе $C([0, T], E)$, (т.е. пара $(u(t), \partial_t u) = \xi_u(t)$ принадлежит классу $C([0, T], E)$), причем это решение допускает следующую оценку:

$$\|\xi_u(t)\|_E^2 \leq C \left(\|\xi_u(0)\|_E^2 + \int_0^T \|h(t)\|^2 dt \right).$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [9]. Таким образом, корректно определен оператор

$$\mathcal{U}(t): E \rightarrow E, \quad \xi_u(t) = \mathcal{U}(t)\xi_u(0).$$

Основная цель данного пункта – получить представление этого оператора в виде суммы сжимающего и компактного операторов

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_0(t) + \mathcal{D}(t). \quad (6)$$

Для построения такого разложения рассмотрим в H вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} \partial_t^2 v + \gamma \partial_t v + Av + f(t)v + Mv &= 0, \\ v|_{t=0} &= u|_{t=0}, \quad \partial_t v|_{t=0} = \partial_t u|_{t=0} \end{aligned} \quad (7)$$

с теми же начальными условиями (здесь $M = M(\gamma)$ – некоторое положительное число, которое будет определено ниже) и выберем в качестве $\mathcal{U}_0(t)$ разрешающий оператор этой задачи.

ТЕОРЕМА 2. Существует такое $M_0 = M_0(\gamma)$, что для всех $M > M_0$ решение (7) допускает следующую оценку:

$$\|\xi_v(t)\|_E^2 \leq C e^{-\nu t} \|\xi_u(0)\|_E^2, \quad \nu > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем, следуя [2], функционал на пространстве E

$$F(t, v, \partial_t v) = (Av + fv + Mv, v) + (\partial_t v, \partial_t v) + \eta(v, \partial_t v),$$

где $\eta > 0$ – достаточно малое число, и оценим его производную вдоль решений задачи (7):

$$\begin{aligned} \partial_t F &= -(2\gamma - \eta)\|\partial_t v\|^2 - \eta(Av + Mv + fv, v) - \eta\gamma(v, \partial_t v) + (f'_t v, v) \\ &\leq -\nu(\eta)F(t) + P, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \nu(\eta) &= \frac{1}{2} \min(2\gamma - \eta, \eta), \\ P(t) &= -\nu\|\partial_t v\|^2 - \nu\|v\|_1^2 - M\nu\|v\|^2 + \eta(\nu - \gamma)(v, \partial_t v) + (f'_t(t)v, v). \end{aligned}$$

Для оценки P воспользуемся условиями (*). Обозначим через $L(\varepsilon)$ минимальное положительное число, для которого справедливы неравенства

$$(f'(t)v, v) \leq \varepsilon\|v\|_1^2 + L(\varepsilon)\|v\|^2, \quad (f(t)v, v) \leq \varepsilon\|v\|_1^2 + L(\varepsilon)\|v\|^2. \quad (8)$$

(Существование такого L следует непосредственно из условия (*), 2.) Используя (8), получим (выбрав, например, $\eta = \gamma$)

$$P(t) \leq \left(L\left(\frac{\gamma}{2}\right) - M\frac{\gamma}{2} + 1 \right) \|v\|^2.$$

Таким образом, при $M_0 = (2L(\gamma/2) + 2)/\gamma$ справедливо соотношение

$$\partial_t F(t) \leq -\frac{\gamma}{2} F(t). \quad (9)$$

Введем теперь в пространстве E эквивалентную норму

$$\|\xi_v\|_*^2 = (Av, v) + M(v, v) + \|\partial_t v\|^2,$$

где M выбирается так, чтобы неравенство (9) было выполнено. Тогда, используя (8) и неравенство Гроунола, нетрудно получить следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\xi_v(t)\|_* &\leq (1 + C\gamma)e^{-\gamma t/4} \|\xi_v(0)\|_*, \\ M^{-1/2}\|\xi_v\| &\leq \|\xi_v\| \leq \|\xi_v\|_* \leq M^{1/2}\|\xi_v\|, \end{aligned} \quad (10)$$

где константа C не зависит от γ . Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Оценки минимального $M = M(\gamma)$ в теореме 2, а также неравенства (10) будут использованы в п. 3 для оценки размерности подпространства неустойчивых решений задачи (4).

ПРИМЕР. Предположим, что выполняется следующее условие:

$$f, f'_t \in C(\mathbb{R}, L(H_{1-\theta}, H_{-1})), \quad 0 < \theta \leq 2. \quad (11)$$

Тогда, используя интерполяционное неравенство $\|v\|_{1-\theta} \leq C\|v\|^\theta\|v\|_1^{1-\theta}$, нетрудно получить $L(\gamma) \leq C\gamma^{1-2/\theta}$ и соответственно

$$M(\gamma) \leq C\gamma^{-2/\theta}. \quad (12)$$

Приступим теперь к исследованию оператора $\mathcal{D}(t)$ в разложении (6). Очевидно, что функция $\xi_w(t) = \mathcal{D}(t)\xi_u(0)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 w + \gamma \partial_t w + Aw + f(t)w &= Mv = M(u - w), \\ w|_{t=0} &= 0, \quad \partial_t w|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя теоремы 1 и 2 и вспомнив, что $w = u - v$, получим следующую оценку:

$$\|\xi_w(t)\|_*^2 \leq M\|\xi_w(t)\|^2 \leq 2M(\|\xi_u(t)\|^2 + \|\xi_v(t)\|^2) \leq CM\|\xi_u(0)\|_*^2.$$

Однако, справедливо более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Решение задачи (13) принадлежит пространству $C(\mathbb{R}, E_1)$, где $E_1 = H_2 \times H_1$ и удовлетворяет следующей оценке:*

$$\|w(t)\|_2^2 + \|\partial_t w\|_1^2 + \|\partial_t^2 w\| \leq CM^2\|\xi_u(0)\|_*^2. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем формальный вывод неравенства (14), обосновать который можно, например, с помощью галёркинских приближений. Обозначим $\theta = \partial_t w$ и продифференцируем (13) по t . Получим

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \theta + \gamma \partial_t \theta + A\theta + f(t)\theta &= M\partial_t v - f'(t)w, \\ \theta|_{t=0} &= 0, \quad \partial_t \theta|_{t=0} = Mu(0). \end{aligned} \quad (15)$$

Умножим (15) скалярно на $\partial_t \theta$:

$$\frac{1}{2} \partial_t (\|\partial_t \theta\|^2 + \|\theta\|_1^2 + (f(t)\theta, \theta)) + \gamma \|\partial_t \theta\|^2 = M(\partial_t v, \partial_t \theta) - (f'w, \partial_t \theta) - (f'\theta, \theta). \quad (16)$$

Слагаемые $(\partial_t v, \partial_t \theta)$ и $(f'\theta, \theta)$ оцениваются стандартным образом. Для получения оценки $(f'w, \partial_t \theta)$ выразим из (13) $Aw = Mv - \partial_t \theta - \gamma\theta - f(t)w$, откуда, используя условие (*), 3), получим

$$\|w(t)\|_2 \leq CM\|\xi_u(0)\|_* + \|\partial_t \theta(t)\|, \quad (17)$$

после чего $(f'_t w, \partial_t \theta)$ оценивается тривиально. Подставив эти оценки в (16) и применив неравенство Гронуола, получим

$$\|\partial_t \theta(t)\|^2 + \|\theta\|_1^2 \leq Ce^{\alpha t} \|\xi_u(0)\|_*^2, \quad \alpha > 0,$$

что вместе с неравенством (17) и доказывает теорему 3.

В пространстве $E_1 = H_2 \times H_1$ мы также введем эквивалентную норму

$$\|\xi_u\|_{1*}^2 = \|\partial_t u\|^2 + \|u\|_2^2 + M\|u\|_1^2 = \|A^{1/2}\xi_u\|_*^2.$$

Тогда неравенства (14) могут быть записаны в виде

$$\|\xi_w(t)\|_{1*}^2 \leq C e^{\alpha t} M^2 \|\xi_u(0)\|_*^2.$$

В дальнейшем, в п. 2 и п. 3, будет использоваться только $*$ -норма в пространствах E и E_1 , поэтому для удобства записи символ ' $*$ ' далее опускается.

Итак, доказано, что разрешающий оператор задачи (4) допускает представление (6), причем нормы операторов $\mathcal{U}_0(t)$ и $\mathcal{D}(t)$ оцениваются следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_0(t)\xi\| &\leq (1 + C\gamma)e^{-\gamma t/4}\|\xi\|, \quad \xi \in E, \\ \|\mathcal{D}(t)\xi\|_1 &\leq C e^{\alpha t} M \|\xi\|, \end{aligned} \quad (18)$$

где константы C и α не зависят от γ .

2. Конечность индекса неустойчивости в периодическом случае. Заметим, что согласно теореме 1.1 пространство всех решений задачи (4) можно отождествить с пространством начальных условий задачи (4), т.е. с E , а любое подпространство решений – с подпространством в E , поэтому корректно следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Индексом неустойчивости $N = N(\gamma)$ динамической системы (4) назовем коразмерность подпространства асимптотически устойчивых решений в пространстве всех решений (4).*

Основная задача данного пункта – показать, что из условия периодичности (5) и разложения (6) следует конечность индекса неустойчивости $N(\gamma)$. Кроме этого, будет изучена структура неустойчивых решений задачи (4). Для достижения этой цели нам потребуется следующий результат из теории линейных несамосопряженных операторов.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть оператор $S \in L(E, E)$ представлен в виде суммы сжимающего и компактного операторов, тогда пространство E разлагается в прямую сумму инвариантных относительно S подпространств $E = E_+ \oplus E_-$, таких что $0 \leq \dim E_+ \leq \infty$, $\sigma(S|_{E_-}) \subset D$, $\sigma(S|_{E_+}) \subset \mathbb{C} \setminus D$, где $\sigma(S|_{E_{\pm}})$ обозначает спектр сужения оператора S на $E_{\pm}$, а $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.*

Относительно доказательства этой теоремы см. [10], [11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем *оператором монодромии S* динамической системы (4) оператор, который значению $\xi_u(0)$ ставит в соответствие $\xi_u(T)$, где T – период, т.е. $S = \mathcal{U}(T)$ в обозначениях п. 1.

Из представления (6) следует, что для оператора монодромии S выполнены условия теоремы 1. Обозначим через P_+ и P_- ортопроекторы на подпространства $E_{\pm}$, существование которых установлено в теореме 1. Тогда для исследования поведения решений (4) при $t \rightarrow \infty$ достаточно рассматривать начальные условия только из E_+ и из E_- .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\xi_u(0) \in E_-$, тогда существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\|\xi_u(t)\| \leq C e^{-\alpha t} \|\xi_u(0)\|.$$

Доказательство следует непосредственно из теоремы 1 и формулы Гельфанда о спектральном радиусе.

СЛЕДСТВИЕ. Индекс неустойчивости динамической системы (4) конечен и равен размерности подпространства E_+ .

Рассмотрим случай $\xi_u(0) \in E_+$.

ТЕОРЕМА 3. 1. В подпространстве $E_+(t) = \mathcal{U}(t)E_+$ существует периодический базис

$$\psi(t) = \{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}, \quad \psi_i(t+T) \equiv \psi_i(t).$$

2. Разложим решение $\xi_u(t) \in E_+(t)$ по базису $\psi(t)$:

$$\xi_u(t) = \sum x_i(t) \psi_i(t),$$

тогда вектор-функция $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ является решением линейного автономного уравнения $\dot{x}(t) = Bx(t)$, где B удовлетворяет уравнению $\exp(TB) = S_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты ограничимся лишь случаем общего положения, когда оператор $S_+ = P_+S$ диагонализировать. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – собственный базис оператора S_+ , т.е. $S_+e_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим эволюцию векторов e_i под действием динамической системы (4) $e_i(t) = \mathcal{U}(t)e_i$ и введем семейство операторов моноклономии $S^{(t)}$ из формулы $\xi_u(t+T) = S^{(t)}\xi_u(t)$. Используя периодичность системы (4), выразим $S^{(t)}$ через S

$$S^{(t)} = \mathcal{U}(t)S[\mathcal{U}(t)]^{-1}. \quad (19)$$

Но из (19) сразу следует, что векторы $e_i(t)$ образуют собственный базис $S^{(t)}$, т.е.

$$e_i(t+T) = \lambda_i e_i(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (20)$$

В качестве базиса $\psi(t)$ возьмем векторы $e^{-\mu_i t} e_i(t)$, где $\mu_i = \ln \lambda_i / T$. (Периодичность выбранного базиса обеспечивается соотношениями (20).)

Пусть теперь $\xi_u(t) = \sum x_i(t) \psi_i(t)$. Так как по определению $e_i(t)$ $\xi_u(t) = \sum x_i(0) e_i(t)$ и ψ – базис, то $x_i(t) = e^{\mu_i t} x_i(0)$ или $\dot{x}_i(t) = \mu_i x_i(t)$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда S_+ не является диагонализированным, доказательство проводится в сущности аналогично, только (20) заменяется более сложной разностной системой, отвечающей жорданову базису оператора S_+ .

СЛЕДСТВИЕ 1. В случае общего положения существует $N(\gamma)$ решений задачи (4) таких, что

- 1) $u_i(t) = e^{\mu_i t} \psi_i(t)$, $\psi_i(t+T) = \psi_i(t)$, $\operatorname{Re} \mu_i \geq 0$;
- 2) общее решение (4) представляется в виде

$$u(t) = \sum_{i=1}^N C_i u_i(t) + u_-(t), \quad \text{где } C_i \in \mathbb{C}, \quad \|u_-(t)\|_1 \leq C e^{-\alpha t} \|u_-(0)\|.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Рассмотрим семейство динамических систем вида (4), зависящих от параметра $\beta \in \Lambda$. Тогда если

$$M = \sup_{\beta \in \Lambda} N_{\beta}(\gamma) < \infty,$$

то диаграмма устойчивости системы (4) в пространстве Λ совпадает с диаграммой устойчивости некоторого конечномерного автономного семейства

$$\dot{x} = B(\beta)x, \quad x \in \mathbb{C}^M,$$

и, таким образом, динамика параметрического возбуждения системы (4) оказывается конечномерной.

3. Оценка индекса неустойчивости. В этом пункте, используя разложение (6) оператора монодромии S и некоторые свойства его внешних степеней $\Lambda^n S$, будет получена асимптотическая по $\gamma \rightarrow 0$ оценка индекса неустойчивости $N(\gamma)$ динамической системы (4) при условии степенного роста собственных значений оператора A

$$C_2 k^{2s} \leq \lambda_k \leq C_1 k^{2s}. \quad (21)$$

(Это условие заведомо выполнено в наиболее важном частном случае, когда $A = A^*$ является эллиптическим оператором в ограниченной области в $\mathbb{R}^n$.)

Пусть $L: E \rightarrow E$ – ограниченный линейный оператор. Рассмотрим

$$\Lambda^n E = \{\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n, \xi_i \in E\}$$

и введем норму в этом пространстве по формуле

$$\|\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n\|^2 = \det |(\xi_i, \xi_j)|.$$

Нетрудно проверить следующие элементарные свойства этой нормы:

- 1) $\|(\xi_1 + \eta_1) \wedge \cdots \wedge \xi_n\| \leq \|\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n\| + \|\eta_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n\|;$
- 2) $\|(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k) \wedge (\xi_{k+1} \wedge \cdots \wedge \xi_n)\| \leq \|\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k\| * \|\xi_{k+1} \wedge \cdots \wedge \xi_n\|.$

Для оценки изменения n -мерных объемов под действием оператора L введем следующую величину:

$$w_n(L) = \sup\{\|L\xi_1 \wedge \cdots \wedge L\xi_n\| : \|\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n\| = 1\}$$

или, что то же самое,

$$w_n(L) = \sup\{\|L\xi_1 \wedge \cdots \wedge L\xi_n\| : (\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}\}. \quad (22)$$

(В действительности $w_n(L)$ есть просто норма n -й внешней степени оператора L в гильбертовом пространстве $\Lambda^n(E)$.)

ТЕОРЕМА 1. *Имеем*

- 1) $w_n(L) = \alpha_1(L) \cdots \alpha_n(L)$, где $\alpha_k(L) = \inf \{ \sup \{ (Lx, Lx)^{1/2}, \|x\| = 1, x \in F^\perp \}, F \subset E, \dim F = k + 1 \}$;
- 2) $w_n(L) = w_n(L^*) = [w_n(LL^*)]^{1/2}$;
- 3) $w_n(L) \leq \|L\|^n$;
- 4) $w_n(L_1 L_2) \leq w_n(L_1) w_n(L_2)$.

Относительно доказательства этой теоремы см. [8].

ТЕОРЕМА 2. *Пусть L_1 и L_2 – ограниченные операторы в E , тогда*

$$w_n(L_1 + L_2) \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w_k(L_1) w_{n-k}(L_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем его для $n = 2$. Для остальных n оно проводится аналогично. Используя свойства 1) и 2) нормы, получим

$$\begin{aligned} & \| (L_1 + L_2) \xi_1 \wedge (L_1 + L_2) \xi_2 \| \\ & \leq \| L_1 \xi_1 \wedge (L_1 + L_2) \xi_2 \| + \| L_2 \xi_1 \wedge (L_1 + L_2) \xi_2 \| \\ & \leq \| L_1 \xi_1 \wedge L_1 \xi_2 \| + \| L_1 \xi_1 \| * \| L_2 \xi_2 \| + \| L_1 \xi_2 \| * \| L_2 \xi_1 \| + \| L_2 \xi_1 \wedge L_2 \xi_2 \|. \end{aligned}$$

Откуда и следует утверждение теоремы.

В дальнейшем нам понадобятся еще два свойства $w_n(L)$.

ЛЕММА 1. 1. *Пусть B – положительно определенный самосопряженный компактный оператор, λ_k – его собственные значения, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, обозначим $\varphi(n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$, и пусть выполнено неравенство $(LL^*x, x) \leq (B^2x, x)$ для всех $x \in E$. Тогда*

$$w_n(L) \leq \varphi(n). \quad (23)$$

2. *Пусть $E = \mathbb{C}^n$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные значения L (с учетом кратности), тогда*

$$w_n(L) \geq |\lambda_1| \cdots |\lambda_n|. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Из принципа min-max получаем: $w_n(L) \leq w_n(B)$, но для компактного самосопряженного оператора $\alpha_k(B) = \lambda_k$, откуда и следует неравенство (23).

2. Без ограничения общности можно считать, что оператор L диагонализирован, так как множество таких операторов плотно в множестве всех операторов, а норма $w_n(L)$ непрерывна по L . Но для диагонализированного оператора (24) очевидно (достаточно воспользоваться определением (22), взяв в качестве ξ_i собственные векторы оператора L).

Из леммы 1 следует достаточное условие того, что $N(\gamma) < n$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть S – оператор монодромии задачи (4), тогда если $w_n(S) < 1$, то $N(\gamma) < n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N(\gamma) \geq n$, тогда $w_n(S) \geq w_n(S|_{E_+}) \geq 1$ согласно лемме 1. Противоречие. Теорема доказана.

Оценим теперь w_n для операторов $S_0 = \mathcal{U}(T)$ и $D = \mathcal{D}(T)$ основного разложения (6).

ЛЕММА 2. *Верны неравенства*

$$w_k(S_0) \leq (1 + C\gamma)^k e^{-\gamma k T/4}, \quad (25)$$

$$w_k(D) \leq C^k e^{\alpha k T} M^k w_k(A^{-1/2}). \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (25) сразу следует из оценки (18) и теоремы 1, 3). Для доказательства (26) воспользуемся леммой 1. Оператор D^* действует из E_1^* в E^* , т.е. из E_{-1} в E . Поэтому $\|DD^*\xi\|_1^2 \leq C^4 M^4 e^{4\alpha T} \|\xi\|_{-1}^2$, т.е.

$$(A^{1/2}DD^*\xi, A^{1/2}DD^*\xi) \leq (C^2 M^2 e^{2\alpha T} A^{-1/2}\xi, C^2 M^2 e^{2\alpha T} A^{-1/2}\xi),$$

откуда согласно лемме 1

$$w_k(A^{1/2}DD^*) \leq C^{2k} M^{2k} e^{2\alpha k T} w_k(A^{-1/2}).$$

Осталось применить теорему 1, 4):

$$w_k(DD^*) = w_k(A^{-1/2}A^{1/2}DD^*) \leq C^{2k} M^{2k} e^{2\alpha k T} [w_k(A^{-1/2})]^2.$$

Откуда и следует неравенство (26). Лемма 2 доказана. (Напомним, что в формулах (25) и (26) константы α и C не зависят от γ , а вся зависимость от γ сосредоточена в константе $M(\gamma)$.)

Теперь мы готовы сформулировать основной результат этого пункта.

ТЕОРЕМА 4. *При выполнении условия (21) индекс неустойчивости динамической системы (4) допускает следующую асимптотическую по $\gamma \rightarrow 0$ оценку:*

$$N(\gamma) \leq \frac{CM^{1/s}(\gamma)}{\gamma^{1+1/s}},$$

где s определяется формулой (21), а $M(\gamma)$ определено в теореме 1.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что непосредственно из условия (21) следует, что $w_k(A^{-1/2}) \sim C^k (k!)^s$, поэтому согласно теореме 2 и неравенствам (25) и (26) справедлива следующая оценка:

$$w_n(S) \leq \sum_{k=0}^n (1 + C\gamma)^k e^{-\gamma T k/4} C_1^{n-k} M^{n-k} \frac{n!}{k![(n-k)!]^{1+s}}.$$

Воспользуемся очевидным неравенством

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq n * \max a_k,$$

тогда $w_n(S) \leq n * \max f_n(k)$, где

$$f_n(k) = \frac{n!}{k![(n-k)!]^{1+s}} \exp[-Ck(\gamma T - \ln(1-\gamma)) + (\ln M + C_1 + \alpha T)(n-k)]. \quad (27)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\gamma T - \ln(1 + C\gamma) \sim \gamma(T - C) = \gamma T' > 0$ (при случае переходя от T к lT , $l \in \mathbb{Z}$). Поэтому, расписав в формуле (27) факториалы по формуле Стирлинга, получим

$$\begin{aligned} \ln f_n(k) &\sim \varphi_n(k) \\ &= -T'\gamma k + (C_1 + \alpha T + \ln M)(n-k) + n \ln \frac{n}{e} - k \ln \frac{k}{e} - (1+s)(n-k) \ln \frac{n-k}{e}. \end{aligned}$$

Для оценки $\max \varphi_n(k)$, $k = 0, \dots, n$, рассмотрим более общую функцию $\varphi_n(x)$, где $x \in [0, n]$, и вычислим ее производную по x

$$\varphi'_n(x) = -l + \ln \frac{(n-x)^{1+s}}{x}, \quad \text{где } l = T'\gamma + C_1 + \alpha T + \ln M.$$

Нетрудно убедиться, что на отрезке $[0, n]$ $\varphi''_n(x) < 0$, поэтому максимум $\varphi_n(x)$ находится из условия $\varphi'_n(x) = 0$, т.е.

$$\frac{(n-x)^{1+s}}{x} = e^l = L. \quad (28)$$

Обозначим через $\psi(n) = (n - x(n))/n$, где $x(n)$ – решение (28), тогда соотношение (28) примет вид

$$\frac{\psi^{1+s}}{1-\psi} = Ln^{-s}. \quad (29)$$

Преобразуем выражение для $\varphi_n(x(n))$, пользуясь соотношением (29):

$$\begin{aligned} n \ln \frac{n}{e} - x \ln \frac{x}{e} - (1+s)(n-x) \ln \frac{n-x}{e} \\ = n \ln \frac{n}{n-x} + x \ln \frac{(n-x)^{1+s}}{x} - sx - sn \ln \frac{n-x}{e} \\ = -n\psi + lx - sn \ln n\psi + s(n-k), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \varphi_n(x(n)) &= -lx + (l - T'\gamma)n - n \ln \psi + lx - sn \ln n\psi + sn\psi \\ &= (l - T'\gamma + s)n\psi - n \ln n^s \psi^{1+s} = n[-T'\gamma + s\psi - \ln(1-\psi)]. \end{aligned}$$

Итак, доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 3. *Справедливо неравенство*

$$w_n(S) \leq \exp \left(n \left[-T'\gamma + s\psi - \ln(1 - \psi) + \frac{\ln n}{n} \right] \right),$$

где n и ψ связаны соотношением (29).

Теперь уже несложно завершить доказательство теоремы. Заметим, что формула (29) задает взаимнооднозначное соответствие между ψ из отрезка $[0, 1]$ и $n \in [0, \infty)$. Поэтому определена функция

$$f(\psi) = -T'\gamma + s\psi - \ln(1 - \psi) + \frac{\ln n(\psi)}{n(\psi)}.$$

Исследуем поведение этой функции в окрестности нуля. Из (29) нетрудно получить, что $[n(\psi)]^{-1} \sim o(\psi)$, $\psi \rightarrow 0$, поэтому f дифференцируема в нуле и $f'(0) = s + 1$. Следовательно, $f(\psi) \sim -T'\gamma + (s + 1)\psi$, а, значит, условие $f(\psi) < 0$ выполняется при $\psi \sim -T'\gamma/s + 1 + o(\gamma)$. Подставив эту асимптотику в (29) и вспомнив, что $l = C + \ln M$, а, следовательно, $e^l = CM(\gamma)$, получим, что $w_n(S) < 1$ при

$$n \sim \frac{M^{1/s}(\gamma)}{\gamma^{1+1/s}}.$$

Что вместе с теоремой 3 и доказывает теорему 4.

ПРИМЕР. Предположим, что выполнены условия (11), тогда согласно формуле (12)

$$N(\gamma) \leq C\gamma^{-p}, \quad \text{где } p = 1 + \frac{1}{s} + \frac{2}{s\theta}. \quad (30)$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Альтернативный метод оценки $N(\gamma)$ будет изложен в п. 4 для регулярного случая.

4. Еще одна схема оценки индекса неустойчивости. Этот пункт посвящен уточнению оценки индекса неустойчивости системы (4) в случае, когда оператор $f(t)$ является более гладким. Причем при некоторых дополнительных условиях на спектр оператора A полученная оценка окажется неулучшаемой. Кроме этого, будет построена динамическая система вида (4) с бесконечным индексом неустойчивости. (Естественно, условия (*) для этого примера будут нарушены.)

Для простоты ограничимся условиями (**) гладкости оператора f :

- 1) $f \in C[\mathbb{R}, L(H, H) \cup L(H_1, H_1)]$;
- 2) $f'_t \in C[\mathbb{R}, L(H, H_{-\beta})]$ для некоторого $\beta > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В отличие от условий (*) п. 1 здесь не требуется ни самосопряженность $f(t)$, ни A -подчиненность f'_t , что компенсируется более жесткими условиями на $f(t)$.

Для доказательства конечности $N(\gamma)$ построим аналог разложения (6). Возьмем в качестве $\mathcal{U}_0(t)$ разрешающий оператор следующей задачи:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 v + \gamma \partial_t v + Av &= 0, \\ v|_{t=0} &= u|_{t=0}, \quad \partial_t v|_{t=0} = \partial_t u|_{t=0}, \end{aligned}$$

а $\mathcal{D}(t)$ определим из формулы $\mathcal{D}(t)\xi_u(0) = \xi_w(t)$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 w + \gamma \partial_t w + Aw &= -f(t)u, \\ w|_{t=0} &= 0, \quad \partial_t w|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Тогда, так же как и в п. 1, разрешающий оператор (4) представляется в виде $\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_0(t) + \mathcal{D}(t)$, и справедлив следующий фундаментальный результат.

ТЕОРЕМА 1. *Оператор $\mathcal{D}(t)$ компактен.*

Доказательство теоремы проводится аналогично [2, с. 132].

СЛЕДСТВИЕ 1. *Все результаты п. 2 остаются справедливыми при замене условий (*) на условия (**), в частности, индекс неустойчивости $N(\gamma)$ конечен.*

Для оценки $N(\gamma)$ нам понадобится следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{A} \in L(E, E)$, тогда n -мерным следом $\mathcal{A}$ называется следующая величина:

$$\mathrm{Tr}_n \mathcal{A} = \inf \{ \mathrm{Tr} \mathcal{A} Q, Q^2 = Q = Q^*, \mathrm{rang} Q = n \}.$$

Также нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 1. 1. Пусть $(\mathcal{A}\xi, \xi) \leq (B\xi, \xi) \quad \forall \xi \in E$, тогда $\mathrm{Tr}_n \mathcal{A} \leq \mathrm{Tr}_n B$.

2. Пусть B диагонализирuem и самосопряжен и $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$ – его собственные числа, тогда

$$\mathrm{Tr}_n B = \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

3. Пусть $\partial_t \xi_i(t) = \mathcal{A}(t) \xi_i(t)$, тогда

$$\|\xi_1(t) \wedge \dots \wedge \xi_n(t)\| \leq \|\xi_1(0) \wedge \dots \wedge \xi_n(0)\| \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t \mathrm{Tr}_n \mathcal{A}(t) dt\right).$$

Доказательство этой леммы можно найти в [8].

ТЕОРЕМА 2. При выполнении условий (**) индекс неустойчивости задачи (4) допускает следующую оценку:

$$N(\gamma) \leq \begin{cases} C\gamma^{-1}, & s > 1, \\ C\gamma^{-1} \ln \gamma^{-1}, & s = 1, \\ C\gamma^{-1/s}, & s < 1. \end{cases} \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим, следуя [8], уравнение (4) в виде системы

$$\begin{aligned} \partial_t u &= v - \varepsilon u, \\ \partial_t v &= (\varepsilon - \gamma)v - Au + \varepsilon(\gamma - \varepsilon)u - f(t)u, \end{aligned} \quad (32)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, или, обозначив $\{u, v\}$ через ξ ,

$$\dot{\xi} = \mathcal{A}(t)\xi, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} & -\varepsilon & 1 \\ -A - f + \varepsilon(\gamma - \varepsilon) & \varepsilon - \gamma & \end{pmatrix}.$$

Обозначим через S оператор монодромии задачи (32), тогда согласно лемме 1

$$w_n(S) \leq \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^T \mathrm{Tr}_n \mathcal{A}(t) dt\right). \quad (33)$$

Нетрудно проверить, что

$$(\mathcal{A}\xi, \xi)_E = -\varepsilon\|u\|_1^2 - (\gamma - \varepsilon)\|v\|^2 + \varepsilon(\gamma - \varepsilon)(u, v) - (f(t)u, v). \quad (34)$$

Согласно интерполяционной теореме (см. [12]) оператор $f(t)$ равномерно ограничен как оператор из $H_{1/2}$ в $H_{1/2}$, поэтому

$$|(f(t)u, v)| \leq C\|u\|_{1/2}\|v\|_{-1/2} \leq C(\|u\|_{1/2}^2 + \|v\|_{-1/2}^2).$$

Подставив эту оценку в формулу (34), и, выбрав $\varepsilon = \gamma/2$, получим при достаточно малом γ

$$(\mathcal{A}\xi, \xi)_E \leq (B\xi, \xi)_E, \quad \text{где } B = \begin{pmatrix} -\gamma/4 + CA^{-1/2} & 0 \\ 0 & -\gamma/4 + CA^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Так как оператор B диагонализирован и его собственные значения μ_n равны $\mu_n = -\gamma/4 + C\lambda_n^{-1/2}$, то, используя формулу (33), асимптотику (21) и лемму 1, 2), получим

$$w_n(S) \leq \exp(T \operatorname{Tr}_n B) \leq \exp\left(C\left[-n\gamma + \sum_{i=1}^n n^{-s}\right]\right).$$

Утверждение теоремы следует теперь из теоремы 3.3.

Покажем, что, в некотором смысле, оценка (31) является точной.

ТЕОРЕМА 3. *Существует оператор $f(t)$, удовлетворяющий условиям (**), такой что индекс неустойчивости соответствующей системы имеет асимптотику*

$$N(\gamma) \sim C\gamma^{-1/s}. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим для простоты, что $\lambda_n = w_n^2 = [n^s]$, где $[\cdot]$ – целая часть. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – собственный базис оператора A , $f(t)e_n = f_n(t)e_n$, $f_n(t) = \cos 2w_n t$. (Легко проверить справедливость условий (**) для $f(t)$.) При таком выборе f система (4) распадается в прямую сумму бесконечного числа одномерных уравнений Матье

$$\ddot{u}_n(t) + \gamma \dot{u}_n(t) + (w_n^2 + \cos 2w_n t)u_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (36)$$

Нам нужно найти число неустойчивых уравнений в семействе (36). Для этого сделаем замену $t' = w_n t$ и обозначим $\varepsilon = 1/w_n$, тогда система (36) примет вид

$$\ddot{u}_n + \varepsilon \gamma \dot{u}_n + (1 + \varepsilon^2 \cos 2t)u_n = 0. \quad (37)$$

Используя метод, изложенный в монографии [13], можно показать, что область неустойчивости (37) имеет вид $\gamma \leq \varepsilon/2 + o(\varepsilon)$. Очевидно, что число решений неравенства

$$\frac{1}{2[n^s]} + o\left(\frac{1}{n^s}\right) \geq \gamma$$

имеет асимптотику $N(\gamma) \sim C\gamma^{-1/s}$. Теорема 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. При $s < 1$ оценки (31) и (35) совпадают, следовательно, при $s < 1$ оценка (31) точна в классе условий (**).

В заключение этого пункта приведем пример системы с бесконечным индексом неустойчивости. Для этого в примере из теоремы 3 положим $f_n(t) = w_n \cos 2w_n t$. Тогда $f(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $f(t + 2\pi) \equiv f(t)$;
- 2) $\|f(t)u\| \leq \|u\|_1$;
- 3) $\|f'(t)u\|_{-1} \leq 2\|u\|_1$.

Аналогом уравнения (37) для этого случая является

$$\ddot{u}_n + \varepsilon \gamma \dot{u}_n + (1 + \varepsilon \cos 2t)u_n = 0.$$

Аналогично доказательству теоремы 3 получаем условие неустойчивости

$$\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{n^s}\right) \geq \gamma.$$

Откуда и следует, что при $\gamma < 1/2$ индекс $N(\gamma) = \infty$.

5. Свойства спектра оператора монодромии и представление Флоке. Известно, что в конечномерном случае любая линейная система с периодическими коэффициентами периодической заменой переменной приводится к автономной, т.е. ее разрешающий оператор допускает разложение

$$\mathcal{U}(t) = P(t) \exp(-tB), \quad P(t+T) = P(t). \quad (38)$$

Следуя [14], будем называть формулу (38), в которой $P(t), B \in L(E, E)$, *представлением Флоке* соответствующей динамической системы.

В бесконечномерном случае, как показал Шеффер (см. [14]), такого разложения, вообще говоря, не существует.

В п. 2 было доказано (теорема 2.5), что сужение $\mathcal{U}_+(t) = \mathcal{U}(t)P_+$ разрешающего оператора задачи (4) на подпространство резонансных решений E_+ допускает разложение (38), поэтому результаты п. 2 можно считать обобщением представления (38) на бесконечномерный случай.

В данном пункте будут сформулированы некоторые условия, обеспечивающие существование у системы

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u + Au + f(t)u &= 0, \\ u|_{t=0} &\in H_1, \quad \partial_t u|_{t=0} \in H \end{aligned} \quad (39)$$

представления Флоке во всем пространстве E . Кроме этого, будет выяснена связь между спектром оператора монодромии задачи (39) и спектром оператора A . Для этого нам понадобится понятие существенного спектра оператора L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит *существенному спектру* $\sigma_{\text{ess}}(L)$ оператора L , если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1) λ – предельная точка $\sigma(L)$;
- 2) $\dim M_\lambda(L) = \infty$, где $M_\lambda(L) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \ker(\lambda - L)^k$;
- 3) область значений $R(\lambda - L)$ не замкнута.

ЛЕММА 1. Пусть A и B – ограниченные операторы с компактной разностью такие, что

- 1) $\text{int } \sigma(A) = \emptyset$;
- 2) каждая компонента $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ содержит точку из $\rho(B)$.

Тогда существенные спектры A и B совпадают.

Относительно доказательства этой леммы см. [16].

ТЕОРЕМА 1. Пусть для любого t операторы A и $f(t)$ перестановочны и $f \subset f^*$, тогда существует ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=0}^\infty$ в H , в котором уравнение (39) имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{u}_n(t) + \lambda_n u_n(t) + f_n(t) u_n(t) &= 0, \\ u_n &= (u, e_n), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим семейство операторов $B(t) = A + f(t)$. Так как A -грань f меньше единицы (согласно условиям (**)), то по теореме Като–Реллиха оператор $B(t)$ самосопряжен при любом t , а так как $[B(t_1), B(t_2)] = 0$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, то по спектральной теореме существует общий собственный базис для операторов $B(t)$. Спроектировав (39) на этот базис, получим (40). Теорема 1 доказана.

Таким образом, если $[A, f] = 0$ и $f \subset f^*$, то вопрос о представлении Флоке решается тривиально. Поэтому в дальнейшем предполагается, что $[A, f] \neq 0$. Сформулируем еще одно достаточное условие.

ТЕОРЕМА 2. Рассмотрим задачу (39) с $f \equiv 0$. Пусть $S_0 = S_0(T)$ – ее оператор монодромии и пусть его резольвентное множество $\rho(S_0)$ связно, тогда для любого f , удовлетворяющего условиям (**), уравнение (39) обладает представлением Флоке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно (см. [15]), для существования представления Флоке необходимо и достаточно, чтобы существовал логарифм из оператора монодромии $S = S_f(T)$. Если в области $\rho(S) \subset \mathbb{C}$ можно соединить 0 и ∞ непрерывным путем, то $\ln S$ можно определить по формуле Коши

$$\ln S = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \ln \lambda (S - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

где Γ – контур, внутренность которого содержит $\sigma(S)$ и не содержит точки 0. Поэтому достаточно доказать связность множества $\rho(S)$. По доказанному в п. 4 оператор $S - S_0$ компактен. Воспользуемся теперь леммой 1. Нетрудно видеть, что при $A = S_0$, $B = S$ все условия леммы выполнены, поэтому $\sigma_{\text{ess}}(S) = \sigma_{\text{ess}}(S_0)$, но

$$\sigma_{\text{ess}}(S_0) \subset \sigma(S_0) = \{\exp(\pm \lambda_k^{1/2})\}_{k=1}^\infty \subset D = \{|z| = 1\},$$

где λ_k обозначают, как обычно, собственные значения оператора A . Таким образом, связность $\rho(S_0)$ означает, что $\sigma_{\text{ess}}(S) \neq D$, а так как по определению σ_{ess} множество $\sigma(S) \setminus \sigma_{\text{ess}}(S)$ состоит из не более чем счетного числа точек, то множество $\rho(S)$ также связно. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы 2 следует, что при выполнении условий (**) существенный спектр оператора монодромии задачи (39) совпадает с существенным спектром оператора монодромии невозмущенной задачи (с $f \equiv 0$). В этом заключено принципиальное отличие от случая условий (*), при выполнении которых для любого замкнутого множества K на единичной окружности и любого A можно построить такое f (даже из класса постоянных, коммутирующих с A операторов), что $\sigma_{\text{ess}}(S_f) = K$.

6. Некоторые приложения. В качестве первого примера рассмотрим линейризованное уравнение поперечных колебаний упругого стержня, продольно сжимаемого периодической силой, которое с учетом диссипации энергии имеет вид (см. [1])

$$\rho F \partial_t^2 u + \gamma \partial_t u + E \partial_x^4 u + \partial_x [\phi(x, t) \partial_x u] = 0. \quad (41)$$

Уравнение (41) рассматривается на отрезке $[0, L]$ с условиями Дирихле на его концах, функция ϕ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\phi \in C^2([0, L] \times \mathbb{R})$;
- 2) $\phi(\cdot, t + T) \equiv \phi(\cdot, t)$.

В этом примере $H = L_2([0, L])$, $A = \partial_x^4 \cdot$, $f(t) = \partial_x [\phi \partial_x \cdot]$. Нетрудно видеть, что f удовлетворяет условиям (11) с $\theta = 1$, а оператор A – условиям (21) с $s = 2$, поэтому согласно формуле (30) индекс неустойчивости системы (41) допускает оценку

$$N(\gamma) \leq C \gamma^{-2.5}.$$

Рассмотрим теперь возмущенное волновое уравнение в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u + \Delta u + \phi(t)u = 0.$$

Предположим, что ϕ удовлетворяет условиям (**) (например, $\phi = \phi(x, t)$ принадлежит $C^1(\Omega \times \mathbb{R})$), тогда при $n > 1$ по формуле (31), используя асимптотику собственных значений оператора Лапласа, получим

$$N(\gamma) \leq C \gamma^{-n}.$$

Причем согласно теореме 4.3 существует ϕ , для которого эта оценка достигается. В случае же, когда $n = 1$, получается следующая оценка:

$$N(\gamma) \leq C \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{\gamma}.$$

Этот результат может быть применен и к нелинейному уравнению типа ‘sine-Гордона’

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u + \Delta u + \beta \sin u = 0.$$

В работе [8] доказано существование аттрактора этого уравнения и на основе оценки коэффициента изменения n -мерных объемов разрешающего оператора линейризованной системы получена асимптотическая оценка его хаусдорфовой размерности

$$\dim_H \mathcal{A} \leq C \gamma^{-2}.$$

Используя более точную оценку (31), получим, что

$$\dim_H \mathcal{A} \leq C \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{\gamma}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [2] Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
- [3] Фомин В. Н. Параметрический резонанс упругих систем с бесконечным числом степеней свободы. I // Вестн. ЛГУ. Матем., мех., астрон. 1965. Т. 13. № 3. С. 73–87.
- [4] Фомин В. Н. Параметрический резонанс упругих систем с бесконечным числом степеней свободы. II // Вестн. ЛГУ. Матем., мех., астрон. 1965. Т. 19. № 4. С. 74–86.
- [5] Дергузов В. И. Об устойчивости решений гамильтоновых уравнений в гильбертовом пространстве с неограниченными периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1963. V. 152. № 6. Р. 1294–1296.
- [6] Фомин В. Н. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.
- [7] Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности // УМН. 1983. Т. 38. № 3. С. 133–137.
- [8] Ghidaglia J. M., Temam R. Attractors for damped nonlinear hyperbolic equations // J. Math. Pures Appl. 1987. V. 66. № 3. Р. 273–319.
- [9] Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
- [10] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. Т. 1. М.: ИЛ, 1962.
- [11] Клемент Ф., Хейманс Х. Однопараметрические полугруппы. М.: Мир, 1992.
- [12] Лионс Ж. Л., Мадженес Е. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Наука, 1965.
- [13] Якубович В. А., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987.
- [14] Schaffer J. J. On Floquet's Theorem in Hilbert spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. V. 70. Р. 243–245.
- [15] Массера Х., Шеффер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970.
- [16] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.