Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ш. Кожегельдинов, Об основных тигановых треугольниках, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 4, 561–569

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1534>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:48:14

УДК 511

ОБ ОСНОВНЫХ ТИАНОВЫХ ТРЕУГОЛЬНИКАХ

С. Ш. Кожегельдинов

Изучаются свойства множества треугольников с целыми сторонами, площадь которых равна квадрату натурального числа.

Библиография: 10 названий.

Рассматриваются основные героновы треугольники, у которых площади выражаются квадратами натуральных чисел.

Тиановым треугольником (ТТ) назовем геронов треугольник (ГТ), площадь которого выражается квадратом натурального числа A .

Тианов треугольник $\langle x, y, z; A^2 \rangle$, где x, y, z – стороны, A^2 – площадь, назовем *основным*, если $(x, y, z) = 1$.

Напомним, что ГТ называется треугольник, стороны и площадь которого выражаются натуральными числами, и что ГТ $\langle x, y, z; S \rangle$, где x, y, z – стороны, S – площадь, называется *основным*, если его стороны взаимно просты.

В [1]–[3] доказано, что каждая из следующих эквивалентных формул:

$$x = \frac{(a+b)(ac^2 - bd^2)}{(ac^2 - bd^2, bd^2(a+b))}, \quad y = \frac{ab(c^2 + d^2)}{(ac^2 - bd^2(a+b))}, \quad (1)$$

$$z = \frac{a^2c^2 + b^2d^2}{(ac^2 - bd^2, bd^2(a+b))}, \quad S = \frac{abcd(a+b)(ac^2 - bd^2)}{(ac^2 - bd^2, bd^2(a+b))^2},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{N}, \quad ac^2 > bd^2, \quad (a, b) = (c, d) = 1;$ (2)

$$x = \frac{(a+b)(bc^2 - ad^2)}{(bc^2 - ad^2, ad^2(a+b))}, \quad y = \frac{b^2c^2 + a^2d^2}{(bc^2 - ad^2(a+b))}, \quad (3)$$

$$z = \frac{ab(c^2 + d^2)}{(bc^2 - ad^2, ad^2(a+b))}, \quad S = \frac{abcd(a+b)(bc^2 - ad^2)}{(bc^2 - ad^2, ad^2(a+b))^2},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{N}, \quad bc^2 > ad^2, \quad (a, b) = (c, d) = 1;$ (4)

$$x = \frac{(a+b)(abc^2 - d^2)}{(abc^2 - d^2, d^2(a+b))}, \quad y = \frac{a(b^2c^2 + d^2)}{(abc^2 - d^2, d^2(a+b))}, \quad (5)$$

$$z = \frac{b(a^2c^2 + d^2)}{(abc^2 - d^2, d^2(a+b))}, \quad S = \frac{abcd(a+b)(abc^2 - d^2)}{(abc^2 - d^2, d^2(a+b))^2},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{N}, \quad abc^2 > d^2, \quad (a, b) = (c, d) = 1;$ (6)

$$\begin{aligned} x &= \frac{(a+b)(c^2 - abd^2)}{(c^2 - abd^2, ab(a+b))}, \quad y = \frac{b(c^2 + a^2d^2)}{(c^2 - abd^2, ab(a+b))}, \\ z &= \frac{a(c^2 + b^2d^2)}{(c^2 - abd^2, ab(a+b))}, \quad S = \frac{abcd(a+b)(c^2 - abd^2)}{(c^2 - abd^2, ab(a+b))^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{где } a, b, c, d \in \mathbb{N}, \quad c^2 > abd^2, \quad (a, b) = (c, d) = 1; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{(ad+bc)(ac-bd)}{((ac-bd)(ad, bc), bd(ad+bc))}, \quad y = \frac{ab(c^2 + d^2)}{((ac-bd)(ad, bc), bd(ad+bc))}, \\ z &= \frac{cd(a^2 + b^2)}{((ac-bd)(ad, bc), bd(ad+bc))}, \quad S = \frac{abcd(ad+bc)(ac-bd)}{((ac-bd)(ad, bc), bd(ad+bc))^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{где } a, b, c, d \in \mathbb{N}, \quad ac > bd, \quad (a, b) = (c, d) = 1; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{(ad+bc)(bd-ac)}{((bd-ac)(ad, bc), ac(ad+bc))}, \quad y = \frac{ab(c^2 + d^2)}{((bd-ac)(ad, bc), ac(ad+bc))}, \\ z &= \frac{cd(a^2 + b^2)}{((bd-ac)(ad, bc), ac(ad+bc))}, \quad S = \frac{abcd(ad+bc)(bd-ac)}{((bd-ac)(ad, bc), ac(ad+bc))^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где } a, b, c, d \in \mathbb{N}, \quad bd > ac, \quad (a, b) = (c, d) = 1; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{(m+n)(q^2 - mn)}{((q^2 - mn)(m, n), mn(m+n))}, \quad y = \frac{n(q^2 + m^2)}{((q^2 - mn)(m, n), mn(m+n))}, \\ z &= \frac{m(q^2 + n^2)}{((q^2 - mn)(m, n), mn(m+n))}, \quad S = \frac{mnq(m+n)(q^2 - mn)}{((q^2 - mn)(m, n), mn(m+n))^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{где } m, n, q \in \mathbb{N}, \quad q^2 > mn, \quad (m, n, q) = 1; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{(m+n)(mn - q^2)}{((mn - q^2)(m, n), q^2(m+n))}, \quad y = \frac{n(m^2 + q^2)}{((mn - q^2)(m, n), q^2(m+n))}, \\ z &= \frac{m(n^2 + q^2)}{((mn - q^2)(m, n), q^2(m+n))}, \quad S = \frac{mnq(m+n)(mn - q^2)}{((mn - q^2)(m, n), q^2(m+n))^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{где } m, n, q \in \mathbb{N}, \quad mn > q^2, \quad (m, n, q) = 1, \quad (16)$$

является общей формулой всех основных ГТ. При этом каждый основной ГТ $\langle x, y, z; S \rangle$ определяется каждым из этих способов однозначно.

Здесь и в дальнейшем для удобства совокупность формул вида (1) будем называть *формулой*.

Задача отыскания общей формулы всех основных (а, следовательно, и всех) ГТ поставлена в 1989 году и опубликована в [4], а также в [5].

Так как вопрос о нахождении общей формулы всех основных ГТ сводится к решению в натуральных числах уравнения $\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = S^2$, где $\alpha, \beta, \gamma, S \in \mathbb{N}$, $(\alpha, \beta, \gamma) = 1$, то вопрос о нахождении общей формулы для всех основных ГТ сводится к решению в натуральных числах диофантова уравнения четвертой степени с четырьмя неизвестными α, β, γ, A :

$$\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = A^4, \quad (17)$$

$$\text{где } \alpha, \beta, \gamma, A \in \mathbb{N}, \quad (\alpha, \beta, \gamma) = 1. \quad (18)$$

Отметим, что если x, y, z – стороны и S – площадь основного ГТ, то $x = \alpha + \beta$, $y = \beta + \gamma$, $z = \gamma + \alpha$, $S = A^2$, где $\alpha, \beta, \gamma, A \in \mathbb{N}$, $(\alpha, \beta, \gamma) = 1$.

Уравнение (17) с условием (18) рассматривается в [6]–[8]. Общее решение этого уравнения в натуральных числах неизвестно. Но в [7] и [8] показано что уравнение (17) с условием (18) имеет бесконечное множество основных решений в натуральных числах α, β, γ, A .

Покажем, что уравнение (17) с условием (18) имеет другие бесконечные множества основных решений в натуральных числах α, β, γ, A .

Действительно, положим

$$\alpha = \frac{2v^2(u^2 - 2v^2)}{(2, u)^3}, \quad \beta = \frac{u^2(u^2 - 2v^2)^2}{(2, u)^3}, \quad (19)$$

$$\gamma = \frac{8u^2v^2(u^2 + 2v^2)}{(2, u)^3}, \quad A = \frac{2uv|u^4 - 4v^4|}{(2, u)^3},$$

$$\text{где } u, v \in \mathbb{N}, \quad (u, v) = 1; \quad (20)$$

$$\alpha = \frac{8u^2v^2(u^2 - 2v^2)}{(2, u)^3}, \quad \beta = \frac{(u^2 - 2v^2)^3}{(2, u)^3}, \quad (21)$$

$$\gamma = \frac{2v^2(u^2 + 2v^2)^2}{(2, u)^3}, \quad A = \frac{2uv(u^4 - 4v^4)}{(2, u)^3},$$

$$\text{где } u, v \in \mathbb{N}, \quad u^2 > 2v^2, \quad (u, v) = 1; \quad (22)$$

$$\alpha = \frac{(2v^2 - u^2)^3}{(2, u)^3}, \quad \beta = \frac{8u^2v^2(2v^2 - u^2)}{(2, u)^3}, \quad (23)$$

$$\gamma = \frac{u^2(u^2 + 2v^2)^2}{(2, u)^3}, \quad A = \frac{2uv(4v^4 - u^4)}{(2, u)^3},$$

$$\text{где } u, v \in \mathbb{N}, \quad 2v^2 > u^2, \quad (u, v) = 1. \quad (24)$$

Непосредственная проверка показывает, что числа (19) с условием (20), числа (21) с условием (22) и числа (23) с условием (24) удовлетворяют уравнению (17) с условием (18). Так как числа α, β, γ , определенные соответственно равенствами (19) с условием (20), равенствами (21) с условием (22) и равенствами (23) с условием (24), будут взаимно простыми, то каждая из формул (19) с условием (20), (21) с условием (22) и (23) с условием (24) является формулой бесконечного множества основных решений уравнения (17) с условием (18).

Так как $x = \alpha + \beta, y = \beta + \gamma, z = \gamma + \alpha, A^4 = \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$, где $\alpha, \beta, \gamma, A \in \mathbb{N}, (\alpha, \beta, \gamma) = 1, x, y, z$ – стороны и A^2 – площадь основного ТТ, то в силу (19) с условием (20), (21) с условием (22) и (23) с условием (24) получаем соответственно формулы:

$$x = \frac{(u^2 + 2v^2)(u^2 - 2v^2)^2}{(2, u)^3}, \quad y = \frac{u^2(u^4 + 4u^2v^2 + 20v^4)}{(2, u)^3}, \quad (25)$$

$$z = \frac{2v^2(5u^4 + 4u^2v^2 + 4v^4)}{(2, u)^3}, \quad A^2 = \left(\frac{2uv|u^4 - 4v^4|}{(2, u)^3} \right)^2,$$

$$\text{где } u, v \in \mathbb{N}, \quad (u, v) = 1; \quad (26)$$

$$x = \frac{(u^2 - 2v^2)(u^2 + 2v^2)^2}{(2, u)^3}, \quad y = \frac{u^2(u^4 - 4u^2v^2 + 20v^4)}{(2, u)^3}, \quad (27)$$

$$z = \frac{2v^2(5u^4 - 4u^2v^2 + 4v^4)}{(2, u)^3}, \quad A^2 = \left(\frac{2uv(u^4 - 4v^4)}{(2, u)^3} \right)^2, \quad (28)$$

$$\text{где } u, v \in \mathbb{N}, \quad u^2 > 2v^2, \quad (u, v) = 1; \quad (28)$$

$$x = \frac{(2v^2 - u^2)(u^2 + 2v^2)^2}{(2, u)^3}, \quad y = \frac{u^2(u^4 - 4u^2v^2 + 20v^4)}{(2, u)^3}, \quad (29)$$

$$z = \frac{2v^2(5u^4 - 4u^2v^2 + 4v^4)}{(2, u)^3}, \quad A^2 = \left(\frac{2uv(4v^4 - u^4)}{(2, u)^3} \right)^2, \quad (30)$$

$$\text{где } u, v \in \mathbb{N}, \quad 2v^2 > u^2, \quad (u, v) = 1, \quad (30)$$

каждая из которых, как и формула в [7]:

$$x = \frac{v^2(2u + 3v)^2(2u^4 + 12u^3v + 26u^2v^2 + 24uv^3 + 9v^4)}{(3, u)^4},$$

$$y = \frac{u^2(u + 2v)^2(u^4 + 8u^3v + 26u^2v^2 + 36uv^3 + 18v^4)}{(3, u)^4}, \quad (31)$$

$$z = \frac{(u^2 + 4uv + 3v^2)^2(u^4 + 4u^3v + 8u^2v^2 + 12uv^3 + 9v^4)}{(3, u)^4},$$

$$A^2 = \frac{(uv(u + 2v)(2u + 3v)(u^2 + 3uv + 3v^2)(u^2 + 4uv + 3v^2))^2}{(3, u)^8},$$

$$\text{где } u, v \in \mathbb{N}, \quad (u, v) = 1, \quad (32)$$

является формулой бесконечного множества основных ТТ. При наличии таких формул нетрудно написать формулы соответствующих множеств любых ТТ.

В [9] приведены следующие формулы:

$$x = k \frac{|u^2 \pm 2v^2|(u^2 \mp 2v^2)^2}{(2, u)^3}, \quad y = k \frac{u^2(u^4 \pm 4u^2v^2 + 20v^4)}{(2, u)^3}, \quad (33)$$

$$z = k \frac{2v^2(5u^4 \pm 4u^2v^2 + 4v^4)}{(2, u)^3}, \quad A^2 = \left(k \frac{2uv|u^4 - 4v^4|}{(2, u)^3} \right)^2, \quad (34)$$

$$\text{где } k, u, v \in \mathbb{N}, \quad (u, v) = 1, \quad (34)$$

с верхним и нижним вариантами знаков. Каждая из этих формул является формулой бесконечного множества ТТ. При $k = 1$ из формул (33) с условием (34) получаются формулы (25) с условием (26), (27) с условием (28) и (29) с условием (30). Обратно, совокупность формул (25) с условием (26), (27) с условием (28) и (29) с условием (30) можно написать в виде формул (33) с условием (34), где $k = 1$.

Формула (25) с условием (26) получается также

а) из формулы (1) с условием (2) при

$$a = \frac{2v^2}{(2, u)}, \quad b = \frac{u^2}{(2, u)}, \quad c = \frac{u^2 + 2v^2}{(2, u)}, \quad d = \frac{4v^2}{(2, u)},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $(u, v) = 1$;

б) из формулы (3) с условием (4) при

$$a = \frac{2v^2}{(2, u)}, \quad b = \frac{u^2}{(2, u)}, \quad c = \frac{u^2 + 2v^2}{(2, u)}, \quad d = \frac{2v^2}{(2, u)},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $(u, v) = 1$;

в) из формулы (5) с условием (6) при

$$a = \frac{2v^2}{(2, u)}, \quad b = \frac{u^2}{(2, u)}, \quad c = \frac{u^2 + 2v^2}{(2, u)}, \quad d = \frac{4u^2v^2}{(2, u)^2},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $(u, v) = 1$;

г) из формулы (7) с условием (8) при

$$a = \frac{2v^2}{(2, u)}, \quad b = \frac{u^2}{(2, u)}, \quad c = \frac{u^2 + 2v^2}{(2, u)}, \quad d = 2,$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $(u, v) = 1$;

д) из формулы (9) с условием (10) при

$$a = \frac{u^2 + 2v^2}{(2, u)}, \quad b = \frac{2u^2}{(2, u)}, \quad c = \frac{u^2 + 2v^2}{(2, u)}, \quad d = \frac{4v^2}{(2, u)},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $(u, v) = 1$;

е) из формулы (11) с условием (12) при

$$a = \frac{2u^2}{(2, u)}, \quad b = \frac{u^2 + 2v^2}{(2, u)}, \quad c = \frac{4v^2}{(2, u)}, \quad d = \frac{u^2 + 2v^2}{(2, u)},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $(u, v) = 1$;

ж) из формулы (13) с условием (14) при

$$m = \frac{4v^2}{(2, u)}, \quad n = \frac{2u^2}{(2, u)}, \quad q = \frac{u^2 + 2v^2}{(2, u)},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $(u, v) = 1$;

з) из формулы (15) с условием (16) при

$$m = \frac{u^2(u^2 + 2v^2)}{(2, u)^2}, \quad n = \frac{2v^2(u^2 + 2v^2)}{(2, u)^2}, \quad q = \frac{4u^2v^2}{(2, u)^2},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $(u, v) = 1$.

Формула (27) с условием (28) получается также

а) из формулы (1) с условием (2) при

$$a = \frac{8u^2v^2}{(2, u)^2}, \quad b = \frac{(u^2 - 2v^2)^2}{(2, u)^2}, \quad c = \frac{u^2 - 2v^2}{(2, u)}, \quad d = \frac{4v^2}{(2, u)},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $u^2 > 2v^2$, $(u, v) = 1$;

б) из формулы (3) с условием (4) при

$$a = \frac{8u^2v^2}{(2, u)^2}, \quad b = \frac{(u^2 - 2v^2)^2}{(2, u)^2}, \quad c = \frac{2u^2}{(2, u)}, \quad d = \frac{u^2 - 2v^2}{(2, u)},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $u^2 > 2v^2$, $(u, v) = 1$;

в) из формулы (5) с условием (6) при

$$a = \frac{8u^2v^2}{(2, u)^2}, \quad b = \frac{(u^2 - 2v^2)^2}{(2, u)^2}, \quad c = 1, \quad d = \frac{4v^2(u^2 - 2v^2)}{(2, u)^2},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $u^2 > 2v^2$, $(u, v) = 1$;

г) из формулы (7) с условием (8) при

$$a = \frac{8u^2v^2}{(2, u)^2}, \quad b = \frac{(u^2 - 2v^2)^2}{(2, u)^2}, \quad c = \frac{2u^2(u^2 - 2v^2)}{(2, u)^2}, \quad d = 1,$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $u^2 > 2v^2$, $(u, v) = 1$;

д) из формулы (9) с условием (10) при

$$a = \frac{2u^2}{(2, u)}, \quad b = \frac{u^2 - 2v^2}{(2, u)}, \quad c = \frac{u^2 - 2v^2}{(2, u)}, \quad d = \frac{4v^2}{(2, u)},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $u^2 > 2v^2$, $(u, v) = 1$;

е) из формулы (11) с условием (12) при

$$a = \frac{u^2 - 2v^2}{(2, u)}, \quad b = \frac{2u^2}{(2, u)}, \quad c = \frac{4v^2}{(2, u)}, \quad d = \frac{u^2 - 2v^2}{(2, u)},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $u^2 > 2v^2$, $(u, v) = 1$;

ж) из формулы (13) с условием (14) при

$$m = \frac{8u^2v^2}{(2, u)^2}, \quad n = \frac{(u^2 - 2v^2)^2}{(2, u)^2}, \quad q = \frac{2u^2(u^2 - 2v^2)}{(2, u)^2},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $u^2 > 2v^2$, $(u, v) = 1$;

з) из формулы (15) с условием (16) при

$$m = \frac{(u^2 - 2v^2)^2}{(2, u)^2}, \quad n = \frac{8u^2v^2}{(2, u)^2}, \quad q = \frac{4v^2(u^2 - 2v^2)}{(2, u)^2},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $u^2 > 2v^2$, $(u, v) = 1$.

Формула (29) с условием (30) получается также:

а) из формулы (1) с условием (2) при

$$a = \frac{(2v^2 - u^2)^2}{(2, u)^2}, \quad b = \frac{8u^2v^2}{(2, u)^2}, \quad c = \frac{4v^2}{(2, u)}, \quad d = \frac{2v^2 - u^2}{(2, u)},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $2v^2 > u^2$, $(u, v) = 1$;

б) из формулы (3) с условием (4) при

$$a = \frac{(2v^2 - u^2)^2}{(2, u)^2}, \quad b = \frac{8u^2v^2}{(2, u)^2}, \quad c = \frac{2v^2 - u^2}{(2, u)}, \quad d = \frac{2u^2}{(2, u)},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $2v^2 > u^2$, $(u, v) = 1$;

в) из формулы (5) с условием (6) при

$$a = \frac{(2v^2 - u^2)^2}{(2, u)^2}, \quad b = \frac{8u^2v^2}{(2, u)^2}, \quad c = 1, \quad d = \frac{2u^2(2v^2 - u^2)}{(2, u)^2},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $2v^2 > u^2$, $(u, v) = 1$;

г) из формулы (7) с условием (8) при

$$a = \frac{(2v^2 - u^2)^2}{(2, u)^2}, \quad b = \frac{8u^2v^2}{(2, u)^2}, \quad c = \frac{4v^2(2v^2 - u^2)}{(2, u)^2}, \quad d = 1,$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $2v^2 > u^2$, $(u, v) = 1$;

д) из формулы (9) с условием (10) при

$$a = \frac{2v^2 - u^2}{(2, u)}, \quad b = \frac{2u^2}{(2, u)}, \quad c = \frac{4v^2}{(2, u)}, \quad d = \frac{2v^2 - u^2}{(2, u)},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $2v^2 > u^2$, $(u, v) = 1$;

е) из формулы (11) с условием (12) при

$$a = \frac{2u^2}{(2, u)}, \quad b = \frac{2v^2 - u^2}{(2, u)}, \quad c = \frac{2v^2 - u^2}{(2, u)}, \quad d = \frac{4v^2}{(2, u)},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $2v^2 > u^2$, $(u, v) = 1$;

ж) из формулы (13) с условием (14) при

$$m = \frac{(2v^2 - u^2)^2}{(2, u)^2}, \quad n = \frac{8u^2v^2}{(2, u)^2}, \quad q = \frac{4v^2(2v^2 - u^2)}{(2, u)^2},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $2v^2 > u^2$, $(u, v) = 1$;

з) из формулы (15) с условием (16) при

$$m = \frac{8u^2v^2}{(2, u)^2}, \quad n = \frac{(2v^2 - u^2)^2}{(2, u)^2}, \quad q = \frac{2u^2(2v^2 - u^2)}{(2, u)^2},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $2v^2 > u^2$, $(u, v) = 1$.

Наконец, формула (31) с условием (32) получается также

а) из формулы (1) с условием (2) при

$$a = \frac{(u^2 + 4uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2}, \quad b = \frac{(u^2 + 2uv)^2}{(3, u)^2},$$

$$c = \frac{(u^2 + 3uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2}, \quad d = \frac{(u^2 + 4uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $(u, v) = 1$;

б) из формулы (3) с условием (4) при

$$a = \frac{(u^2 + 4uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2}, \quad b = \frac{(u^2 + 2uv)^2}{(3, u)^2},$$

$$c = \frac{(u^2 + 3uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2}, \quad d = \frac{(u^2 + 2uv)^2}{(3, u)^2},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $(u, v) = 1$;

в) из формулы (5) с условием (6) при

$$a = \frac{(u^2 + 4uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2}, \quad b = \frac{(u^2 + 2uv)^2}{(3, u)^2},$$

$$c = \frac{(u^2 + 3uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2}, \quad d = \frac{(u^2 + 2uv)^2(u^2 + 4uv + 3v^2)^2}{(3, u)^4},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $(u, v) = 1$;

г) из формулы (7) с условием (8) при

$$a = \frac{(u^2 + 4uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2}, \quad b = \frac{(u^2 + 2uv)^2}{(3, u)^2}, \quad c = \frac{(u^2 + 3uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2}, \quad d = 1,$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $(u, v) = 1$;

д) из формулы (9) с условием (10) при

$$a = \frac{(u^2 + 3uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2}, \quad b = \frac{(2uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2},$$

$$c = \frac{(u^2 + 3uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2}, \quad d = \frac{(u^2 + 4uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $(u, v) = 1$;

е) из формулы (11) с условием (12) при

$$a = \frac{(2uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2}, \quad b = \frac{(u^2 + 3uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2},$$

$$c = \frac{(u^2 + 4uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2}, \quad d = \frac{(u^2 + 3uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $(u, v) = 1$;

ж) из формулы (13) с условием (14) при

$$m = \frac{(u^2 + 4uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2}, \quad n = \frac{(2uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2}, \quad q = \frac{(u^2 + 3uv + 3v^2)^2}{(3, u)^2},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $(u, v) = 1$;

з) из формулы (15) с условием (16) при

$$m = \frac{(2uv + 3v^2)^2(u^2 + 3uv + 3v^2)^2}{(3, u)^4}, \quad n = \frac{(u^2 + 3uv + 3v^2)^2(u^2 + 4uv + 3v^2)^2}{(3, u)^4},$$

$$q = \frac{(2uv + 3v^2)^2(u^2 + 4uv + 3v^2)^2}{(3, u)^4},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $(u, v) = 1$.

С помощью формул (25) с условием (26), (27) с условием (28), (29) с условием (30) и (31) с условием (32) или, что то же самое, с помощью формул (31) с условием (32) и (33) с условием (34) можно найти бесконечное множество основных ТТ. Бесконечное множество основных ТТ можно находить и с помощью формул, приведенных в [5] и [10].

Хотя известно значительное число основных ТТ, не существует общей формулы, описывающей все эти треугольники, т.е. вопрос о параметризации всех основных ТТ остается открытым.

Семипалатинский педагогический институт
им. Шакарима

Поступило
21.03.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кожегельдинов С. Ш. Об основных героновых треугольниках // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 2. С. 72–79.
- [2] Кожегельдинов С. Ш. Отыскание основных героновых треугольников (ГТ) // Изв. АН Республики Казахстан. Сер. физ.-матем. 1992. № 3. С. 48–51.
- [3] Кожегельдинов С. Ш. Параметризация героновых треугольников со взаимно простыми сторонами // Межвузовская конференция, посвященная 70-летию со дня рождения проф. Т. И. Аманова. Тезисы докл. Семипалатинск: Семипалатинский пединститут им. Шакарима, 1993. С. 21–23.
- [4] Кожегельдинов С. Ш. Проблема 20. Препринт АН БССР № 35. Минск, 1990.
- [5] Melter R. A. Problem 6628 // Amer. Math. Monthly. 1990. V. 97. № 4. P. 350; 1991. V. 98. № 8. P. 772–774.
- [6] Bradis V. M., Sicikov A. F. Despre triunghiurile heronice // Gazeta matematica si fizica. Ser. A. 1959. V. 2(64). № 6. P. 325–334.
- [7] Кожегельдинов С. Ш. К вопросу о тиановых треугольниках // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 5. С. 155–157.
- [8] Кожегельдинов С. Ш. Общие формулы героновых треугольников и их частные случаи // Деп. ВИНТИ. № 3385-В90.
- [9] Кожегельдинов С. Ш. Об основных тиановых треугольниках // Международная конференция “Современные проблемы теории чисел”. Тезисы докл. Тула, 1993. С. 82.
- [10] Vidav J. Heronovi trikotniki in diofantske enacbe // Obzornik mat. fiz. 1991. V. 38. № 1. P. 1–7.