Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Конягин, О возвращаемости интеграла нечетной условнопериодической функции, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 4, 570–577

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1535>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:57:11

УДК 517

О ВОЗВРАЩАЕМОСТИ ИНТЕГРАЛА НЕЧЕТНОЙ УСЛОВНОПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

С. В. Конягин

Доказана возвращаемость интеграла достаточно гладкой нечетной условнопериодической функции с нулевым средним и несоизмеримым набором частот. При этом указаны оценки снизу и сверху на гладкость, гарантирующую возвращаемость.

Библиография: 12 названий.

Введение. В настоящей работе рассматривается поведение интеграла

$$I(t) = \int_0^t f(\omega_1 s, \dots, \omega_d s) ds,$$

где функция $f(x_1, \dots, x_d)$ непрерывна на торе $\mathbb{T}^d$,

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(x_1, \dots, x_d) dx = 0, \quad (1)$$

а частоты $\omega_1, \dots, \omega_d \in \mathbb{R}$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Этот интеграл ввел в рассмотрение А. Пуанкаре [1] при анализе возмущений в небесной механике. Согласно гипотезе В. В. Козлова при достаточной гладкости функции f интеграл $I(t)$ возвращается, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall T > 0 \quad \exists t > T : \quad |I(t)| < \varepsilon.$$

В случае $d = 2$ возвращаемость имеет место для всех несоизмеримых частот ω_1, ω_2 при условии абсолютной непрерывности функции f (см. [2], а также [3, гл. 8]). При $d = 3$ гипотеза В. В. Козлова доказана Н. Г. Мошевитиным [4], возвращаемость имеет место для $f \in C^{28}(\mathbb{T}^3)$. В то же время, в [1], [3] построен пример непрерывной функции $f(x_1, x_2)$ и набора частот $\omega_1 = 1, \omega_2 = \sqrt{2}$ таких, что соответствующий интеграл $I(t)$ стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Н. Г. Мошевитин [5] для произвольного $d \geq 2$ построил пример невозвращаемости с $f \in C^{d-2}(\mathbb{T}^d)$. В общем случае для бесконечно дифференцируемых или аналитических f гипотеза В. В. Козлова пока не доказана и не опровергнута. Некоторые результаты в этом направлении имеются в [6]–[12].

В данной работе мы ограничиваемся нечетными функциями f . Мы докажем следующие теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96–01–00378.

ТЕОРЕМА 1. При $d \geq 3$, $m = 3d \cdot 2^{d-1}$, $f \in C^m(\mathbb{T}^d)$, $f(-x) = -f(x)$, возвращаемость имеет место.

ТЕОРЕМА 2. При $d \geq 4$,

$$m = \left\lceil \frac{2^{d-1}(d-2)^{d-2}}{(d-1)^{d-1}} \right\rceil - 1$$

существуют функция $f \in C^m(\mathbb{T}^d)$, $f(-x) = -f(x)$, и частоты $\omega_1, \dots, \omega_d$ такие, что $I(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

(Квадратные скобки обозначают целую часть.)

Заметим, что число m в теореме 2 имеет порядок $2^d/d$, причем при $d \geq 9$ справедливо неравенство $m > d - 2$, т.е. теорема 2 показывает возможность невозвращаемости при большей гладкости на функцию, чем в [5].

Размерность d мы считаем фиксированной, так что положительные константы в порядковых неравенствах ' $\ll$ ', ' $\gg$ ' и ' $\asymp$ ' могут зависеть от d , а при доказательстве теоремы 1, кроме того, от f и $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbb{R}^d$. Через $\|x\|$ будем обозначать расстояние от действительного числа x до ближайшего целого. Всюду ниже $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, $|k| = \max(|k_1|, \dots, |k_d|)$ – норма вектора k .

1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Мы считаем, что функция f удовлетворяет условию (1) и требованиям теоремы 1, а $\omega_1, \dots, \omega_d$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Рассмотрим разложение f в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_k b_k \sin \langle k, x \rangle.$$

При этом мы будем считать, что $b_k = 0$ при $\langle k, \omega \rangle \leq 0$; мы вправе это делать в силу линейной независимости $\omega_1, \dots, \omega_d$. Положим $r = m - d/2 > 0$.

ЛЕММА 1. При $T \rightarrow \infty$

$$T \sum_{|k| > T^{1/r}} |b_k| \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из непрерывности $\partial^m f / \partial x_j^m$ ($j = 1, \dots, d$) следует, что

$$\sum_k |k_j|^{2m} |b_k|^2 < \infty.$$

Значит,

$$\sum_k |k|^{2m} |b_k|^2 < \infty,$$

т.е.

$$\sum_{|k| > K} |k|^{2m} |b_k|^2 \rightarrow 0 \quad (K \rightarrow \infty). \quad (2)$$

Положим $K = T^{1/r}$. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\left(\sum_{|k| > K} |b_k| \right)^2 \leq \sum_{|k| > K} |k|^{2m} |b_k|^2 \sum_{|k| > K} |k|^{-2m}. \quad (3)$$

Далее,

$$\sum_{|k| > K} |k|^{-2m} = \sum_{l > K} \sum_{|k|=l} l^{-2m} \ll \sum_{l > K} l^{d-1-2m} \ll K^{d-2m}.$$

Отсюда, из (2) и (3) вытекает утверждение леммы.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и, считая T достаточно большим числом (т.е. $T > T(\varepsilon, f, \omega)$), мы построим $t = t(T, \varepsilon, f, \omega)$ такое, что $|I(t)| < \varepsilon$ и $t \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow \infty$). Положим $\delta = 1/(3 \cdot 2^d)$, $\Delta = T^{d/r}$, $\Gamma = \Delta^{-1-\delta}$. Определим набор чисел $\Gamma_{d-j} = \Gamma^{3 \cdot 2^j - 2}$ ($j = 0, 1, \dots, d$). Заметим, что

$$\Gamma_0 > T^{-2}. \quad (4)$$

В самом деле, $\Gamma_0 = T^{-a}$, где

$$a = \frac{(1+\delta)(3 \cdot 2^d - 2)d}{r} = \frac{2(1+\delta)(3 \cdot 2^d - 2)}{(3 \cdot 2^d - 1)} < 2.$$

Пусть

$$\gamma_1 = \min_{0 < |k| \leq K} |\langle k, \omega \rangle|,$$

тогда $\gamma_1 > 0$ в силу линейной независимости $\omega_1, \dots, \omega_d$ над $\mathbb{Z}$. Выберем такое $k^{(1)}$, что $0 < |k^{(1)}| \leq K$ и $\langle k^{(1)}, \omega \rangle = \gamma_1$. Предположим, что $j \in \{2, \dots, d\}$ и векторы $k^{(1)}, \dots, k^{(j-1)}$ уже построены. Среди всех линейно независимых от них векторов k таких, что $|k| \leq K$, выберем такой вектор $k^{(j)}$, что величина $\langle k, \omega \rangle$ положительна и принимает наименьшее возможное значение, которое мы обозначим через γ_j . Таким образом, мы определили линейно независимые векторы $k^{(1)}, \dots, k^{(d)}$ и числа $\gamma_1, \dots, \gamma_d$, причем

$$0 < \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_d \leq \max_j |\omega_j|. \quad (5)$$

Последнее неравенство в (5) следует из того, что при некотором j базисный вектор k , у которого j -я координата равна 1, а остальные – нулю, не является линейной комбинацией векторов $k^{(1)}, \dots, k^{(d-1)}$ и, значит, $\gamma_d \leq |\omega_j|$. Положим также $\gamma_0 = 1/T^2$, $\gamma_{d+1} = +\infty$.

Так как все координаты векторов $k^{(1)}, \dots, k^{(d)}$ по модулю не превосходят K , то определитель Δ_0 матрицы, составленной из этих векторов, удовлетворяет неравенству $0 < |\Delta_0| \ll \Delta$. Следующая лемма немедленно вытекает из правила Крамера и определения чисел γ_j .

ЛЕММА 2. Пусть $|k| \leq K$ и $|\langle k, \omega \rangle| < \gamma_{l+1}$ при некотором $l \in \{1, \dots, d\}$. Тогда найдутся зависящие от k целые числа $\Delta_1, \dots, \Delta_l$ такие, что

$$\Delta_0 k = \sum_{j=1}^l \Delta_j k^{(j)}, \quad |\Delta_j| \ll \Delta \quad (j = 1, \dots, l). \quad (6)$$

Применяя лемму 2 для вектора $(1, 0, \dots, 0)$, мы имеем

$$\omega_1 = \sum_{j=1}^d \Delta_j \gamma_j,$$

откуда и из (5) получаем

$$\gamma_d \gg \Delta^{-1}. \quad (7)$$

Выберем теперь максимальное $n \in \{0, \dots, d\}$ такое, что $\gamma_n < \Gamma_n$. Такое n существует, так как ввиду (4) $\gamma_0 < \Gamma_0$; с другой стороны, (7) показывает, что $n < d$. По определению l справедливы неравенства

$$\gamma_n < \Gamma_n, \quad \gamma_{n+1} \geq \Gamma_{n+1}, \quad \dots, \quad \gamma_d \geq \Gamma_d. \quad (8)$$

Положим $N_0 = [(\Delta\Gamma)^{-1/2}]$ (напомним, что квадратные скобки обозначают целую часть), тогда

$$N_0 \rightarrow \infty \quad (T \rightarrow \infty). \quad (9)$$

Заметим, что в силу (5) все числа $\sqrt{\gamma_j}\Gamma$ ($j = 1, \dots, d$) меньше 1. По принципу Дирихле найдется такое натуральное N , что

$$\left\| \frac{N_0 N \gamma_j}{\gamma_d} \right\| \leq \sqrt{\gamma_j} \Gamma \quad (j = n+1, \dots, d-1) \quad (10)$$

и

$$N \ll \prod_{j=n+1}^{d-1} (\sqrt{\gamma_j} \Gamma)^{-1}. \quad (11)$$

Обозначим $t_0 = N_0 N / \gamma_d$, тогда (10) переписывается в виде

$$\|t_0 \langle k^{(j)}, \omega \rangle\| \leq \sqrt{\gamma_j} \Gamma \quad (j = n+1, \dots, d), \quad (12)$$

а из (11) и (8) следует, что

$$t_0 \ll N_0 (\Gamma_d)^{-1} \prod_{j=n+1}^{d-1} (\sqrt{\Gamma_j} \Gamma)^{-1} = N_0 \Gamma \Gamma_n^{-1/2}. \quad (13)$$

Положим $t = 2\pi |\Delta_0| t_0$, тогда в силу (5) и (9) $t \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$, и нам осталось проверить, что $|I(t)| < \varepsilon$.

Мы имеем

$$|I(t)| \leq \sum_k |b_k| \frac{1 - \cos(t \langle k, \omega \rangle)}{\langle k, \omega \rangle} \quad (14)$$

(напомним, что $|b_k| \neq 0$ только в случае $\langle k, \omega \rangle > 0$). Сумму в (14) мы будем оценивать отдельно для $k \in (I)$, $k \in (II)$ и $k \in (III)$, где $(I) = \{k : |k| \leq K, 0 < \langle k, \omega \rangle < \gamma_{n+1}\}$, $(II) = \{k : |k| \leq K, \langle k, \omega \rangle \geq \gamma_{n+1}\}$, $(III) = \{k : |k| > K\}$.

Пусть $k \in (I)$, тогда при некотором $l \in \{1, \dots, n\}$ справедливо неравенство

$$\gamma_l \leq \langle k, \omega \rangle < \gamma_{l+1}.$$

Представив $\Delta_0 k$ в виде (6), мы получим

$$\left| \frac{t \langle k, \omega \rangle}{2\pi} \right| = \left| t_0 \sum_{j=1}^l \Delta_j \langle k^{(j)}, \omega \rangle \right| \ll \Delta t_0 \sum_{j=1}^l \gamma_j \ll \Delta t_0 \gamma_l,$$

откуда в силу (5) и (8)

$$\frac{1 - \cos(t\langle k, \omega \rangle)}{\langle k, \omega \rangle} \ll \frac{(\Delta t_0 \gamma_l)^2}{\gamma_l} < (\Delta t_0)^2 \Gamma_n. \quad (15)$$

Подставляя в последнее неравенство оценку (13), получаем

$$\frac{1 - \cos(t\langle k, \omega \rangle)}{\langle k, \omega \rangle} \ll (N_0 \Gamma \Delta)^2 \leq N_0^{-2}.$$

Пусть теперь $k \in (II)$. Вновь выберем такое l , что $\gamma_l \leq \langle k, \omega \rangle < \gamma_{l+1}$, при этом $l \in \{n+1, \dots, d\}$. Снова пользуясь представлением (6), имеем

$$\left\| \frac{t\langle k, \omega \rangle}{2\pi} \right\| = \left\| t_0 \sum_{j=1}^l \Delta_j \langle k^{(j)}, \omega \rangle \right\| \leq \sum_{j=1}^l \Delta_j \|t_0 \langle k^{(j)}, \omega \rangle\|$$

и, далее, в силу (6), (12) и (5)

$$\begin{aligned} \left\| \frac{t\langle k, \omega \rangle}{2\pi} \right\| &\ll \Delta \sum_{j=1}^n t_0 \gamma_j + \Delta \sum_{j=n+1}^l \sqrt{\gamma_j} \Gamma \ll \Delta t_0 \gamma_n + \Delta \sqrt{\gamma_l} \Gamma, \\ 1 - \cos(t\langle k, \omega \rangle) &\ll (\Delta t_0 \gamma_n)^2 + \Delta^2 \gamma_l \Gamma^2. \end{aligned}$$

Значит,

$$\frac{1 - \cos(t\langle k, \omega \rangle)}{\langle k, \omega \rangle} \ll \frac{(\Delta t_0 \gamma_n)^2}{\gamma_l} + \Delta^2 \Gamma^2 < (\Delta t_0)^2 \Gamma_n + \Delta^2 \Gamma^2. \quad (16)$$

Первое слагаемое в правой части (16), совпадающее с правой частью (15), было оценено при разборе первого случая, а второе не превосходит N_0^{-4} . Следовательно,

$$\frac{1 - \cos(t\langle k, \omega \rangle)}{\langle k, \omega \rangle} \ll N_0^{-2}.$$

С учетом (9) мы выводим, что при достаточно большом T суммарный вклад $k \in (I)$ и $k \in (II)$ не превосходит

$$\sum_{k \in (I) \cup (II)} |b_k| \frac{1 - \cos(t\langle k, \omega \rangle)}{\langle k, \omega \rangle} \ll \sum_k |b_k| N_0^{-2} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (17)$$

При рассмотрении $k \in (III)$ каждое слагаемое в (14) оценим тривиально

$$\frac{1 - \cos(t\langle k, \omega \rangle)}{\langle k, \omega \rangle} = \int_0^t \sin(s\langle k, \omega \rangle) ds \leq T. \quad (18)$$

Заметим, что в силу (13) и (4)

$$t \ll N_0 \Delta \Gamma \Gamma_n^{-1/2} \leq N_0 \Delta \Gamma \Gamma_0^{-1/2} \leq N_0 \Delta \Gamma T,$$

поэтому при достаточно большом T справедливо неравенство $t \leq T$ и по лемме 1

$$\sum_{k \in (III)} |b_k| < \frac{\varepsilon}{2T}.$$

Отсюда и из (18) вытекает, что

$$\sum_{k \in (III)} |b_k| \frac{1 - \cos(t\langle k, \omega \rangle)}{\langle k, \omega \rangle} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Складывая полученное неравенство с (17), мы получаем (14). Теорема 1 доказана.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сначала определим частоты $\omega_1, \dots, \omega_d$ и проверим, что они линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Положим

$$\lambda = \frac{2d-4}{d-1} > 1, \quad \omega_d = 1, \quad \omega_j = \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-[\lambda^{(d-1)l+j}]} \quad (j = 1, \dots, d-1).$$

Допустим, что частоты линейно зависимы над $\mathbb{Z}$, тогда некоторая нетривиальная целочисленная комбинация чисел $\omega_1, \dots, \omega_{d-1}$ равна целому числу a , и мы имеем представление

$$a = \sum_{l=1}^{\infty} N_l 2^{-[\lambda^l]},$$

причем целочисленная последовательность $\{N_l\}$ равномерно ограничена и содержит бесконечно много ненулевых членов. Выберем такие натуральные числа M и n_0 , что $\max_l |N_l| \leq 2^M - 2$ и $[\lambda^{l+1}] - [\lambda^l] \geq M$ при $l \geq n_0$. Пусть $n \geq n_0$, тогда число

$$b_n = 2^{[\lambda^n]} a - \sum_{l=1}^n N_l 2^{[\lambda^n] - [\lambda^l]}$$

является целым. С другой стороны,

$$|b_n| \leq \sum_{l=n+1}^{\infty} |N_l| 2^{[\lambda^n] - [\lambda^l]} \leq \sum_{l=n+1}^{\infty} (2^M - 2) 2^{-(l-n)M} < 1,$$

т.е. $b_n = 0$; стало быть, при $n \geq n_0$

$$N_{n+1} = 2^{[\lambda^{n+1}] - [\lambda^n]} b_n - b_{n+1} = 0,$$

что невозможно.

Так как число

$$\mu = \frac{2^{d-1}(d-2)^{d-2}}{(d-1)^{d-1}} - 1$$

не целое, то можно найти такое ε , что

$$0 < \varepsilon < \mu - m. \quad (19)$$

Обозначим

$$A_{j,n} = 2^{[\lambda^{(d-1)n+j}]}, \quad B_{j,n} = \sum_{l=0}^n 2^{[\lambda^{(d-1)n+j}] - [\lambda^{(d-1)l+j}]} \\ (j = 1, \dots, d-1, \quad n = 0, 1, \dots),$$

тогда $A_{j,n} \asymp B_{j,n}$. Теперь мы готовы определить функцию f :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{d-1} \sum_{n=1}^{\infty} A_{j,n}^{-m-\varepsilon} \sin(A_{j,n} x_j - B_{j,n} x_d).$$

Взяв любую производную порядка не выше m от ряда Фурье функции f , мы получим ряд вида

$$\sum_{j=1}^{d-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_{j,n} \sin(A_{j,n} x_j - B_{j,n} x_d + \theta_{j,n}), \quad (20)$$

где $|c_{j,n}| \leq A_{j,n}^{-m-\varepsilon} (A_{j,n} + B_{j,n})^m \ll A_{j,n}^{-\varepsilon}$. Из последней оценки следует, что ряд (20) абсолютно сходится, и, значит, $f \in C^m(\mathbb{T}^d)$.

Для $j = 1, \dots, d-1$, $n = 0, 1, \dots$ обозначим

$$\gamma_{j,n} = A_{j,n} \omega_j - B_{j,n} \omega_d = \sum_{l=n+1}^{\infty} 2^{[\lambda^{(d-1)n+j}] - [\lambda^{(d-1)l+j}]}.$$

Для $n \geq 1$ мы полагаем также $\gamma_{0,n} = \gamma_{d-1,n-1}$. Справедливы соотношения

$$\gamma_{j,n} > 0, \quad \gamma_{j,n} \asymp A_{j,n}^{1-\lambda^{d-1}}, \quad (21)$$

$$\gamma_{j-1,n} \asymp A_{j,n}^{1-\lambda^{d-2}}. \quad (22)$$

Представим $I(t)$ в виде суммы

$$I(t) = \sum_{j=1}^{d-1} \sum_{n=1}^{\infty} A_{j,n}^{-m-\varepsilon} \frac{1 - \cos(t\gamma_{j,n})}{\gamma_{j,n}}. \quad (23)$$

Поскольку все слагаемые в (23) неотрицательны, то для доказательства теоремы нам достаточно “выловить” в этой сумме одно большое слагаемое. Пусть $t > \gamma_{1,0}^{-1}$, тогда найдутся такие $j \in \{1, \dots, d-1\}$ и $n \in \{0, 1, \dots\}$, что $\gamma_{j-1,n}^{-1} < t \leq \gamma_{j,n}^{-1}$. Мы имеем

$$A_{j,n}^{-m-\varepsilon} \frac{1 - \cos(t\gamma_{j,n})}{\gamma_{j,n}} \asymp A_{j,n}^{-m-\varepsilon} \frac{(t\gamma_{j,n})^2}{\gamma_{j,n}} \geq A_{j,n}^{-m-\varepsilon} \gamma_{j-1,n}^{-2} \gamma_{j,n}.$$

Подставляя оценки (21) и (22), получаем

$$A_{j,n}^{-m-\varepsilon} \frac{1 - \cos(t\gamma_{j,n})}{\gamma_{j,n}} \gg A_{j,n}^{1+2\lambda^{d-2}-\lambda^{d-1}-m-\varepsilon} = A_{j,n}^{\mu-m-\varepsilon}. \quad (24)$$

В силу (19) правая часть (24) стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$, поэтому и $I(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$). Теорема доказана.

Автор благодарит В. В. Козлова и Н. Г. Мошевитина за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.–Л.: Гостехиздат, 1947.
- [2] Сидоров Е. А. Об условиях равномерной устойчивости по Пуассону цилиндрических систем // УМН. 1979. Т. 34. № 6. С. 184–188.
- [3] Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980.
- [4] Мошевитин Н. Г. О возвращаемости интеграла гладкой трехчастотной условнопериодической функции // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 723–735.
- [5] Мошевитин Н. Г. О невозвращаемости интеграла условнопериодической функции // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 6. С. 138–140.
- [6] Спринджук В. Г. Асимптотическое поведение интегралов от квазипериодических функций // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 6. С. 862–868.
- [7] Спринджук В. Г. Квазипериодические функции с неограниченным неопределенным интегралом // Докл. АН БССР. 1968. Т. 12. № 1. С. 5–8.
- [8] Peck L. G. On uniform distribution of algebraic numbers // Proc. Amer. Math. Soc. 1953. V. 4. № 1. P. 440–443.
- [9] Мошевитин Н. Г. Финальные свойства интегралов от условнопериодических функций, связанных с проблемой малых знаменателей // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1988. № 5. С. 94–96.
- [10] Мошевитин Н. Г. О равномерном распределении дробных долей системы линейных функций // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1990. № 4. С. 26–31.
- [11] Мошевитин Н. Г. К вопросу о поведении интеграла условнопериодической функции // Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 3. С. 97–106.
- [12] Мошевитин Н. Г. Распределение значений линейных функций и асимптотическое поведение некоторых динамических систем // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 3. С. 394–410.