Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Г. Скляренко, О фильтрациях в гипергомологиях, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 4, 578–582

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1536>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 12:59:21

УДК 515.142.21

О ФИЛЬТРАЦИЯХ В ГИПЕРГОМОЛОГИЯХ

Е. Г. Складенко

В типичных ситуациях дается “внутреннее” описание гипергомологий и двух естественных фильтров в них (не зависящее от аппарата гипергомологий).

Библиография: 11 названий.

С гипергомологиями комплекса $\mathcal{N}_*$ для точного слева аддитивного функтора F обычно связывают две стандартные спектральные последовательности [1, гл. XVII]. В неявном виде как группы гомологий или когомологий некоторых конкретных двойных комплексов гипергомологии вместе со спектральными последовательностями широко использовались в литературе, относящейся к применениям пучковых методов в теории гомологий и когомологий, и в некоторой литературе по гомологической алгебре, в частности, в монографиях [2]–[4]. Нередко (это относится, например, к [2] и [3]) при отличающихся подходах к описанию одних и тех же конструкций для их последующего отождествления приходится привлекать специальные аргументы, которые в конечном итоге (в терминах гипергомологий) сводятся к обоснованию независимости как самих спектральных последовательностей, так и определяющих их фильтров, от используемых при разных подходах определяемых резольвентами Картана–Эйленберга двойных комплексов.

В настоящей заметке уточняются аргументы, подтверждающие инвариантность двух фильтров в гипергомологиях (и, как следствие, двух спектральных последовательностей). Показывается, что в двух наиболее типичных ситуациях, когда $\mathcal{N}_*$ либо состоит из F -ациклических объектов, либо оказывается точной последовательностью (например, резольвентой), как сами гипергомологии, так и две естественные фильтры в них допускают “внутреннее” описание в терминах одних только связанных последовательностей функторов без использования резольвент и других конструкций теории гипергомологий. В случае, когда $\mathcal{N}_* = \mathcal{C}_*(\mathcal{G})$ – дифференциальный пучок цепей на топологическом пространстве таким образом возникает известная фильтрация Зимана в гомологиях.

Фильтры в гипергомологиях комплекса $\mathcal{N}_*$ для функтора F определяются двумя фильтрациями в биградуированном объекте $\mathcal{F}^*\mathcal{N}_*$ – подобъектами K_p вида $\bigoplus_{i,j} \mathcal{F}^i \mathcal{N}_j$, для которых $j \leq p$ (первая спектральная последовательность в терминологии [1, гл. XVII, § 2]), и аналогичными подобъектами K^q , для которых $i \geq q$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96–01–01403.

(вторая последовательность в [1]). Здесь $\mathcal{I}^* \mathcal{N}_*$ – инъективная резольвента Картана–Эйленберга комплекса $\mathcal{N}_*$ (см. [1, гл. XVII]). Пусть $\Phi_p \mathbb{H}_m$ и $\Phi^q \mathbb{H}_m$ – образы в гипергомологиях $\mathbb{H}_m(\mathcal{N}_*; F) = H_m(F(\mathcal{I}^* \mathcal{N}_*))$ комплекса $\mathcal{N}_*$ для функтора F гомотий соответственно подкомплексов $F(K_p)$ и $F(K^q)$ комплекса $F(\mathcal{I}^* \mathcal{N}_*)$, рассматриваемого в стандартной полной градуировке $\bigoplus_{j-i=n} F(\mathcal{I}^i \mathcal{N}_j)$ относительно полного дифференциала $d = d' + (-1)^j d''$, где d' , d'' – дифференциалы, индуцированные из $\mathcal{N}_*$ и из $\mathcal{I}^*$ (см., например, [3, гл. I, п. 4.5] или [1, гл. XVII, § 1]). В группах $\mathbb{H}_m(\mathcal{N}_*; F)$ возникают две фильтрации

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_m(\mathcal{N}_*; F) \cdots \supset \Phi_{p+1} \mathbb{H}_m \supset \Phi_p \mathbb{H}_m \supset \cdots \supset \Phi_m \mathbb{H}_m \supset \Phi_{m-1} \mathbb{H}_m = 0, \\ \mathbb{H}_m(\mathcal{N}_*; F) = \Phi^0 \mathbb{H}_m \supset \Phi^1 \mathbb{H}_m \supset \cdots \supset \Phi^q \mathbb{H}_m \supset \cdots. \end{aligned}$$

Для любой F -ациклической резольвенты $\mathcal{C}^* \mathcal{N}_*$ Картана–Эйленберга комплекса $\mathcal{N}_*$ в соответствии с доказательством леммы 1.1 [5] (которое хотя и приведено там в терминах теории пучков, является категорным по духу) имеется преобразование резольвент $\alpha: \mathcal{C}^* \mathcal{N}_* \rightarrow \mathcal{I}^* \mathcal{N}_*$, единственное с точностью до гомотопии в смысле [1, гл. IV, § 4]. Преобразование α индуцирует изоморфизмы спектральных последовательностей обоих типов (со вторыми членами E_2^{pq} соответственно вида $H_{-p}(F^q(\mathcal{N}_*))$ и $F^p(H_{-q}(\mathcal{N}_*))$). Поскольку фильтрации первого типа регулярны (в смысле [3, гл. I, п. 4.1]), α индуцирует изоморфизм фильтрованных групп первого типа $\alpha_*: H_*(F(\mathcal{C}^* \mathcal{N}_*)) \rightarrow \mathbb{H}_*(\mathcal{N}_*; F)$ [3, гл. I, теорема 4.3.1]. Преобразование α обеспечивает также включения $\tilde{\Phi}^q \mathbb{H}_m \subset \Phi^q \mathbb{H}_m$, где $\tilde{\Phi}^q \mathbb{H}_m$ – фильтрующие $\mathbb{H}_m(\mathcal{N}_*; F)$ подгруппы второго типа, определяемые резольвентой $\mathcal{C}^* \mathcal{N}_*$. Если резольвента $\mathcal{C}^* \mathcal{N}_*$ также инъективна, наличие гомотопически обратного к α преобразования резольвент обеспечивает равенства $\tilde{\Phi}^q \mathbb{H}_m = \Phi^q \mathbb{H}_m$. Таким образом, фильтрация второго типа не зависит от выбора инъективной резольвенты $\mathcal{I}^* \mathcal{N}_*$.

В частном случае, когда $H_*(\mathcal{N}_*) = 0$, имеем $F(\mathcal{I}^* \mathcal{N}_*)/F(K^q) = F(\mathcal{I}^* \mathcal{N}_*/K^q)$. Для второй спектральной последовательности этого двойного комплекса

$$E_2^{ij} = F(\mathcal{I}^i H_{-j}(\mathcal{N}_*)) = 0,$$

а поскольку фильтрация в нем уже регулярна, это означает, что

$$H_*(F(\mathcal{I}^* \mathcal{N}_*)/F(K^q)) = 0.$$

Следовательно, из точной последовательности гомотий вытекает, что вторая фильтрация в гипергомологиях вырождается в равенства $\Phi^q \mathbb{H}_m = \mathbb{H}_m(\mathcal{N}_*; F)$.

Для описания первой фильтрации пусть $\mathcal{Z}_m \subset \mathcal{N}_m$ – ядра (и образы) граничного оператора $\mathcal{N}_*$. Короткой точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{Z}_{m+1} \rightarrow \mathcal{N}_{m+1} \rightarrow \mathcal{Z}_m \rightarrow 0$$

отвечает последовательность производных функторов

$$\cdots \rightarrow F(\mathcal{N}_{m+1}) \rightarrow F(\mathcal{Z}_m) \rightarrow F^1(\mathcal{Z}_{m+1}) \rightarrow \cdots,$$

из которой следует наличие включения $i_m^0: H_m(F(\mathcal{N}_*)) \subset F^1(\mathcal{Z}_{m+1})$ и гомоморфизмов $i_m^k: F^k(\mathcal{Z}_m) \rightarrow F^{k+1}(\mathcal{Z}_{m+1})$. Следующее предложение дает “внутреннее” описание гипергомотий $\mathbb{H}_m(\mathcal{N}_*; F)$ и фильтрации первого типа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При $H_*(\mathcal{N}_*) = 0$ группа $\mathbb{H}_m(\mathcal{N}_*; F)$ совпадает с прямым пределом групп $F^k(\mathcal{Z}_{m+k})$ и их гомоморфизмов $(-1)^{m+k} i_{m+k}^k$. Подгруппы $\Phi_p \mathbb{H}_m$ совпадают с образами в прямом пределе групп $F^p(\mathcal{Z}_{m+p})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Строки $\mathcal{I}^q \mathcal{N}_*$ бикомплекса K_p представляют собой инъективные резольвенты объектов $\mathcal{I}^q \mathcal{Z}_p$ (занумерованные в обратном порядке), поэтому имеем включение комплексов $F(\mathcal{I}^* \mathcal{Z}_p) \subset F(K_p)$. Стандартный диаграммный поиск (или рассмотрение для $F(K_p)$ второй спектральной последовательности с учетом регулярности для K_p второй фильтрации), инъективность $\mathcal{I}^q \mathcal{Z}_p$ и $\mathcal{I}^q \mathcal{N}_p$ обеспечивают изоморфизм $F^q(\mathcal{Z}_p) \rightarrow H_{p-q}(F(K_p))$.

Для q -мерного коцикла $z_p^q \in F(\mathcal{I}^* \mathcal{Z}_p)$ в силу инъективности $\mathcal{I}^q \mathcal{N}_*$ имеем $z_p^q = d' c_{p+1}^q$, $c_{p+1}^q \in F(K_{p+1})$, поэтому $dc_{p+1}^q = z_p^q + (-1)^{p+1} d'' c_{p+1}^q$. Следовательно, при включении $F(K_p) \subset F(K_{p+1})$ коцикл z_p^q когомологичен $(-1)^p z_{p+1}^{q+1} = (-1)^p d'' c_{p+1}^q$. Из стандартного же определения связывающего гомоморфизма, отвечающего короткой точной последовательности комплексов

$$0 \rightarrow F(\mathcal{I}^* \mathcal{Z}_{p+1}) \rightarrow F(\mathcal{I}^* \mathcal{N}_{p+1}) \rightarrow F(\mathcal{I}^* \mathcal{Z}_p) \rightarrow 0,$$

следует, что коцикл z_{p+1}^{q+1} определяет образ класса $\{z_p^q\} \in F^q(\mathcal{Z}_p)$ при гомоморфизме $F^q(\mathcal{Z}_p) \rightarrow F^{q+1}(\mathcal{Z}_{p+1})$. Таким образом, фигурирующие в предложении отображения совпадают с гомоморфизмами групп гомологий, индуцированными включениями $F(K_p) \subset F(K_{p+1})$. Остается воспользоваться тем, что

$$F(\mathcal{I}^* \mathcal{N}_*) = \sum_p F(K_p) = \varinjlim_p \{F(K_p)\},$$

и перестановочностью точного функтора $\varinjlim$ с операцией H_p перехода к гомологиям [6, гл. VIII]. Предложение доказано.

Примером комплекса $\mathcal{N}_*$, для которого $H_*(\mathcal{N}_*) = 0$, может послужить любая резольвента $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{N}^*$ ($\mathcal{N}_{-p} = \mathcal{N}^p$ при $p \geq 0$ и $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}^{-1} = \mathcal{A}$). Для любого когомологического функтора $\{F^q\}$ в смысле Гротендика (т.е. точного ∂ -функтора, для которого $F^0 = F$ и $F^q = 0$ при $q < 0$, см. [7, п. 2.1]) в группе $F^m(\mathcal{A})$ возникает конечная фильтрация, определяемая последовательностью связывающих гомоморфизмов $H^m(F(\mathcal{N}^*)) \rightarrow F^1(\mathcal{Z}^{m-1}) \rightarrow \dots \rightarrow F^q(\mathcal{Z}_p) \rightarrow \dots$ ($p + q = m$), структура которой отражает степень неацикличности членов $\mathcal{N}^p$ резольвенты. В случае, когда $\mathcal{N}^*$ – резольвента пучка $\mathcal{A}$ на топологическом пространстве X , определяемая покрытием $\alpha = \{M_\lambda\}$, пучок $\mathcal{N}^p$ определяется предпучком, в котором открытым множествам $U \subset X$ сопоставляются произведения по всем наборам индексов $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ групп сечений $\mathcal{A}(U_{\lambda_0} \cap \dots \cap U_{\lambda_p} \cap U)$ (см. [3, гл. II, п. 5.2]), $F^q(\mathcal{A}) = H^q(X; \mathcal{A})$ – функторы когомологий X с коэффициентами в пучках, причем влияющие на сложность фильтрации группы $F^q(\mathcal{N}^p) = H^q(X; \mathcal{N}^p)$ совпадают с p -мерными коцепями на нерве $|\alpha|$ покрытия α в системе коэффициентов, в которой симплексам $(\lambda_0, \dots, \lambda_i) \in |\alpha|$ сопоставляются группы $H^q(U_{\lambda_0} \cap \dots \cap U_{\lambda_i}; \mathcal{A})$ (см. [3, гл. II, п. 5.3, 5.4]). Поскольку когомологии $|\alpha|$ с указанными коэффициентами – это члены E_2^{pq} отвечающей резольвенте спектральной последовательности [3], фильтрация в $H^m(X; \mathcal{A})$ зависит, конечно, не только от когомологий пересечений $U_{\lambda_0} \cap \dots \cap U_{\lambda_p}$, но и от гомологического устройства покрытия α (т.е. комплекса $|\alpha|$).

Во втором типичном частном случае составляющие комплекс $\mathcal{N}_*$ объекты F -ацикличны. В этом случае, прежде всего, $\mathbb{H}_m(\mathcal{N}_*; F) = H_m(F(\mathcal{N}_*))$ – гомологии комплекса $\mathcal{N}_*$ для функтора F (гомологии $F(\mathcal{N}_*)$), поскольку для первой спектральной последовательности (всегда сходящейся из-за регулярности фильтрации) $E_2^{pq} = 0$ при $q > 0$ и $E_2^{p0} = H_{-p}(F(\mathcal{N}_*))$ (см. выше). По той же причине первая фильтрация сводится к изоморфизмам $\Phi_p \mathbb{H}_m = H_m(F(\mathcal{N}_*))$ при $p \geq m$. Это видно из того, что

$$F(K_{p+1})/F(K_p) = F(\mathcal{I}^* \mathcal{N}_{p+1})$$

– ациклические при $q > 0$ комплексы: $H^q(F(\mathcal{I}^* \mathcal{N}_{p+1})) = F^q(\mathcal{N}_{p+1}) = 0$.

Укажем “внутреннее” определение второй фильтрации. Имеем $\mathcal{B}_p \subset \mathcal{Z}_p \subset \mathcal{N}_p$, где $\mathcal{B}_p$ – образы граничного гомоморфизма. В силу F -ациклическости $\mathcal{N}_p$ точные последовательности $0 \rightarrow \mathcal{Z}_p \rightarrow \mathcal{N}_p \rightarrow \mathcal{B}_{p-1} \rightarrow 0$ при $q > 1$ обеспечивают изоморфизмы $\delta: F^{q-1}(\mathcal{B}_{p-1}) \rightarrow F^q(\mathcal{Z}_p)$, поэтому включениями $\mathcal{B}_p \subset \mathcal{Z}_p$ определены гомоморфизмы $i_p^q: F^q(\mathcal{Z}_p) \rightarrow F^{q-1}(\mathcal{Z}_{p-1})$. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow F(\mathcal{Z}_{m+1}) \rightarrow F(\mathcal{N}_{m+1}) \rightarrow F(\mathcal{B}_m) \rightarrow F^1(\mathcal{Z}_{m+1}) \rightarrow 0,$$

отвечающей короткой точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{Z}_{m+1} \rightarrow \mathcal{N}_{m+1} \rightarrow \mathcal{B}_m \rightarrow 0,$$

вытекает наличие включения $i_{m+1}^1: F^1(\mathcal{Z}_{m+1}) \subset H_m(F(\mathcal{N}_*))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\mathcal{N}_*$ состоит из F -ациклических объектов, то вторая фильтрация в $\mathbb{H}_m(\mathcal{N}_*; F) = H_m(F(\mathcal{N}_*))$ определяется образами групп $F^q(\mathcal{Z}_{m+q})$ при итерациях гомоморфизмов $(-1)^{m+k} i_{m+k}^k$, $k \leq q$.

Ситуация оказывается заметно сложнее, чем в первом случае. Заметим, что каждый коцикл комплекса $F(\mathcal{I}^* \mathcal{Z}_{m+k})$ оказывается и циклом комплекса $F(K^j)$ при $j \leq k$. Этим определяются отображения $F^k(\mathcal{Z}_{m+k}) \rightarrow \Phi^k \mathbb{H}_m$. Посредством стандартного диаграммного поиска всякий цикл комплекса $F(K^k)$ заменяется гомологичным ему циклом, принадлежащим $F(\mathcal{I}^k \mathcal{N}_{m+k})$, оказывающимся, очевидно, k -мерным коциклом комплекса $F(\mathcal{I}^* \mathcal{Z}_{m+k})$. Это означает, что группы $\Phi^k \mathbb{H}_m$ – эпиморфные образы групп $F^k(\mathcal{Z}_{m+k})$ при включении $F(\mathcal{I}^* \mathcal{Z}_{m+k}) \subset F(\mathcal{I}^* \mathcal{N}_*)$. Детали доказательства см. в [8, § 2], где фильтрующие отображения оцениваются с точностью до знака. Из приведенной там схемы рассуждений прослеживается, что определенные выше эпиморфизмы с точностью до указанного в предложении 2 знака коммутируют с отображениями i_{m+k} и включениями $\Phi^k \mathbb{H}_m \subset \Phi^{k-1} \mathbb{H}_m$.

Примером комплекса с F -ациклическими составляющими является дифференциальный пучок $\mathcal{N}^*$ на топологическом пространстве X , служащий прямым образом при непрерывном отображении $Y \rightarrow X$ вялой резольвенты пучка коэффициентов на Y и используемый для построения спектральной последовательности Лере непрерывного отображения [3, гл. II, п. 4.17] ($F = \Gamma_\varphi$ – функтор сечений с носителями в семействе φ). Типичными примерами могут служить проективные системы $\mathcal{N}_* = \{C_*(\lambda)\}$ цепных комплексов, трактуемые как комплексы в категории проективных абелевых групп или модулей, для функтора обратного предела $F = \varprojlim_\lambda$. Соответствующие конструкции и

спектральная последовательность применялись еще Роосом в [9], а затем и другими авторами (см. в связи с этим [10, § 5]). Наконец, очевидный интерес представляют дифференциальные пучки цепей $\mathcal{N}_* = \mathcal{C}_*(X; \mathcal{G})$ на топологическом пространстве X ($F = \Gamma_\varphi$, $\mathcal{G}$ – локально постоянные коэффициенты).

Конкретно природа обсуждаемой фильтрации выяснена пока лишь в последнем случае, где она оказывается тесно связанной с фильтрацией Зимана [11] в гомологиях, определенной сперва для конечных комплексов чисто комбинаторно, и является, очевидно, окончательной формой последней. Для вялого пучка цепей $\mathcal{N}_* = \mathcal{C}_*(X; \mathcal{G})$ на локально компактном пространстве X и паракомпактифицирующего семейства носителей φ подгруппа $\Phi^q \mathbb{H}_m^\varphi \subset H_m^\varphi(X; \mathcal{G})$ содержится в образах $H_m^\varphi(X \setminus \mathcal{A}; \mathcal{G}) \rightarrow H_m^\varphi(X; \mathcal{G})$ для любых подмножеств $\mathcal{A} \subset X$, размерность которых меньше q . Она совпадает с пересечением всех таких образов в случае, когда $X = K$ – локально конечный клеточный комплекс, а φ – семейство компактных или всех замкнутых множеств. В этом случае $\Phi^q \mathbb{H}_m^\varphi$ также образ в $H_m^\varphi(K; \mathcal{G})$ группы $H_m^\varphi(K \setminus K^{q-1}; \mathcal{G})$ ($K^{q-1} - (q-1)$ -мерный остов K); см. по этому поводу [8, § 3, 4] (существенно описание фильтрации, даваемое предложением 2).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
03.04.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М.: ИЛ, 1960.
- [2] Бредон Г. Э. Теория пучков. М.: Наука, 1988.
- [3] Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. М.: ИЛ, 1961.
- [4] Jensen C. U. Les foncteurs dérivés de $\varprojlim$ et leurs applications en théorie des modules // Lect. Notes in Math. 1972. V. 254.
- [5] Скляренко Е. Г. О природе гомологических умножений и двойственности // УМН. 1994. Т. 49. № 1. С. 141–198.
- [6] Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. М.: Физматгиз, 1958.
- [7] Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. М.: ИЛ, 1961.
- [8] Скляренко Е. Г. О фильтрации Зимана в гомологиях // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 12. С. 103–116.
- [9] Roos J. E. Sur les foncteurs dérivés de $\varprojlim$. Applications // C. R. Acad. Sci. Paris. 1961. V. 252. P. 3702–3704.
- [10] Скляренко Е. Г. Гипер(ко)гомологии для точных слева ковариантных функторов и теория гомологий топологических пространств // УМН. 1995. Т. 50. № 3. С. 109–146.
- [11] Zeeman E. C. Dihomology. III. A generalization of the Poincaré duality for manifolds // Proc. London Math. Soc. 1963. V. 13. № 49. P. 119–183.