Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Теляковский, В. Н. Темляков, О сходимости рядов Фурье функций многих переменных ограниченной вариации, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 4, 583–595

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1537>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 18:12:18

УДК 517.518.475

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

С. А. Теляковский, В. Н. Темляков

Для функций многих переменных, имеющих ограниченную вариацию по Харди, рассматривается поточечная сходимость последовательности частных сумм рядов Фурье, определяемой заданной последовательностью ограниченных областей в пространстве гармоник. Получены достаточные условия на эти области, обеспечивающие сходимость, а для областей, выпуклых относительно всех координатных направлений, — необходимые и достаточные условия. Сходимость рядов Фурье по Принсгейму в этой задаче была установлена Харди.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. В настоящей работе изучается сходимость рядов Фурье функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$, имеющих ограниченную вариацию по Харди или удовлетворяющих более жесткому условию ограниченности в метрике L_1 смешанной производной

$$\frac{\partial^d f}{\partial x_1 \cdots \partial x_d}.$$

Точные определения соответствующих классов функций HV и W_1^1 даны в п. 2. А сейчас отметим, что мы будем рассматривать функции f , у которых коэффициенты Фурье

$$f^\wedge(\mathbf{k}) = f^\wedge(k_1, \dots, k_d) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} d\mathbf{x}, \quad \mathbb{T}^d := (0, 2\pi)^d,$$

равны нулю, если равна нулю хотя бы одна из компонент целочисленного вектора $\mathbf{k}$. Такое предположение, не имеющее принципиального значения, позволит упростить дальнейшие формулировки.

Харди [1] доказал (при $d = 2$; случай $d > 2$ см. в [2]), что ряд Фурье функции f из класса HV сходится по прямоугольникам (по Принсгейму) в каждой точке $\mathbf{x}$ к значению

$$f^0(\mathbf{x}) := 2^{-d} \sum f(\mathbf{x} + \varepsilon \cdot 0),$$

где суммирование ведется по всем d -мерным векторам ε , компоненты которых равны ± 1 .

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–01–00198, и Международного научного фонда, грант М37300.

В настоящей работе рассматривается вопрос о замене в этом утверждении прямоугольных частных сумм на частные суммы другого вида.

Чандрасекхаран и Минакхисундарам [3, теорема 4.3] доказали, что если функция $f(x_1, x_2)$ является произведением $g(x_1)h(x_2)$ функций ограниченной вариации, то круговые частные суммы ряда Фурье функции f сходятся для всех (x_1, x_2) .

В полном объеме теорему Харди на случай, когда частные суммы берутся по областям, отличным от прямоугольников, перенес В. Н. Темляков [4, теорема 1.1]. Он установил соответствующее утверждение для суммирования рядов Фурье по гиперболическим крестам и по ступенчатым гиперболическим крестам. Доказательство в [4] основывалось на теореме Харди и результате С. А. Теляковского [5] о равномерной ограниченности некоторых специальных тригонометрических полиномов многих переменных. Используя ту же схему доказательства, М. И. Дьяченко [6, теорема 7.1.2] распространил теорему Харди на частные суммы, построенные по множествам, которые вместе с каждой точкой $\mathbf{k}$ содержат все целочисленные точки из d -мерного прямоугольника $[1, k_1] \times \dots \times [1, k_d]$.

Мы получаем дальнейшее обобщение теоремы Харди в этом направлении (см. ниже теорему 4).

Будем рассматривать сходимость частных сумм ряда Фурье вида

$$S(f, G, \mathbf{x}) := \sum_{|\mathbf{k}| \in G} f^\wedge(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}, \quad (1.1)$$

где $|\mathbf{k}| := (|k_1|, \dots, |k_d|)$ и $G \subset (0, \infty)^d$ — некоторая ограниченная область. Ввиду ограниченности G суммы (1.1) являются тригонометрическими полиномами. Вообще говоря, задача имеет смысл и без условия ограниченности области G , но мы оставляем этот случай в стороне.

Авторы приносят глубокую благодарность М. И. Дьяченко и К. И. Осколкову за полезные обсуждения.

2. Общие методы суммирования. В этом пункте рассматривается сходимость частных сумм (1.1), определяемых последовательностью областей G_n , удовлетворяющих только условию ограниченности.

2.1. Пусть

$$H(\mathbf{x}) := \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_d=1}^{\infty} \frac{\sin k_1 x_1}{k_1} \dots \frac{\sin k_d x_d}{k_d}.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in (0, 2\pi),$$

то для $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$

$$|H(\mathbf{x})| \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^d. \quad (2.1)$$

Определим W_1^1 как класс функций f , представимых в виде свертки

$$f(\mathbf{x}) = H * \varphi = \int_{\mathbb{T}^d} H(\mathbf{x} - \mathbf{t}) \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad (2.2)$$

где $\varphi \in L_1(\mathbb{T}^d)$.

Для ограниченной области $G \subset (0, \infty)^d$ положим

$$U(G, \mathbf{x}) := \sum_{|\mathbf{k}| \in G} \frac{\sin k_1 x_1}{k_1} \dots \frac{\sin k_d x_d}{k_d}, \quad (2.3)$$

где суммирование ведется по всем целым точкам $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$ таким, что $|\mathbf{k}| \in G$. Пусть $y = y(G)$ – наибольшее целое число такое, что все целые точки $\mathbf{k}$ из куба $[1, y]^d$ содержатся в G .

Выясним, при каких условиях на последовательность областей $G_n \subset (0, \infty)^d$ последовательность частных сумм $S(f, G_n)$ сходится для всех функций $f \in W_1^1$.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы для каждой функции $f \in W_1^1$ последовательность частных сумм ее ряда Фурье $S(f, G_n, \mathbf{x})$ сходилась в каждой точке $\mathbf{x}$ к значению $f(\mathbf{x})$, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:*

- 1°) *последовательность норм $\|U(G_n, \mathbf{x})\|_C$ ограничена равномерно по n ;*
- 2°) $\lim_{n \rightarrow \infty} y(G_n) = \infty$.

Эти условия необходимы и достаточны также для равномерной на $\mathbb{T}^d$ сходимости частных сумм $S(f, G_n, \mathbf{x})$ для всех функций $f \in W_1^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем достаточность условий 1° и 2° для равномерной сходимости $S(f, G_n, \mathbf{x})$.

Для функции $f \in W_1^1$ из (2.2) следует, что

$$f - S(f, G_n) = (H - U(G_n)) * \varphi. \quad (2.4)$$

Если $|\mathbf{k}| \in G_n$, в частности, если $|k_j| \leq y(G_n)$ для всех $j = 1, \dots, d$, то

$$(H - U(G_n)) * e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} = 0.$$

Поэтому в силу условия 2° существует последовательность тригонометрических полиномов вида

$$t_n(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| \in G_n} t_n^\wedge(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}$$

такая, что при $n \rightarrow \infty$

$$\|\varphi - t_n\|_1 \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

Из (2.4) находим

$$\|f - S(f, G_n)\|_C = \|(H - U(G_n)) * (\varphi - t_n)\|_C \leq \|H - U(G_n)\|_\infty \cdot \|\varphi - t_n\|_1. \quad (2.6)$$

Но согласно (2.1) и условию 1°

$$\|H - U(G_n)\|_\infty \leq \|H\|_\infty + \|U(G_n)\|_\infty \leq C(d) < \infty,$$

где $C(d)$ зависит только от d . Поэтому из (2.5) и (2.6) получаем

$$\|f - S(f, G_n)\|_C \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

что доказывает достаточность условий 1° , 2° .

Нам остается обосновать необходимость условий 1° и 2° для поточечной сходимости.

Что касается условия 2° , то сделать это совсем легко. В самом деле, если условие 2° не выполняется, то существует куб $[1, Y]^d$ такой, что для некоторой бесконечной последовательности областей G_n он содержит целые точки $\mathbf{k}$, не принадлежащие этим G_n . Значит, найдется точка $\mathbf{k}_0$, которая не принадлежит некоторой бесконечной последовательности областей G_{n_m} , $m = 1, 2, \dots$. Но тогда $S(e^{i(\mathbf{k}_0, \mathbf{x})}, G_{n_m}, \mathbf{x}) = 0$ и, таким образом, последовательность $S(e^{i(\mathbf{k}_0, \mathbf{x})}, G_n, \mathbf{x})$ не может сходиться поточечно к $e^{i(\mathbf{k}_0, \mathbf{x})}$.

Установим одно вспомогательное предложение, которое понадобится при доказательстве необходимости условия 1° .

Пусть $T(N)$ обозначает множество тригонометрических полиномов вида

$$\sum c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

где суммирование ведется по целым $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$, удовлетворяющим условиям $1 \leq |k_j| < N$, $j = 1, \dots, d$.

ЛЕММА. Для каждого полинома $f \in T(N)$ найдется полином $g \in T(2N)$ такой, что $\|g\|_1 \leq 1$ и $(f, g) \geq 2^{-d-1} \|f\|_C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть

$$v_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{k=N}^{2N-1} D_k(x)$$

— одномерное ядро Валле-Пуссена (D_k — ядра Дирихле) и

$$V_N(\mathbf{x}) := v_N(x_1) \cdots v_N(x_d).$$

Известно (см. [7, с. 120]), что $\|v_N(x)\|_1 < 2$, значит,

$$\|V_N(\mathbf{x})\|_1 < 2^d. \quad (2.7)$$

Пользуясь тем, что

$$\|f\|_C = \sup_{\|\psi\|_1 \leq 1} (f, \psi),$$

выберем такую функцию ψ_0 , что $\|\psi_0\|_1 \leq 1$ и

$$(f, \psi_0) \geq \frac{1}{2} \|f\|_C, \quad (2.8)$$

и положим $g := 2^{-d} V_N * \psi_0$. Тогда $g \in T(2N)$, в силу (2.7) $\|g\|_1 \leq 1$, а в силу (2.8)

$$(f, g) = 2^{-d} (f, V_N * \psi_0) = 2^{-d} (f, \psi_0) \geq 2^{-d-1} \|f\|_C.$$

Лемма доказана.

Предположим теперь, что выполнено условие 2° , но не выполнено условие 1° . Пусть z_n — наименьшее целое число такое, что куб $(0, z_n]^d$ содержит область G_n .

Определим последовательности индексов $\{n_l\}$ и коэффициентов $\{a_l\}$ следующим образом.

Пользуясь тем, что условие 1° не выполнено, найдем n_1 такое, что $\|U(G_{n_1})\|_C \geq 2$ и положим $a_1 := \|U(G_{n_1})\|_C$.

Если n_l и a_l для $l \leq s-1$ уже построены, то найдем номер n_s такой, что

$$y_{n_s} > 2z_{n_{s-1}} \quad (2.9)$$

и

$$\|U(G_{n_s})\|_C \geq 2^{d+2} a_{n_{s-1}}. \quad (2.10)$$

Это можно сделать в силу 2° и того, что не выполнено условие 1°. Положим

$$a_s := \|U(G_{n_s})\|_C.$$

В силу (2.9) для любого полинома $t \in T(2z_s)$ при $s < l$ имеем

$$(H - U(G_{n_l}), t) = 0, \quad (2.11)$$

а в силу (2.10) для $s > l$

$$a_l a_s^{-1} \leq 2^{-(d+2)(s-l)}. \quad (2.12)$$

Пользуясь леммой, для каждого s находим полином $g_s \in T(2z_n)$ такой, что $\|g_s\|_1 \leq 1$ и

$$(U(G_{n_s}), g_s) \geq 3^{-d-1} a_s. \quad (2.13)$$

Положим

$$\varphi := \sum_{s=1}^{\infty} a_s^{-1} g_s$$

и $f := H * \varphi$. Тогда

$$\|\varphi\|_1 \leq \sum_{s=1}^{\infty} a_s^{-1} \leq \sum_{s=1}^{\infty} 3^{-1-(d+2)(s-1)} < \infty,$$

поэтому $f \in W_1^1$. Вместе с тем, согласно (2.11)

$$|f(\mathbf{0}) - S(f, G_{n_l}, \mathbf{0})| = |(H - U(G_{n_l}), \varphi)| = \left| \sum_{s=l}^{\infty} a_s^{-1} (H - U(G_{n_l}), g_s) \right|.$$

Отсюда, пользуясь оценками (2.13), (2.1) и (2.12), находим

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{0}) - S(f, G_{n_l}, \mathbf{0})| &\geq a_l^{-1} |(U(G_{n_l}), g_l)| - \left| \sum_{s=l+1}^{\infty} a_s^{-1} (U(G_{n_l}), g_s) \right| - \sum_{s=l}^{\infty} a_s^{-1} |(H, g_s)| \\ &\geq 2^{-d-1} - \sum_{s=l+1}^{\infty} a_s^{-1} a_l - \sum_{s=l}^{\infty} a_s^{-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^d \\ &\geq 2^{-d-1} - \sum_{s=l+1}^{\infty} 2^{-(d+2)(s-l)} - a_l^{-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^d \sum_{s=l}^{\infty} 2^{-(d+2)(s-l)}, \end{aligned}$$

а последнее выражение при достаточно больших l положительно и не стремится к нулю при $l \rightarrow \infty$.

Таким образом, предположение о том, что не выполнено условие 1°, привело к противоречию.

Теорема доказана.

2.2. Напомним определение функции, имеющей ограниченную вариацию по Харди.

Пусть $f(x_1, \dots, x_d)$ задана на d -мерном параллелепипеде $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$. Возьмем разбиение каждого отрезка $[a_j, b_j]$

$$a_j = a_0^j < a_1^j < \dots < a_{N_j}^j = b_j$$

и составим разности

$$\Delta_n(j)f := f(x_1, \dots, x_{j-1}, a_n^j, x_{j+1}, \dots, x_d) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, a_{n-1}^j, x_{j+1}, \dots, x_d),$$

$n = 1, \dots, N_j$. Если конечна верхняя грань

$$\sup \sum_{n_1=1}^{N_1} \dots \sum_{n_d=1}^{N_d} |\Delta_{n_1}(1) \dots \Delta_{n_d}(d)f|, \quad (2.14)$$

взятая по всевозможным разбиениям отрезков $[a_j, b_j]$, то говорят, что функция f имеет *ограниченную вариацию по Витали*.

Функция f имеет *ограниченную вариацию по Харди*, если для любого подмножества e натуральных чисел из $\{1, \dots, d\}$ она имеет ограниченную вариацию по Витали как функция переменных x_j , $j \in e$, при фиксированных x_k , $k \notin e$, и при этом соответствующие верхние грани вида (2.14) ограничены равномерно относительно x_k . В этом случае будем писать $f \in HV$, имея в виду периодические функции, заданные на d -мерном торе $\mathbb{T}^d$.

Класс HV шире, чем W_1^1 . Поэтому условия 1° и 2° из теоремы 1, будучи необходимыми для поточечной сходимости частных сумм $S(f, G_n)$ для функций $f \in W_1^1$, необходимы для поточечной сходимости $S(f, G_n)$ и для $f \in HV$. Однако, как мы сейчас покажем, для класса HV они не являются уже достаточными.

ПРИМЕР 1. Пусть $d = 1$ и A_m — множество чисел вида $4l + 1$, $l = 1, 2, \dots$, лежащих в интервале $(m, 2m)$.

Определим множества G_m следующим образом:

$$G_{2n} := [1, n], \quad G_{2n+1} := G_{2n} \cup A_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Выполнение условия 2° для этих множеств очевидно, а 1° имеет место в силу оценок

$$\left\| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \right\|_C = O(1), \quad \sum_{k \in A_n} \frac{1}{k} = O(1).$$

Вместе с тем, для функции

$$H(x) = \sum_k \frac{\sin kx}{k}$$

имеем

$$S\left(H, G_{2n+1}, \frac{\pi}{2}\right) - S\left(H, G_{2n}, \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k \in A_n} \frac{\sin(k\pi/2)}{k} = \sum_{k \in A_n} \frac{1}{k},$$

и так как последняя сумма не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то последовательность частных сумм $S(H, G_n, x)$ ряда Фурье функции ограниченной вариации H расходится в точке $\pi/2$.

Следующая теорема дает достаточные условия поточечной сходимости частных сумм рядов Фурье функций из HV .

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $f \in HV$. Если выполнены условия 1° и 2° из теоремы 1 и условие

3°) для каждого фиксированного $\delta > 0$ величины

$$\max |U(G_n \setminus [1, y(G_n)]^d, \mathbf{x})|,$$

где максимум берется по $\mathbf{x} \in [\delta, 2\pi - \delta]^d$, стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, то частные суммы $S(f, G_n, \mathbf{x})$ сходятся в каждой точке $\mathbf{x}$ к значению $f^0(\mathbf{x})$.

Мы не приводим доказательство этой теоремы, поскольку оно фактически было бы повторением соответствующих рассуждений из доказательства теоремы 1.1 в работе [4], в котором, как нетрудно видеть, использовались только те свойства областей G_n и полиномов $U(G_n)$, которые здесь названы условиями 1°–3°.

В одномерном случае вопрос о выполнении условия 3° решается просто. Пусть множества G_n заданы следующим образом:

$$G_n := [1, y_n] \cup \left(\bigcup_{j=1}^m [a_{j,n}, b_{j,n}] \right), \quad (2.15)$$

где $m = m(n)$ и $y_n < a_{1,n} \leq b_{1,n} < a_{2,n} \leq b_{2,n} < \dots < a_{m,n} \leq b_{m,n}$. Для таких множеств условие 3° выполняется, если

$$\lim_n y_n = \infty, \quad \lim_n \frac{m(n)}{y_n} = 0. \quad (2.16)$$

Это вытекает из хорошо известной оценки

$$\left| \sum_{k=p}^q \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \frac{C}{xp}, \quad 0 < x \leq \pi, \quad (2.17)$$

где C – абсолютная постоянная.

Заметим, что в классе всех последовательностей $\{G_n\}$ вида (2.15) условия (2.16) являются и необходимыми для поточечной сходимости частных сумм $S(f, G_n)$ для всех функций $f \in HV$. Это видно из примера 1.

Вместе с тем, из (2.16) не следует выполнение условия 1°.

ПРИМЕР 2. Пусть

$$G_n^m := [1, n] \cup \left(\bigcup_{l=1}^m [(8l+1)n, (8l+3)n] \right), \quad (2.18)$$

где m является некоторой функцией от n .

Тогда

$$U\left(G_n^m, \frac{\pi}{4n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\pi/4n)}{k} + \sum_{l=1}^m \sum_{k=(8l+1)n}^{(8l+3)n} \frac{\sin(k\pi/4n)}{k} \geq \sum_{l=1}^m \frac{\sqrt{2}}{8l+3} \geq c \log m,$$

где c – некоторая положительная постоянная. Таким образом, если $m = m(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то для множеств (2.18) условие 1° не выполняется.

Заметим, наконец, что в ряде случаев функция $H(x)$ оказывается экстремальной в классе функций ограниченной вариации. Но в задаче, рассматриваемой в настоящей работе, это не так. В самом деле, если в примере 2 взять $m = [\sqrt{n}]$, то, как мы видели, не выполняется условие 1° и, значит, существует функция f ограниченной вариации, для которой последовательность $S(f, G_n^m, x)$ не сходится поточечно. Вместе с тем, нетрудно убедиться, что для этих G_n^m при всех x

$$S(H, G_n^m, x) \rightarrow H(x), \quad n \rightarrow \infty.$$

3. Методы суммирования, определяемые выпуклыми областями. Для заданной последовательности областей $\{G_n\}$ проверка выполнения условий 1° и 3° из теорем 1 и 2 представляет собой в общем случае непростую задачу. В этом пункте мы докажем, что эти условия выполняются для весьма естественного класса частных сумм рядов Фурье, когда области G_n являются выпуклыми относительно всех координатных направлений. При более жестком ограничении, когда область G_n вместе с каждой точкой $\mathbf{k}$ содержит все целочисленные точки из прямоугольника $[1, k_1] \times \dots \times [1, k_d]$, соответствующий результат установил М. И. Дьяченко [6].

Область $G \subset (0, \infty)^d$ называют *выпуклой относительно всех координатных направлений*, если пересечение G с любой прямой, параллельной какой-либо из координатных осей, является выпуклым, т.е. оно либо пусто, либо представляет собой точку, конечный или бесконечный промежуток. При этом область G может быть не выпуклой и даже не связной.

Для областей G_n , выпуклых относительно всех координатных направлений, условие 1° выполняется согласно теореме С. А. Теляковского [8]. Покажем, что в этом случае выполняется и условие 3° .

3.1. Нам понадобится одна оценка для полиномов $U(G, \mathbf{x})$ (см. (2.3)), где $G \subset (0, \infty)^d$ – ограниченная область, выпуклая относительно всех координатных направлений. Мы получим эту оценку в более точном виде, чем это требуется для основной темы настоящей работы, поскольку такие оценки могут иметь и самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $G \subset (0, \infty)^d$ – ограниченная область, выпуклая относительно всех координатных направлений и не содержащая точек из куба $[1, N]^d$. Тогда для всех точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$, удовлетворяющих условию $0 < \delta \leq x_j \leq \pi$, $j = 1, \dots, d$, справедлива оценка

$$|U(G, \mathbf{x})| \leq \frac{C(d)}{\delta} \frac{\log^{d-1}(N+1)}{N}, \quad (3.1)$$

где $C(d) < \infty$ и зависит только от d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем использовать прием, предложенный в [8].

Для каждой фиксированной точки $(x_1, \dots, x_d) \in [\delta, \pi]^d$ разделим d -мерный квадрант $(0, \infty)^d$ точек $(k_1, \dots, k_d)$ на части всевозможными гиперплоскостями $k_p x_p = k_q x_q$, $p \neq q$, относя точки, лежащие на самих гиперплоскостях, к одной из тех частей, на которые они делят весь квадрант. Число таких частей зависит только от d .

Область G делится этими гиперплоскостями на части, каждая из которых удовлетворяет условиям нашей теоремы. Поэтому оценку (3.1) достаточно доказать для области A , являющейся одной из таких частей.

Не теряя общности, будем предполагать, что для точек $(k_1, \dots, k_d) \in A$ справедливы оценки

$$k_1 x_1 \geq k_2 x_2 \geq \dots \geq k_d x_d. \quad (3.2)$$

Представим d -кратную сумму

$$U(A) = \sum_{(k_1, \dots, k_d) \in A} \frac{\sin k_1 x_1}{k_1} \dots \frac{\sin k_d x_d}{k_d}$$

как повторную

$$U(A) = \sum^{**} \frac{\sin k_2 x_2}{k_2} \dots \frac{\sin k_d x_d}{k_d} \left(\sum^* \frac{\sin k_1 x_1}{k_1} \right), \quad (3.3)$$

где сумма $\sum^*$ распространена на k_1 такие, что существуют точки $(k_1, k_2, \dots, k_d) \in A$, а сумма $\sum^{**}$ – на все $(k_2, \dots, k_d)$, для которых такие точки существуют.

Из (3.3) следует оценка

$$|U(A)| \leq \sum^{**} \frac{1}{k_2 \dots k_d} \left| \sum^* \frac{\sin k_1 x_1}{k_1} \right|. \quad (3.4)$$

В силу выпуклости области A относительно первого координатного направления суммирование по k_1 в $\sum^*$ ведется в некоторых пределах от $p(k_2, \dots, k_d)$ до $q(k_2, \dots, k_d)$. Поэтому, пользуясь оценкой (2.17), из (3.4) получаем

$$|U(A)| \leq C \sum^{**} \frac{1}{k_2 \dots k_d} \frac{1}{p(k_2, \dots, k_d) x_1}. \quad (3.5)$$

Так как область A не содержит точек из куба $[1, N]^d$, то для каждой точки $(k_1, k_2, \dots, k_d) \in A$ хотя бы одна из координат k_j превосходит N . Разобьем область A на части гиперплоскостями

$$k_j = N, \quad j = 1, 2, \dots, d, \quad (3.6)$$

относя к одним частям точки, для которых $k_j \leq N$, а к другим точки, для которых $k_j > N$.

Пусть $\sum_1$ – сумма тех слагаемых из $\sum^{**}$ в правой части (3.5), у которых $k_j \leq N$ для всех $j = 2, \dots, d$. Значит, для слагаемых из $\sum_1$ имеем $k_1 > N$ и поэтому для них $p(k_2, \dots, k_d) > N$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_1 \frac{1}{k_2 \dots k_d} \frac{1}{p(k_2, \dots, k_d) x_1} &\leq \sum_1 \frac{1}{k_2 \dots k_d} \frac{1}{N x_1} \leq \frac{1}{N x_1} \sum_{k_2=1}^N \dots \sum_{k_d=1}^N \frac{1}{k_2 \dots k_d} \\ &\leq \frac{1}{N^\delta} (1 + \log N)^{d-1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Возьмем теперь произвольную из частей, на которые область A разбита гиперплоскостями (3.6), для которой $k_j > N$ при некотором j , $2 \leq j \leq d$. Пусть s – наибольшее

из таких j . Обозначим через $\sum_2$ сумму тех слагаемых из $\sum^{**}$, которые соответствуют рассматриваемой части области A .

В силу первого неравенства (3.2) $p(k_2, \dots, k_d) \geq k_2 x_2 / x_1$. Поэтому

$$\sum_2 \frac{1}{k_2 \cdots k_d} \frac{1}{p(k_2, \dots, k_d) x_1} \leq \sum_2 \frac{1}{k_2^2 k_3 \cdots k_d x_2}.$$

В полученном выражении будем переходить к повторным суммам, суммируя сначала по k_2 , затем по k_3 и т.д. до k_{s-1} включительно, при этом будем пользоваться неравенствами (3.2):

$$\sum_2 \frac{1}{k_2^2 k_3 \cdots k_d x_2} \leq 2 \sum \frac{1}{k_3^2 k_4 \cdots k_d x_3} \leq \dots \leq 2^{s-2} \sum \frac{1}{k_s^2 k_{s+1} \cdots k_d x_s}.$$

Согласно выбору индекса s имеем $k_s > N$, а $k_{s+1} \leq N, \dots, k_d \leq N$. Следовательно,

$$\sum_2 \leq \frac{2^{s-2}}{x_s} \sum_{k_s=N+1}^{\infty} \frac{1}{k_s^2} \sum_{k_{s+1}=1}^N \cdots \sum_{k_d=1}^N \frac{1}{k_{s+1} \cdots k_d} \leq \frac{2^{s-2}}{\delta N} (1 + \log N)^{d-s}. \quad (3.8)$$

В силу сказанного выше из (3.5), (3.7) и (3.8) следует оценка (3.1) для области A , а значит, и для области G .

Теорема доказана.

Мы уже отмечали, что для областей G_n , выпуклых относительно всех координатных направлений, выполняется условие 1°. Поэтому из теорем 1–3 вытекает следующее достаточное условие сходимости частных сумм рядов Фурье функций из классов W_1^1 и HV .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\{G_n\}$ – последовательность ограниченных областей, выпуклых относительно всех координатных направлений. Тогда если выполнено условие 2°, то последовательность $S(f, G_n, \mathbf{x})$

- i) для каждой функции $f \in W_1^1$ сходится равномерно на $\mathbb{T}^d$ к $f(\mathbf{x})$;
- ii) для каждой функции $f \in HV$ сходится в каждой точке $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$ к значению $f^0(\mathbf{x})$.

3.2. Покажем, что порядок убывания по N выражения в правой части оценки (3.1) не может быть понижен.

ТЕОРЕМА 5. Существует такая положительная величина $c(d)$, зависящая только от d , что для каждого N найдется ограниченная выпуклая область G , не содержащая точек из куба $[1, N]^d$, такая, что для полинома $U(G)$ справедлива оценка

$$\max_{\mathbf{x}} |U(G, x_1, \dots, x_d)| \geq c(d) \frac{1}{N} \log^{d-1}(N+1), \quad (3.9)$$

где максимум берется по точкам $(x_1, \dots, x_d) \in [\pi/3, \pi]^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что если число N достаточно велико, то оценка (3.9) достигается на полиноме

$$U_0 = U(G, x_1, \dots, x_d) := \sum_{k_2=1}^N \dots \sum_{k_d=1}^N \frac{\sin k_2 x_2}{k_2} \dots \frac{\sin k_d x_d}{k_d} \left(\sum_{k_1=N+1}^q \frac{\sin k_1 x_1}{k_1} \right),$$

где $q := N + k_2 + \dots + k_d$. А для малых N утверждение теоремы тривиально.

Будем считать $x_1 = x_2 = \dots = x_d = x$.

После двух преобразований Абеля получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=N+1}^q \frac{\sin k_1 x_1}{k_1} &= \frac{1}{N+1} \frac{\cos(N+1/2)x}{2 \sin(x/2)} - \frac{1}{q+1} \frac{\cos(q+1/2)x}{2 \sin(x/2)} \\ &\quad + \frac{1}{(N+1)(N+2)} \frac{\sin(N+1)x}{4 \sin^2(x/2)} - \frac{1}{(q+1)(q+2)} \frac{\sin(q+1)x}{4 \sin^2(x/2)} \\ &\quad - \sum_{k_1=N+1}^q \frac{2}{k_1(k_1+1)(k_1+2)} \frac{\sin(k_1+1)x}{4 \sin^2(x/2)} \\ &= \frac{1}{N+1} \frac{\cos(N+1/2)x}{2 \sin(x/2)} - \frac{1}{q+1} \frac{\cos(q+1/2)x}{2 \sin(x/2)} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

равномерно относительно $x \in [\pi/3, \pi]$.

Так как первое слагаемое в правой части (3.10) не зависит от $k_2, \dots, k_d$, то в силу равномерной ограниченности полиномов

$$\sum_{k_j=1}^N \frac{\sin k_j x}{k_j}$$

и условия $x \in [\pi/3, \pi]$ имеем

$$U_0 = -\frac{1}{2 \sin(x/2)} \sum_{k_2=1}^N \dots \sum_{k_d=1}^N \frac{\sin k_2 x}{k_2} \dots \frac{\sin k_d x}{k_d} \frac{\cos(q+1/2)x}{q+1} + O_d\left(\frac{1}{N}\right),$$

где символ O_d означает, что числовой множитель в этом выражении может зависеть от d .

Отсюда в силу оценки

$$\frac{1}{q+1} = \frac{1}{N} + O\left(\frac{k_2 + \dots + k_d}{N^2}\right)$$

следует, что

$$\begin{aligned} U_0 &= -\frac{1}{2 \sin(x/2)} \frac{1}{N} \sum_{k_2=1}^N \dots \sum_{k_d=1}^N \frac{\sin k_2 x}{k_2} \dots \frac{\sin k_d x}{k_d} \cos\left(q + \frac{1}{2}\right)x \\ &\quad + O_d\left(\frac{1}{N} \log^{d-2}(N+1)\right). \end{aligned}$$

Представим произведение $\sin k_2 x \cdots \sin k_d x \cos(q + 1/2)x$ в виде суммы синусов или косинусов (в зависимости от четности или нечетности d). Пусть $\varphi(x)$ обозначает соответствующую функцию $\sin x$ или $\cos x$. Тогда полученный результат можно записать следующим образом:

$$\sin k_2 x \cdots \sin k_d x \cos\left(q + \frac{1}{2}\right)x = 2^{-(d-1)} \sum \pm \varphi\left(\left(q + \frac{1}{2} \pm k_2 \pm \cdots \pm k_d\right)x\right),$$

где сумма берется по всевозможным распределениям знаков $\pm$ перед $k_2, \dots, k_d$, а знаки перед φ для дальнейшего не имеют значения, поэтому не будем о них говорить.

Запишем последнее равенство следующим образом:

$$\sin k_2 x \cdots \sin k_d x \cos\left(q + \frac{1}{2}\right)x = 2^{-(d-1)} \sum \pm \varphi\left(\left(N + \frac{1}{2} + 2\varepsilon_2 k_2 + \cdots + 2\varepsilon_d k_d\right)x\right), \quad (3.11)$$

где каждое ε_j независимо от остальных принимает значения 0 и 1.

Выделив слагаемое, у которого в (3.11) все $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_d$ равны 0, из (3.11) находим

$$\begin{aligned} U_0 = & \frac{1}{2^d \sin(x/2)} \frac{1}{N} \sum_{k_2=1}^N \cdots \sum_{k_d=1}^N \frac{1}{k_2 \cdots k_d} \left[\pm \varphi\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right) \right. \\ & \left. + \sum' \pm \varphi\left(\left(N + \frac{1}{2} + 2\varepsilon_2 k_2 + \cdots + 2\varepsilon_d k_d\right)x\right) \right] + O_d\left(\frac{1}{N} \log^{d-2}(N+1)\right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где сумма $\sum'$ берется по всевозможным $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_d$, принимающим значения 0 и 1, но не равным нулю одновременно.

Возьмем ту часть суммы из (3.12), в которой участвует первое слагаемое из квадратных скобок. Выберем $x_0 \in [\pi/3, \pi/2]$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\pm \varphi\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x_0\right) = 1.$$

Ясно, что при достаточно больших N такое x_0 существует. Тогда

$$\frac{1}{2^d \sin(x_0/2)} \frac{1}{N} \sum_{k_2=1}^N \cdots \sum_{k_d=1}^N \frac{\pm \varphi((N + 1/2)x_0)}{k_2 \cdots k_d} \geq \frac{\sqrt{2}}{2^d N} \log^{d-1}(N+1). \quad (3.13)$$

Рассмотрим теперь произвольное слагаемое из $\sum'$ при $x = x_0$. У него по крайней мере одно из чисел $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_d$ равно 1. Пусть для определенности $\varepsilon_d = 1$. Представим выражение

$$\varphi\left(\left(N + \frac{1}{2} + 2\varepsilon_2 k_2 + \cdots + 2\varepsilon_{d-1} k_{d-1} + 2k_d\right)x_0\right)$$

в виде $\alpha \sin 2k_d x_0 + \beta \cos 2k_d x_0$, где α и β – соответствующие синус и косинус от $(N + 1/2 + 2\varepsilon_2 k_2 + \cdots + 2\varepsilon_{d-1} k_{d-1})x_0$, т.е. α и β не зависят от k_d . Тогда для рассматриваемого слагаемого из $\sum'$ имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2^d \sin(x_0/2)} \frac{1}{N} \sum_{k_2=1}^N \cdots \sum_{k_d=1}^N \frac{\pm 1}{k_2 \cdots k_d} \varphi\left(\left(N + \frac{1}{2} + 2\varepsilon_2 k_2 + \cdots + 2\varepsilon_{d-1} k_{d-1}\right)x_0\right) \right| \\ & \leq \frac{1}{2^{d-1} N} \sum_{k_2=1}^N \cdots \sum_{k_{d-1}=1}^N \frac{1}{k_2 \cdots k_{d-1}} \left(\left| \sum_{k_d=1}^N \frac{\sin 2k_d x_0}{k_d} \right| + \left| \sum_{k_d=1}^N \frac{\cos 2k_d x_0}{k_d} \right| \right) \\ & = O_d\left(\frac{1}{N} \log^{d-2}(N+1)\right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

так как для $x \in [\pi/3, \pi/2]$ суммы

$$\sum_{k=1}^N \frac{\sin 2kx}{k}, \quad \sum_{k=1}^N \frac{\cos 2kx}{k}$$

равномерно ограничены.

Оценка вида (3.14) справедлива для каждого слагаемого из $\sum'$, поэтому для достаточно больших N утверждение теоремы вытекает из (3.12)–(3.14).

Теорема доказана.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Университет штата Южная Каролина, США

Поступило
22.12.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hardy G. H. On double Fourier series and especially those which represent the double zeta-function with real and incommensurable parameters // Quart. J. Math. 1906. V. 37. P. 53–70.
- [2] Morse M., Transue W. The Fréchet variation and a generalization for multiple Fourier series of the Jordan test // Rev. Mat. Univ. Parma. 1950. V. 1. P. 3–18.
- [3] Chandrasekharan K., Minakshisundaram S. Some results on double Fourier series // Duke Math. J. 1947. V. 14. P. 731–753.
- [4] Темляков В. Н. О поведении частных сумм по гиперболическим крестам рядов Фурье периодических функций многих переменных // Тр. МИАН. 1990. Т. 192. С. 197–206.
- [5] Теляковский С. А. Об оценках производных тригонометрических полиномов многих переменных // Сиб. матем. ж. 1963. Т. 4. С. 1404–1411.
- [6] Дьяченко М. И. Некоторые проблемы теории кратных тригонометрических рядов // УМН. 1992. Т. 47. № 5. С. 96–162.
- [7] Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
- [8] Теляковский С. А. Равномерная ограниченность некоторых тригонометрических полиномов многих переменных // Матем. заметки. 1987. Т. 42. С. 33–39.