Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Чеботарев, Квантовое стохастическое уравнение унитарно эквивалентно симметричной краевой задаче для уравнения Шредингера, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 4, 612–622

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1539>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:32:59

УДК 519.217

КВАНТОВОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ УНИТАРНО ЭКВИВАЛЕНТНО СИММЕТРИЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

А. М. Чеботарев

Показано, что решение квантового стохастического уравнения Хадсона–Партасарати в фоковском пространстве совпадает с решением симметричной краевой задачей для уравнения Шрёдингера в представлении взаимодействия, порождаемом оператором энергии окружения. Краевые условия описывают скачки фазы и амплитуды Фурье-образов компонент фоковского вектора при перемене знака любого из его аргументов. Соответствующее уравнение марковской эволюции (уравнение Линдблада или “master equation”) выводится исходя из краевой задачи для уравнения Шрёдингера.

Библиография: 28 названий.

1. Введение. Наш интерес к теории квантовых стохастических дифференциальных уравнений связан прежде всего с возможностью представить с их помощью решения уравнения марковской эволюции, обобщающего уравнения Гейзенберга, Колмогорова–Феллера и уравнение теплопроводности [1]–[4].

Решения уравнений марковской эволюции изучаются в теории открытых квантовых систем [5]–[8] и называются *квантовыми динамическими полугруппами*. Одним из следствий стохастического представления квантовых динамических полугрупп в алгебрах фон Неймана является простая связь между свойством консервативности полугруппы и изометричностью решения квантовых стохастических дифференциальных уравнений. Консервативность (или унитарность) квантовой динамической полугруппы означает сохранение единицы операторной алгебры и соответствует сохранению полной вероятности решениями уравнений для переходных вероятностей случайных процессов в классическом и квантовом случаях. Нарушение этого свойства связано с критическими явлениями типа взрыва, ухода решения на бесконечность, накопления бесконечного числа точек разрыва, неоднозначностью решения задачи Коши, наличием растущих решений у формально диссипативных уравнений и т.п. [9], [10]. Изучение необходимых и достаточных условий возникновения или отсутствия таких явлений представляет большой интерес [11]–[18].

В последние годы в основном пертурбативными методами были получены достаточные критерии изометричности и унитарности решений квантовых динамических полугрупп [19]–[21]. Однако, не были найдены симметричные операторы, ответственные за унитарность и изометричность решений квантовых стохастических дифференциальных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95–01–00784.

уравнений. Трудности на этом пути сводятся, во-первых, к отсутствию группового свойства решений (см. [22]) и, во-вторых, к несимметричности формальных генераторов на областях определения, состоящих из гладких функций. Более точно (см. [23]), формальные генераторы уравнений Шрёдингера, унитарно эквивалентных квантовым стохастическим дифференциальным уравнениям, имеют вид диссипативных операторов, возмущенных сингулярными в смысле [24], [25] квадратичными формами. Наличие неограниченной антиэрмитовой части у диссипативной составляющей генератора затрудняет использование общей теории, развитой для построения самосопряженных расширений ограниченных снизу симметричных операторов, возмущенных сингулярными квадратичными формами [24]–[26].

В настоящей работе рассматриваются квантовые стохастические дифференциальные уравнения, решения которых в представлении взаимодействия являются пределами решений семейства уравнений Шрёдингера в фоковском пространстве [23]. Принципиальным свойством резольвенты предельной унитарной группы является наличие скачков амплитуды и фазы у функций из области ее значений в точках сингулярности квадратичной формы генератора предельной унитарной группы. Вычисляя действие генератора группы на множестве функций с разрывами амплитуды и фазы, мы получаем симметричный оператор, самосопряженность которого проверяется независимым образом при менее ограничительных предположениях, чем те, которые используются при явном построении резольвенты. Таким образом, доказывается эквивалентность квантового стохастического дифференциального уравнения и краевой задачи для уравнения Шрёдингера в фоковском пространстве. Прямые вычисления позволяют вывести уравнение марковской эволюции непосредственно из краевой задачи для уравнения Шрёдингера.

Начнем с простого примера, демонстрирующего различие между слабым формальным пределом, сильным резольвентным пределом последовательности генераторов унитарных групп и действием генератора предельной унитарной группы на множестве значений резольвенты.

2. Слабый и резольвентный пределы семейства генераторов унитарных однопараметрических групп. Рассмотрим семейство унитарных групп $\exp\{it\hat{H}_\alpha\} = U_t^{(\alpha)}$, действующих в $L_2(\mathbb{R})$:

$$U_t^{(\alpha)}\psi(x) = \psi(x-t) \exp\left\{i\lambda \int_0^t d\tau V_\alpha(x-t+\tau)\right\}, \quad x, \lambda \in \mathbb{R},$$

где $V_\alpha(x) = (2\pi\alpha)^{-1/2} \exp\{-x^2/2\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Очевидно, что $V_\alpha(x) \rightarrow \delta(x)$ при $\alpha \rightarrow +0$. Поэтому *слабый предел* семейства существенно самосопряженных операторов $\hat{H}_\alpha = i\partial_x + \lambda V_\alpha(x)$ описывается билинейной формой

$$\hat{H}_w[\varphi, \psi] = (\varphi, \hat{H}_w\psi) = i(\varphi, \psi') + \lambda \overline{\varphi}(0)\psi(0), \quad (2.1)$$

корректно определенной на функциях из $W_2^1(\mathbb{R})$.

С другой стороны,

$$\int_0^t d\tau V_\alpha(x-t+\tau) \rightarrow I_{[0,t)}(x),$$

где $I_T(x)$ – индикаторная функция борелевского множества $T \subseteq \mathbb{R}$. Следовательно, *сильный предел* семейства унитарных групп равен

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} U_t^{(\alpha)}\psi(x) = U_t\psi(x) = e^{it\hat{H}_R}\psi(x) = \psi(x-t)e^{i\lambda I_{[0,t)}(x)}.$$

Заметим, что имеет место тождество $e^{i\lambda I_{[0,t)}(x)} = (e^{i\lambda} - 1)I_{[0,t)}(x) + 1$. Поэтому билинейная форма резольвентного предела $\hat{\mathbf{H}}_R = r\text{-}\lim \hat{H}_\alpha$ корректно определена на $W_2^1(\mathbb{R})$ и действует по правилу

$$\hat{\mathbf{H}}_R[\varphi, \psi] = i^{-1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} (\varphi, U_t \psi) \Big|_{t=0} = i(\varphi, \psi') + i(e^{i\lambda} - 1)\overline{\varphi}(0)\psi(0). \quad (2.2)$$

Сравнивая (2.1) и (2.2), получаем $\hat{\mathbf{H}}_R = r\text{-}\lim \hat{H}_\alpha \neq w\text{-}\lim H_\alpha = \hat{H}_w$.

Множество значений резольвенты предельной унитарной группы U_t является естественной областью определения генератора $\hat{\mathbf{H}}_R$ и в рассматриваемом примере может быть описано явно:

$$R_\mu \psi(x) = \int_0^\infty dt e^{-\mu t} \psi(x-t) + \theta(x)(e^{i\lambda} - 1)e^{-\mu x} \int_0^\infty dt e^{-\mu t} \psi(-t),$$

где $\theta(x)$ – индикаторная функция полупрямой $\mathbb{R}_+$. Такая структура резольвенты указывает на то, что функции из области определения ее генератора $\hat{\mathbf{H}}_R$ имеют скачок фазы при $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +0} R_\mu \psi(x) = e^{i\lambda} \lim_{x \rightarrow -0} R_\mu \psi(x).$$

Следовательно, область определения $\mathcal{D}_\lambda$ генератора $\hat{\mathbf{H}}_R$ состоит из функций

$$\psi : \quad \psi \in W_2^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad \lim_{x \rightarrow +0} \psi(x) = e^{i\lambda} \lim_{x \rightarrow -0} \psi(x). \quad (2.3)$$

При $x \neq 0$ оператор $\hat{\mathbf{H}}_R$ действует как $i\partial_x$. Левый и правый пределы в нуле для функций из $\mathcal{D}_\lambda$ существуют в силу вложения $W_2^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Симметричность оператора $\hat{\mathbf{H}}_R$ следует из формулы интегрирования по частям и равенства

$$\overline{\varphi(x)}\psi(x) \Big|_{+0}^0 = 0$$

для функций из $\mathcal{D}_\lambda$, а его самосопряженность вытекает (см. [27]) из разрешимости в $\mathcal{D}_\lambda$ уравнения $(\hat{\mathbf{H}}_R + i\mu)\psi(x) = f(x)$, $x \neq 0$, с граничным условием (2.3) для любой правой части из $L_2(\mathbb{R})$ при $\mu = \pm 1$.

3. Слабый и сильный резольвентный пределы решений уравнения Шрёдингера в фоковском пространстве. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, $\Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$ – симметричное фоковское пространство и $\mathbf{h} = \mathcal{H} \otimes \Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$ – их тензорное произведение. Для $v, g \in L_2(\mathbb{R})$ обозначим через $A^+(v)$, $A(g)$ стандартные операторы рождения и уничтожения в $\Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$ и рассмотрим семейство уравнений Шрёдингера $\partial_t \psi_t = iH\psi_t$ с самосопряженным в $\mathbf{h}$ гамильтонианом $\mathbf{H} = H_0 \otimes I + I \otimes \hat{E} + H_{\text{int}}$:

$$H_{\text{int}} = K \otimes A^+(g)A(g) + R \otimes A^+(f) + R^* \otimes A(f), \quad \hat{E} = \int \omega a^+(\omega)a(\omega) d\omega. \quad (3.1)$$

Для упрощения в дальнейшем предполагается, что операторы H_0 , K , $R \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ коммутируют и имеют общее спектральное семейство E_λ . Более точно, пусть

$$H_0 = \int \nu(\lambda) dE_\lambda, \quad K = \int \lambda dE_\lambda, \quad R = \int \rho(\lambda) e^{i\Phi(\lambda)} dE_\lambda,$$

где ν, ρ, Φ – измеримые вещественные функции, соответствующие операторам H_0, K, R , т.е. операторы H_0, K самосопряженные, а R нормальный.

Обозначим через $\hat{P}_t(\lambda)$ однопараметрическую группу унитарных операторов в $L_2(\mathbb{R})$ с генератором $\hat{N}(\lambda) = \omega + \lambda|g\rangle\langle g|$. Унитарная группа $U_t = \exp\{i\mathbf{H}t\}$ может быть построена методом преобразования гамильтониана к каноническому виду (см. [28]) либо с помощью использования представления взаимодействия, порождаемого оператором $I \otimes \hat{E} + K \otimes A^+(g)A(g)$ (см. [23]). Теорема 3.1 описывает действие U_t на когерентные векторы.

ТЕОРЕМА 3.1. *Унитарная однопараметрическая группа операторов $U_t = \exp\{it\mathbf{H}\}$, где $\mathbf{H} = H_0 \otimes I + I \otimes \hat{E} + H_{\text{int}}$, а оператор H_{int} определен формулой (3.1), действует по правилу*

$$U_t h \otimes \psi(v) = \int e^{i\nu(\lambda)t} dE_\lambda h \otimes \psi(v_t(\lambda)) \exp\left\{i\rho(\lambda)e^{-i\Phi(\lambda)} \int_0^t (f, v_s(\lambda)) ds\right\}, \quad (3.2)$$

где

$$v_t(\lambda) = \hat{P}_t(\lambda)v + i\rho(\lambda)e^{i\Phi(\lambda)} \int_0^t \hat{P}_s(\lambda)f ds.$$

Обозначим через $L_{2,\hat{\Gamma}}^+(\mathbb{R})$ множество функций из $\widetilde{W}_2^1(\mathbb{R})$, имеющих абсолютно интегрируемый положительный Фурье-образ, $\widetilde{W}_2^1(\mathbb{R})$ – Фурье-образ соболевского пространства $W_2^1(\mathbb{R})$. Пусть $f, g \in L_{2,\hat{\Gamma}}^+(\mathbb{R})$ – такие вещественные функции, что $f(0) = g(0) = 1/\sqrt{2\pi}$, и $f^{(\alpha)}(\omega) = f(\alpha\omega)$, $g^{(\alpha)}(\omega) = g(\alpha\omega)$.

ЛЕММА 3.1 (о четырех пределах). *Пусть $\hat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda)$ – однопараметрическая унитарная группа операторов в $L_2(\mathbb{R})$ с генератором $\hat{N}_\alpha(\lambda) = \omega + \lambda|g^{(\alpha)}\rangle\langle g^{(\alpha)}|$ и $\hat{\pi}_T = \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} I_T(t) \mathcal{F}_{\omega \rightarrow t}^*$ – семейство проекторов из $\mathcal{H}(L_2)(\mathbb{R})$. Тогда при $\alpha \rightarrow 0$ существуют пределы*

- 1) $\lim \int_0^t ds (g^{(\alpha)}, \hat{P}_s^{(\alpha)}(\lambda) f^{(\alpha)}) = (2 - i\lambda)^{-1}$;
- 2) $w - \lim \int_0^t ds \hat{P}_s^{(\alpha)}(\lambda) f^{(\alpha)}(\omega) = e^{i\omega t} \tilde{I}_{(0,t)}(\omega) (1 - i\lambda/2)^{-1}$;
- 3) $w - \lim (g^{(\alpha)}, \hat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda)v) = (1 - i\lambda/2)^{-1} \mathcal{F}_{\omega \rightarrow t}^* v$;
- 4) $s - \lim \hat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda) = \exp\{iZ(\lambda)\hat{\pi}_{(0,t)}\} = \hat{P}_t(\lambda)$, $\exp\{iZ(\lambda)\} = (2 + i\lambda)/(2 - i\lambda)$.

Рассмотрим семейство $\mathbf{H}_\alpha$ самосопряженных гамильтонианов (3.1), параметризованных функциональными аргументами операторов рождения и уничтожения $f^{(\alpha)}(\omega)$, $g^{(\alpha)}(\omega)$. Лемма 3.1 (см. [23]) обосновывает предельный переход в (3.2) при $\alpha \rightarrow +0$. Пределы 1)–4) соответствуют предельным переходам в четырех составляющих решения (3.2), зависящих от α . Подставляя 1)–4) в (3.2), получаем предельную унитарную группу $U_t = \exp\{i\mathbf{H}t\} = s - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \exp\{i\mathbf{H}_\alpha t\}$:

$$U_t h \otimes \psi(v) = \int e^{iH(\lambda)t} dE_\lambda h \psi\left(e^{iZ(\lambda)\hat{\pi}_{(0,t)}} e^{i\omega t} v + \frac{2i}{2 - i\lambda} \rho(\lambda) e^{i\Phi(\lambda)} \tilde{I}_{(0,t)}\right) \times \exp\left\{\rho(\lambda) e^{-i\Phi(\lambda)} \frac{2i}{2 - i\lambda} (\tilde{I}_{(0,t)}, e^{i\omega t} v)\right\}, \quad (3.3)$$

где $H(\lambda) = \nu(\lambda) + i\rho^2/(2 - i\lambda)$. Обозначим через W и L операторы со спектральными плотностями $(2 + i\lambda)/(2 - i\lambda)$ и $2i/(2 - i\lambda) \rho(\lambda) e^{i\Phi(\lambda)}$ соответственно.

Тогда $2i\rho(\lambda)e^{-i\Phi(\lambda)}/(2-i\lambda)$ – спектральная плотность оператора $-L^*W$, причем $W = (2+iK)/(2-iK)$ – преобразование Кэли самосопряженного оператора $2K$, $L = 2i/(2-iK)R$ – плотно определенный оператор такой, что $\text{dom } L \supseteq \text{dom } R$, а $H(\lambda)$ – спектральная функция оператора $iG = H_0 - \frac{1}{4}L^*KL + \frac{i}{2}L^*L$. В дальнейшем изложении предполагается, что оператор $-G$ является генератором сильно непрерывной сжимающей однопараметрической полугруппы $W_t = \exp\{-Gt\}$, действующей в $\mathcal{H}$, причем

$$D = \text{dom } H \cap \text{dom } L^*L \subseteq \text{dom } G \subseteq \text{dom } L, \quad G^*\varphi + G\varphi = L^*L\varphi \quad \forall \varphi \in D,$$

где оператор $H = -H_0 + \frac{1}{4}L^*KL$ симметричен на D . В этих обозначениях билинейная форма

$$\mathbf{H}[g \otimes \psi(f), h \otimes \psi(v)] = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{i} \frac{d}{dt} (g \otimes \psi(f), U_t h \otimes \psi(v)),$$

где $g, h \in D \subseteq \mathcal{H}$, $f, v \in \widetilde{W}_2^1(\mathbb{R})$, действует по правилу

$$\begin{aligned} \mathbf{H}[g \otimes \psi(f), h \otimes \psi(v)] = e^{(f,v)_{L_2}} & \left(i(g, Gh)_{\mathcal{H}} - i(g, Lh)_{\mathcal{H}} \overline{\widetilde{f}(0)} + i(Lg, Wh)_{\mathcal{H}} \widetilde{v}(0) \right. \\ & \left. + (g, h)_{\mathcal{H}} \int d\omega \overline{\widetilde{f}(\omega)} g(\omega) \omega + i(g, (I-W)h)_{\mathcal{H}} \overline{\widetilde{f}(0)} \widetilde{v}(0) \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Билинейная форма (3.4) имеет регулярную диссипативную составляющую $\frac{i}{2}L^*L \otimes I$ и сингулярную в смысле [24], [25] составляющую

$$-iL \otimes A^+ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) + iL^*W \otimes A \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) + i(I-W) \otimes A^+ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) A \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right),$$

обращающуюся в нуль на тотальном в $\mathbf{h}$ подмножестве

$$\mathcal{D}_0 = \{ \Phi : \Phi = h \otimes \psi(v), v \in \widetilde{W}_2^1(\mathbb{R}), \widetilde{v}(0) = 0, h \in D \}.$$

В то же время нетрудно видеть, что слабый предел последовательности H_α описывается билинейной формой, имеющей другие регулярную и сингулярную составляющие:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} H_\alpha[g \otimes \psi(f), h \otimes \psi(v)] = e^{(f,v)_{L_2}} & \left((g, H_0 h)_{\mathcal{H}} + (g, h)_{\mathcal{H}} \int \omega d\omega \overline{\widetilde{f}(\omega)} g(\omega) \right. \\ & \left. + (g, Kh)_{\mathcal{H}} \overline{\widetilde{f}(0)} \widetilde{v}(0) + (g, Rh)_{\mathcal{H}} \overline{\widetilde{f}(0)} - (Rg, h)_{\mathcal{H}} \widetilde{v}(0) \right). \end{aligned}$$

Здесь так же, как и в примере из второго раздела,

$$r - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathbf{H}_\alpha \neq w - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathbf{H}_\alpha.$$

Рассмотрим функцию множества $u(s, t) = J_s U_{t-s} J_t^*$, где J_t – унитарная однопараметрическая группа с генератором $\widehat{E} = \int d\omega \omega a^+(\omega) a(\omega)$ (см. [7]), действующая в Γ^S по правилу $J_t \psi(v) = \psi(e^{i\omega t} v)$.

Учитывая, что $J_t^* \psi(v) = \psi(e^{-i\omega t} v)$, мы получаем из (3.3)

$$u(T)h \otimes \psi(v) = \int e^{iH(\lambda) \text{mes } T} dE_\lambda h \otimes \psi \left(e^{iZ(\lambda)\hat{\pi}_T} v + i\rho(\lambda)e^{i\Phi(\lambda)} \frac{2}{2-i\lambda} \tilde{I}_T \right) \\ \times \exp \left\{ i\rho(\lambda)e^{-i\Phi(\lambda)} \frac{2}{2-i\lambda} (\tilde{I}_T, v) \right\}. \quad (3.5)$$

Семейство коммутирующих операторов $u(T)$ удовлетворяет закону композиции $u(T_1 \cup T_2) = u(T_1)u(T_2)$ для непересекающихся множеств, а дифференциал билинейной формы $(g \otimes \psi(f), u(0, t)h \otimes \psi(v))$ удовлетворяет слабому квантовому стохастическому дифференциальному уравнению [2]

$$d(h \otimes \psi(v), u(0, t)h \otimes \psi(v)) = i(h \otimes \psi(v), u(0, t)H(dt_+)h \otimes \psi(v)), \quad (3.6)$$

где

$$iH(T) = M(T) = \int_T dt J_t(\mathbf{H} - \hat{E} \otimes I)J_t^*, \\ M(T) = -G \otimes \text{mes } T + L \otimes A^+(T) - L^*W \otimes A(T) + (W - I) \otimes \Lambda(T).$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.2. *С точностью до унитарного преобразования J_t семейство решений уравнения Шрёдингера с гамильтонианом (3.1) сильно сходится в $\mathbf{h}$ к решению $u(t)$ стохастического уравнения (3.6) $u(0, t) = s - \lim_{\alpha \rightarrow 0} U_t^{(\alpha)} J_t^*$.*

Как мы увидим ниже, неожиданным обстоятельством является то, что естественная область определения генератора группы U_t (множество значений резольвенты) не содержит функций, на которых корректно определена билинейная форма (3.4): Фурье-образы фоковских компонент резольвенты имеют скачки амплитуды и фазы при смене знака аргументов.

4. Сюрпризы резольвенты. Рассмотрим вектор $\Phi \in \mathbf{h} = \mathcal{H} \otimes \Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$:

$$\Phi = R_\mu h \otimes \psi(v) = \int_0^\infty dt e^{-\mu t} U_t h \otimes \psi(v) = \{\Phi_n(\omega)\}, \\ \Phi_n(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{H}, \quad \omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\},$$

с компонентами (3.3)

$$\Phi_n(\omega) = \int_0^\infty dt \exp \left\{ -\mu(G+t) - L^*W \int_0^t \tilde{v}(-\tau) d\tau \right\} \varphi_{n,t}(\omega), \\ \varphi_{n,t}(\omega) = \prod_{k=1}^n ((W-1)\pi_{[0,t)} e^{i\omega_k t} v(\omega_k) + e^{i\omega_k t} v(\omega_k) + L\tilde{I}_{[0,t)}(\omega_k))h,$$

где L, W, G – введенные выше коммутирующие операторы со спектральными плотностями

$$L(\lambda) = 2i\rho(\lambda)e^{-i\Phi(\lambda)}(2-i\lambda)^{-1}, \quad W(\lambda) = e^{iZ(\lambda)}, \quad G(\lambda) = -i\nu(\lambda) + \frac{\rho(\lambda)^2}{(2-i\lambda)}.$$

Обозначим через $\tilde{\varphi}_{n,t}$ Фурье-прообраз функции $\varphi_{n,t}$ по переменным ω_k

$$\tilde{\varphi}_{n,t}(\tau) = \prod_1^n ((W - I)I_{[0,t)}(\tau_k)\tilde{v}(\tau_k - t) + \tilde{v}(\tau_k - t) + LI_{[0,t)}(\tau_k))h,$$

где $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$. Пусть $\mathcal{K}$ – подмножество в $\{1, \dots, n\}$ и $\mathcal{K}^a$ – его дополнение.

Положим

$$P_{\mathcal{K},t}^{(n)}(\tau) = \prod_{k \in \mathcal{K}} ((W - I)\tilde{v}(\tau_k - t) + L)I_{[0,t)}(\tau_k) \in \mathcal{B}(\mathbf{h}).$$

Тогда

$$\tilde{\varphi}_{n,t}(\tau) = \sum_{\mathcal{K}} \left(P_{\mathcal{K},t}^{(n)}(\tau) \prod_{m \in \mathcal{K}^a} \tilde{v}(\tau_m - t) \right) h. \quad (4.1)$$

Нетрудно видеть, что функции $P_{\mathcal{K},t}^{(n)}(\tau)$ имеют разрывы первого рода при смене знака переменных τ_k :

$$\begin{aligned} \lim_{\tau_k \rightarrow -0} P_{\mathcal{K},t}^{(n)}(\tau) &= I_{\mathcal{K}^a}(k)P_{\mathcal{K},t}^{(n)}(\tau), \\ \lim_{\tau_k \rightarrow +0} P_{\mathcal{K},t}^{(n)}(\tau) &= I_{\mathcal{K}^a}(k)P_{\mathcal{K},t}^{(n)}(\tau) + ((W - I)\tilde{v}(-t) + L)P_{\mathcal{K} \setminus \{k\},t}^{(n-1)}(\tau). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Поэтому (4.2) дает следующее значение для разности подстановок:

$$P_{\mathcal{K},t}^{(n)}(\tau) \Big|_{\tau_k = -0}^{\tau_k = +0} = -((W - I)\tilde{v}(-t) + L)P_{\mathcal{K} \setminus \{k\},t}^{(n-1)}(\tau)I_{\mathcal{K}}(k). \quad (4.3)$$

Вычислим скачок $\tilde{\varphi}_{n,t}(\tau)$ при изменении знака τ_k . Заметим, что

$$\lim_{\tau_k \rightarrow -0} \tilde{\varphi}_{n,t}(\tau) = \tilde{v}(-t)\tilde{\varphi}_{n-1,t}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}, \tau_{k+1}, \dots, \tau_n).$$

Учитывая (4.1) и (4.3), находим значения скачка амплитуды и фазы функций из области определения инфинитезимального оператора группы U_t

$$\lim_{\tau_k \rightarrow +0} \tilde{\varphi}_{n,t}(\tau) = W \lim_{\tau_k \rightarrow -0} \tilde{\varphi}_{n,t}(\tau) + L\tilde{\varphi}_{n-1,t}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}, \tau_{k+1}, \dots, \tau_n). \quad (4.4)$$

Обозначим через $\mathcal{D}_{W,L} = D \otimes \Gamma^S(\widetilde{W}_2^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ векторное подпространство в $\mathbf{h}$, элементы которого удовлетворяют условию (4.4), а через $A(\delta_{\pm})$, $\Lambda(\delta_{\pm})$, $\hat{N}$ обозначим операторы, действующие на фоковские векторы по правилам

$$\begin{aligned} (\Phi, \Lambda(\delta_{\pm})\Psi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \int_{(\mathbb{R} \setminus \{0\})^{n-1}} \prod_{m \neq k} d\tau_m (\tilde{\Phi}_n, \tilde{\Psi}_n)_{\mathcal{H}} \Big|_{\tau_k = \pm \varepsilon}, \\ \mathcal{F}_{\omega \rightarrow \tau}(A(\delta_{\pm})\Psi)_n(\tau) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sum_{k=1}^n \tilde{\Psi}_{n+1}(\tau) \Big|_{\tau_k = \pm \varepsilon}, \quad \hat{N}\Psi_n(\omega) = n\Psi_n(\omega). \end{aligned}$$

В этих обозначениях краевое условие (4.4) в Γ^S принимает вид

$$(\hat{N} + 1)^{-1}(I \otimes A(\delta_+) - W \otimes A(\delta_-))\Psi = L \otimes I\Psi. \quad (4.5)$$

Оно накладывается на компоненты фокковского вектора $\Psi_1, \Psi_2, \dots$ и является обобщением условия (2.2) для фокковского пространства.

Покажем, что оператор

$$\hat{H} = iG \otimes I + I \otimes \hat{E} + iL^*W \otimes A(\delta_-), \quad \hat{E} = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} d\tau a^+(\tau) a(\tau) i\partial_\tau, \quad (4.6)$$

симметричен на $\mathcal{D}_{W,L}$. Пусть $\Phi, \Psi \in \mathcal{D}_{W,L}$ и пусть B – эрмитов оператор, $\text{dom } B \otimes I \supseteq \mathcal{D}_{W,L}$. Формула интегрирования по частям дает тождество, в котором разность подстановок выражается через операторы $\Lambda(\delta_\pm)$

$$\begin{aligned} (\Phi, B \otimes \hat{E}\Psi) - (B \otimes \hat{E}\Phi, \Psi) &= i(\Phi, B \otimes (\Lambda(\delta_-) - \Lambda(\delta_+))\Psi) \\ &= i \sum_1^\infty \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \int_{(\mathbb{R} \setminus \{0\})^{n-1}} \prod_{m \neq k} d\tau_m (\tilde{\Phi}_n(\tau), B\tilde{\Psi}_n(\tau))_{\mathcal{H}} \Big|_{\tau_k = +0}^{\tau_k = -0}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Используя краевое условие (4.5) для функций $\tilde{\varphi}_n$ и $\tilde{\psi}_n$, находим разность подстановок значения интеграла (4.7):

$$\begin{aligned} i(\Phi, B \otimes (\Lambda(\delta_+) - \Lambda(\delta_-))\Psi) &= i(\Phi, (W^*BW - B)\Lambda(\delta) - \Psi) \\ &\quad + i(L\Phi, BL\Psi) + i(WA(\delta_-)\Phi, BL\Psi) + i(L\Phi, BWA(\delta_-)\Psi). \end{aligned} \quad (4.8)$$

В частности, при $B = I$ (4.8) упрощается:

$$i(\Phi, I \otimes (\Lambda(\delta_+) - \Lambda(\delta_-))\Psi) = i(\Phi, L^*L\Psi) - (iL^*W \otimes A(\delta_-)\Phi, \Psi) + (\Phi, iL^*W \otimes A(\delta_-)\Psi).$$

Учитывая, что $iG - iL^*L = (iG)^*$, мы получаем отсюда тождество, означающее симметричность оператора $\hat{H}$ на $\mathcal{D}_{W,L}$:

$$\begin{aligned} (\Phi, \hat{H}\Psi) &= ((I \otimes \hat{E})\Phi, \Psi) + (\Phi, \{iG \otimes I + iL^*W \otimes A(\delta_-)\}\Psi) \\ &\quad - i(\Phi, I \otimes (\Lambda(\delta_+) - \Lambda(\delta_-))\Psi) \\ &= ((I \otimes \hat{E})\Phi, \Psi) + (\Phi, (iG)^* \otimes I\Psi) + (iL^*W \otimes A(\delta_-)\Phi, \Psi) = (\hat{H}\Phi, \Psi). \end{aligned}$$

Вычислим действие производящего оператора группы U_t на множестве значений резольвенты. Пусть $\Psi \in \mathfrak{h}$, $\Phi = R_\mu h \otimes \psi(v)$. Из определения производящего оператора имеем

$$\begin{aligned} (\Psi, \hat{H}\Phi) &= \lim_{s \rightarrow +0} \frac{1}{i} \frac{d}{ds} (\Psi, U_s\Phi) = \frac{1}{i} \int_0^\infty dt \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R} \setminus \{0\})^n} d\tau \\ &\quad \times \left(\tilde{\psi}_n(\tau), \frac{d}{ds} e^{-(G+\mu)t - Gs - iL^*W \int_0^{t+s} \tilde{v}(-\tau) d\tau} \tilde{\varphi}_{n,t+s}(\tau) \right)_{\mathcal{H}} \Big|_{s=0}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Заметим, что функции $\tilde{\varphi}_{n,t}(\tau)$ зависят от разностей $\tau_k - t$. Поэтому

$$\frac{d}{dt} \tilde{\varphi}_{n,t}(\tau) = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \tau_k} \tilde{\varphi}_{n,t}(\tau) = i\hat{E} \tilde{\varphi}_{n,t}(\tau). \quad (4.10)$$

С другой стороны, из определения оператора $A(\delta_-)$ следует

$$\widetilde{A(\delta_-)} \varphi_{n,t}(\tau) = n\tilde{v}(-t) \varphi_{n-1,t}(\tau). \quad (4.11)$$

Теперь, учитывая определение (4.9) и тождества (4.10) и (4.11), получаем

$$\begin{aligned} (\Psi, \hat{H}\Phi)_{\mathbf{h}} &= \int_0^\infty dt \left(\psi_0, iGe^{-(G+\mu)t - iL^*W \int_0^t \tilde{v}(-\tau) d\tau} h \right)_{\mathcal{H}} + \int_0^\infty dt \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R} \setminus \{0\})^n} d\tau \\ &\quad \times \left(\tilde{\psi}_n(\tau), e^{-(G+\mu)t - iL^*W \int_0^t \tilde{v}(-\tau) d\tau} \left(iG + iL^*W \tilde{v}(-t) + i \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \tau_k} \right) \tilde{\varphi}_{n,t}(\tau) \right)_{\mathcal{H}} \\ &= (\Psi, \{iG + iL^*W \otimes A(\delta_-) + I \otimes \hat{E}\}\Phi)_{\mathbf{h}}, \end{aligned}$$

т.е. производящий оператор $\hat{H}$ группы U_t имеет вид (4.6). Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. *Симметричный на $\mathcal{D}_{W,L}$ оператор $\hat{H} = iG \otimes I + I \otimes \hat{E} + iL^*W \otimes A(\delta_-)$ ($G = iH + \frac{1}{2}L^*L$, $H = \frac{1}{4}L^*KL - H_0$) является производящим оператором унитарной однопараметрической группы U_t .*

Важно отметить, что проверка симметричности не предполагает коммутативность операторов L, G, W и легко распространяется на операторы вида

$$\hat{H} = iG + I \otimes \hat{E} + i \sum_{l,m} L_l^* W_{l,m} \otimes A_m(\delta_-) \quad (4.12)$$

с краевым условием

$$(\hat{N} + 1)^{-1} \left(I \otimes A_l(\delta_+) - \sum_m W_{l,m} \otimes A_m(\delta_-) \right) \Psi = L_l \otimes I \Psi, \quad (4.13)$$

где $W = \{W_{l,m}\} - (M \times M)$ -матрица с коэффициентами из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ такая, что $W^*W = I$, а $\{A_m(g) : g \in L_2(\mathbb{R}), 1 \leq m \leq M\}$ – операторы уничтожения в $\Gamma^S(L_2(\mathbb{R}^M))$, коммутирующие при различных l .

5. Уравнение марковской эволюции. В заключение опишем вывод уравнения марковской эволюции из задачи Коши для уравнения Шрёдингера

$$\frac{d}{dt} \Psi(t) = \left(-G + iI \otimes \hat{E} - \sum_{l,m} L_l^* W_{l,m} \otimes A_m(\delta_-) \right) \Psi(t)$$

с краевым условием (4.13). Пусть B – эрмитов оператор из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $h, g \in D$. Рассмотрим уравнение для среднего значения

$$(g, P_t(B)h)_{\mathcal{H}} = (U_t g \otimes \Psi(0) | B \otimes I | U_t h \otimes \Psi(0))_{\mathbf{h}}.$$

Из (4.12) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (g, P_t(B)h)_{\mathcal{H}} &= - \left(\left(G + \sum_{l,m} L_l^* W_{l,m} A_m(\delta_-) \right) U_t g \otimes \Psi(0) | B \otimes I | U_t h \otimes \Psi(0) \right) \\ &\quad - \left(U_t g \otimes \Psi(0) | B \otimes I | \left(G + \sum_{l,m} L_l^* W_{l,m} A_m(\delta_-) \right) U_t h \otimes \Psi(0) \right) \\ &\quad + \left(U_t g \otimes \Psi(0) | B \otimes (\Lambda(\delta_+) - \Lambda(\delta_-)) | U_t h \otimes \Psi(0) \right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Теперь воспользуемся тождеством (4.8), которое в данном случае записывается в виде

$$\begin{aligned} \left(\Phi, B \otimes (\Lambda(\delta_+) - \Lambda(\delta_-)) \Psi \right) &= \sum_{l,m} \left(\Phi, (W_{l,m}^* B W_{l,m} - B) \Lambda_m(\delta_-) \Psi \right) \\ &+ \sum_l (L_l \Phi, B L_l \Psi) + \sum_{l,m} \left((W_{l,m} A_m(\delta_-) \Phi, B L_l \Psi) + (L_l \Phi, B W_{l,m} A_m(\delta_-) \Psi) \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Учитывая, что $A(\delta_-)\Psi(0) = 0$, $\Lambda(\delta_-)\Psi(0) = 0$, получаем из (5.1), (5.2)

$$\left. \frac{d}{dt} (g, P_t(B)h) \right|_{t=0} = (g, \mathcal{L}(B)h) = -(Gg, Bh) - (g, BGh) + \sum_l (L_l g, B L_l g).$$

Таким образом, получено производящее отображение $\mathcal{L}(\cdot)$ в форме Линдблада для уравнения марковской эволюции

$$\frac{d}{dt} P_t(B) = \mathcal{L}(P_t(B)), \quad \mathcal{L}(B) = -G^* B - B G + \frac{1}{2} \sum_l L_l^* B L_l, \quad G = iH + \frac{1}{2} \sum_m L_m^* L_m.$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11.12.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lindblad G. On the generators of quantum dynamical semigroups // Comm. Math. Phys. 1976. V. 48. №2. P. 119–130.
- [2] Hudson R. L., Parthasarathy K. R. Quantum Ito's formula and stochastic evolutions // Comm. Math. Phys. 1984. V. 93. №3. P. 301–323.
- [3] Parthasarathy K. R. An introduction to quantum stochastic calculus. Basel: Birkhauser, 1992.
- [4] Meyer P. A. Quantum probability for probabilists. Lecture Notes in Math. V. 1338. Berlin: Springer Verlag, 1993.
- [5] Davies E. B. Quantum theory of open systems. London: Acad. Press, 1976.
- [6] Gorini V., Kossakovsky A., Sudarshan E. C. G. Completely positive dynamical semigroups of n -level systems // J. Math. Phys. 1976. V. 17. №3. P. 821–825.
- [7] Gardiner C. W., Collett M. J. Input and output in damped quantum systems: quantum statistical differential equations and the master equation // Phys. Rev. A. 1985. V. 31. P. 3761–3774.
- [8] А. Н. Колмогоров, С. П. Новиков (ред.) Квантовые случайные процессы и открытые системы. Сер. «Математика. Новое в зарубежной науке». Т. 42. М.: Мир, 1988.
- [9] Хасьминский Р. З. Эргодические свойства возвратных диффузий и стабилизация задачи Коши для параболического уравнения // Теория вероятн. и ее применения. 1960. Т. 5. №1. С. 196–214.
- [10] Ichihara K. Explosion problems for symmetric diffusion processes // Lecture Notes in Math. 1986. V. 1203. P. 75–89.
- [11] Чеботарев А. М. Необходимые и достаточные условия консервативности динамических полугрупп // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Новейшие достижения. Т. 36. М.: ВИНТИ, 1990. С. 149–184.
- [12] Чеботарев А. М. Достаточные условия для консервативности минимальной динамической полугруппы // Матем. заметки. 1992. Т. 52. №4. С. 112–122.

- [13] Chebotarev A. M., Fagnola F., Frigerio A. Towards a stochastic Stone's theorem // Stochastic partial differential equations and applications. Pitman Res. Notes Math. Ser. V. 268. Harlow: Longman Sci. Tech., 1992. P. 86–97.
- [14] Chebotarev A. M., Fagnola F. Sufficient conditions for conservativity of quantum dynamical semigroups // J. Funct. Anal. 1993. V. 113. № 1. P. 131–153.
- [15] Holevo A. S. On conservativity of covariant dynamical semigroups // Rep. Math. Phys. 1993. V. 33. P. 95–100.
- [16] Bhat B. V. R., Parthasarathy K. R. Markov dilations of non-conservative dynamical semigroups and a quantum boundary theory // Ann. Inst. H. Poincaré. Probab. Statist. 1995. V. 31. № 4. P. 601–651.
- [17] Holevo A. S. On the structure of covariant dynamical semigroups // J. Funct. Anal. 1995. V. 131. P. 255–278.
- [18] Чеботарев А. М., Гарсия Х. К., Гезада Р. Б. Об уравнении Линдблада с неограниченными переменными коэффициентами // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 1. С. 125–140.
- [19] Chebotarev A. M. Minimal solutions in classical and quantum probability // Quantum Probability and Related Topics. VII / ed. L. Accardi. Singapore: WorldScientific, 1992. P. 79–91.
- [20] Fagnola F. Characterization of isometric and unitary weakly differentiable cocycles in Fock space // Quantum Probability and Related Topics. VIII. Preprint № 358. Trento: UTM, 1993. P. 143–164.
- [21] Bhat B. V. R., Fagnola F., Sinha K. B. On quantum extensions of semigroups of Brownian motions on a half-line // Russian J. Math. Phys. 1996. V. 4. № 1. P. 13–28.
- [22] Journé J. L. Structure des cocycles markoviens sur l'espace de Fock // Probab. Theory Related Fields. 1987. V. 75. P. 291–316.
- [23] Чеботарев А. М. Симметризованная форма стохастического уравнения Хадсона–Партасарати // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 5. С. 726–750.
- [24] Кошманенко В. Д. Возмущения самосопряженных операторов сингулярными билинейными формами // Укр. матем. ж. 1989. Т. 41. № 1. С. 3–18.
- [25] Кошманенко В. Д. Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1993.
- [26] Albeverio S., Karwowski W., Koshmanenko V. Square powers of singularly perturbed operators // Math. Nachr. 1995. V. 173. P. 5–24.
- [27] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Наука, 1972.
- [28] Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.