Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Гусейнов, О задаче без начальных условий для уравнения теплопроводности, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 6, 824–832

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm154>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 18:28:12

УДК 517.95.4

О ЗАДАЧЕ БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Р. В. Гусейнов

Рассматривается внешняя задача без начальных условий для одного класса уравнений параболического типа. Доказывается теорема о существовании и единственности решения этой задачи, при этом существенно используется неравенство Харди для функциональных пространств с производными нецелого порядка, полученное ранее автором.

Библиография: 4 названия.

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_i}, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega = \mathbb{R}^n \setminus G$, G – ограниченная область, $-\infty < t < +\infty$,

$$m_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \leq m_2 |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad (2)$$

$m_1, m_2 = \text{const} > 0$, $a_{ij} \equiv a_{ji}$ – измеримые функции в $Q = \Omega \times (-\infty, +\infty)$.

Рассматривается обобщенное решение уравнения (1) такое, что

$$u|_{\partial G} = 0, \quad -\infty < t < +\infty. \quad (3)$$

Задачи такого типа для классического уравнения теплопроводности ($u_t = \Delta u$) рассматривались впервые Тихоновым [1] и были им названы “задачи без начальных условий”. В работе [1] исследован вопрос о единственности решения. Такого типа задачи рассматривались рядом математиков и позднее. В работе [2] доказано существование и единственность ограниченных классических решений. В [3] изучаются вопросы разрешимости и единственности решений задачи без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений второго порядка.

Дадим определение обобщенного решения задачи (1), (3).

Обобщенным решением задачи (1), (3) в Q называется функция $u(x, t)$ такая, что $u \in L_{2, \text{loc}}(Q)$,

$$\begin{aligned} D_Q(u) &= \int_Q \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx dt < \infty, \quad dx = dx_1 \cdots dx_n, \\ J_Q(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \frac{|u(x, t+h) - u(x, t)|^2}{|h|^2} dx dt dh < \infty \end{aligned} \quad (4)$$

и какова бы ни была $\theta(x) \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ функция $\theta(x)u(x, t) \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ при почти всех t , $-\infty < t < +\infty$.

Кроме того, если $\psi(x, t)$ – произвольная вещественная функция такая, что $\psi \in L_{2, \text{loc}}(Q)$, $D_Q(\psi) < \infty$, $J_Q(\psi) < \infty$, $\psi \equiv 0$ при достаточно большом $x^2 + t^2$, $\psi \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ при почти всех t , то

$$-i \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \lambda \tilde{u}(x, \lambda) \overline{\tilde{\psi}(x, \lambda)} dx d\lambda + \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dt + \sum_{i=1}^n \int_Q f_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dt = 0, \quad (5)$$

где $\tilde{\psi}(x, \lambda)$, $\tilde{u}(x, \lambda)$ – преобразования Фурье по t функций ψ , u соответственно. Заметим, что $u(x, t) \in L_2(-\infty, +\infty)$, $\psi(x, t) \in L_2(-\infty, +\infty)$ при почти всех x , так что преобразование Фурье этих функций определено.

Заметим, что

$$c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} |\lambda| |\tilde{u}|^2 d\lambda dx \leq J(u) \leq c_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} |\lambda| |\tilde{u}|^2 d\lambda dx; \quad (6)$$

следовательно, все интегралы в (5) сходящиеся.

ТЕОРЕМА 1. *Обобщенное решение задачи (1), (3) в Q существует и единственное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем сначала доказывать существование обобщенного решения. Обозначаем:

$$\begin{aligned} Q_{a,b} &= \Omega \times (a, b), \quad Q_{a,b,R} = \{(x, t) : (x, t) \in Q_{a,b}, \quad |x| < R\}, \\ Q_R &= \{x : (x, t) \in Q, \quad |x| < R\}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. *Если $f_i(x, t)$, $a_{ij}(x, t)$ – периодические по t с периодом $2T$ функции в Q_R , $f_i \in L_2(Q_{-T,T,R})$, то существует $(2T)$ -периодическое по t решение u в $Q_{-T,T,R}$ такое, что $u|_{\partial Q} = 0$, $u|_{|x|=R} = 0$,*

$$\int_{Q_{-T,T,R}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx dt + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\substack{x \in \Omega \\ |x| < R}} |k| |u_k(x)|^2 dx \leq c \int_{Q_{-T,T,R}} \sum |f_i|^2 dx, \quad (7)$$

где c не зависит от T , R ,

$$u_k(x) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(x, t) e^{k\pi it/T} dt.$$

Обобщенное решение здесь определяется как функция, у которой левая часть неравенства (7) конечная, $u|_{\partial G} = u|_{|x|=R} = 0$ и для всякой $(2T)$ -периодической по t функции такой, что

$$\begin{aligned} D_{-T,T,R}(\psi) &= \int_{Q_{-T,T,R}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right|^2 dx dt < \infty, \\ J_{-T,T,R}(\psi) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\substack{x \in \Omega \\ |x| < R}} |u_k(x)|^2 |k| dx < \infty, \end{aligned} \quad \psi|_{x+\partial G} = \psi|_{|x|=R} = 0,$$

справедливо тождество

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2ik\pi \int_{\substack{x \in \Omega \\ |x| < R}} u_k(x) \psi_{-k}(x) dx + \int_{Q_{-T,T,R}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dt \\ & = - \sum_{i=1}^n \int_{Q_{-T,T,R}} f_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что решение в условиях леммы 1 единственное. Чтобы показать это, надо в тождестве (8) положить $f_i \equiv 0$, $\psi = u$. Тогда первая сумма в левой части равенства (8) обратится в нуль и окажется, что

$$\int_{Q_{T,T,R}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx dt = 0.$$

В силу эллиптичности уравнения (1) получаем $u = c$, а так как $u|_{|x|=R} = 0$, то и $u \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Доказываем существование решения в лемме 1. Рассмотрим вместо (1) вспомогательное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad \varepsilon > 0. \quad (9)$$

Существует обобщенное $u_\varepsilon(x,t)$ решение уравнения (9) в Q_R , $(2T)$ -периодическое по t такое, что $u|_{\partial \Omega} = u|_{|x|=R} = 0$. Краевые задачи для эллиптических уравнений вида (9) хорошо изучены в [4] Ладыженской и Уралцевой. В частности, доказана альтернатива Фредгольма:

- либо при любом наборе $f_i(x) \in L_2(Q_{-T,T,R})$ существует $(2T)$ -периодическое по t решение уравнения (9) из $W_2^1(Q_{-T,T,R})$, равное нулю при $x \in \partial \Omega$, $|x| = R$,
- либо при $f_i \equiv 0$ существует нетривиальное решение уравнения (9) $(2T)$ -периодическое по t из $W_2^1(Q_{-T,T,R})$, равное нулю при $x \in \partial \Omega$, $|x| = R$.

Последнее невозможно в силу принципа максимума для обобщенных решений.

Итак, существует $u_\varepsilon(x, t) - (2\pi)$ -периодическое решение уравнения (9), равное нулю при $|x| = R$ и $x \in \partial\Omega$ из $W_2^1(Q_{-T, T, R})$.

Используя определение обобщенного решения уравнения (9), имеем

$$\begin{aligned} \int_{Q_{-T, T, R}} \phi \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} dx dt = & -\varepsilon \int_{Q_{-T, T, R}} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt \\ & - \sum_{i, j=1}^n \int_{Q_{-T, T, R}} a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx dt - \sum_{i=1}^n \int_{Q_{-T, T, R}} f_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx, \end{aligned} \quad (10)$$

если $\phi|_{\partial\Omega} = 0$, $\phi|_{|x|=R} = 0$, $\phi \in W_2^1(Q_{-T, T, R})$, $\phi(2T)$ -периодична по t . Полагая $\phi = u_\varepsilon$ в (10), получим

$$\varepsilon \int_{Q_{-T, T, R}} \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right|^2 dx dt + c_1 \int_{Q_{-T, T, R}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right|^2 dx dt \leq c_2 \sum_{i=1}^n \int_{Q_{-T, T, R}} f_i^2 dx dt, \quad (11)$$

где c_1, c_2 от T, R не зависят.

Представим функцию $u_\varepsilon(x, t)$ в виде ряда Фурье в $L_2(Q_{-T, T, R})$:

$$u_\varepsilon = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} u_{\varepsilon, k}(x) e^{-ik\pi t/T}.$$

Положим в (10)

$$\phi = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \operatorname{sgn} k \bar{u}_{\varepsilon k}(x) e^{ik\pi t/T}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2i\pi \int_{|x| < R} |k| |u_{\varepsilon k}(x)|^2 dx = -\varepsilon \int_{Q_{-T, T, R}} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt \\ & - \sum_{i, j=1}^n \int_{Q_{-T, T, R}} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx dt - \sum_{i=1}^n \int_{Q_{-T, T, R}} f_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx dt. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2\pi \int_{\substack{|x| < R \\ x \in \Omega}} |k| |u_{\varepsilon k}|^2 dx & \leq \varepsilon \int_{Q_{-T, T, R}} \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right|^2 dx dt \\ & + \varepsilon \int_{Q_{-T, T, R}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^2 dx dt + c \int_{Q_{-T, T, R}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right|^2 dx dt \\ & + \int_{Q_{-T, T, R}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|^2 dx dt + \sum_{i=1}^n c \int_{Q_{-T, T, R}} |f_i|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что из равенства Парсеваля следует

$$\begin{aligned} \int_{Q_{-T,T,R}} \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|^2 dx dt &= \int_{Q_{-T,T,R}} \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right|^2 dx dt, \\ \int_{Q_{-T,T,R}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|^2 dx dt &= \sum_{i=1}^n \int_{Q_{-T,T,R}} \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Поэтому из (11), (12) получаем

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{W^{1,1/2}(Q_{-T,T,R})}^2 &= \int_{Q_{-T,T,R}} |u_\varepsilon|^2 dx dt + \sum_{i=1}^n \int_{Q_{-T,T,R}} \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right|^2 dx dt \\ &\quad + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k| \int_{|x|<R} |u_{k,\varepsilon}|^2 dx \\ &\leq c \sum_{i=1}^n \int_{Q_{-T,T,R}} f_i^2 dx dt, \end{aligned}$$

где c от ε , T не зависит. Из семейства u_ε можно выбрать подпоследовательность, которая при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится в $L_2(Q_{-T,T,R})$ и слабо в $W^{1,1/2}(Q_{-T,T,R})$ к некоторой функции $u_0(x, t) \in W^{1,1/2}(Q_{-T,T,R})$ такой, что

$$\|u_0(x, t)\|_{W^{1,1/2}(Q_{-T,T,R})}^2 \leq c \sum_{i=1}^n \int_{Q_{-T,T,R}} f_i^2 dx dt,$$

где c не зависит от T .

Покажем, что $u_0(x, t)$ – решение (1), удовлетворяющее условиям леммы 1. Для этого надо проверить справедливость тождества (8).

Представим ψ , u в виде

$$\psi = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \psi_k e^{-i\pi k/T}, \quad u_\varepsilon = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} u_{k\varepsilon} e^{i\pi k/T}. \quad (13)$$

В результате подстановки этих функций в (10) получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} - \int_{|x|<R} 2\pi k u_{k\varepsilon} \psi_{-k} dx &= -\varepsilon \int_{Q_{-T,T,R}} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n \int_{Q_{-T,T,R}} a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dt - \sum_{i=1}^n \int_{Q_{-T,T,R}} f_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть $\varepsilon \rightarrow 0$. Первый интеграл в правой части равенства (14) стремится к нулю в силу оценки (11). В остальных интегралах, входящих в тождество (14), можно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу слабой сходимости u_ε к u_0 . В результате получим

$$\begin{aligned} - \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{|x|<R} 2\pi k u_k \psi_{-k} dx &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{Q_{-T,T,R}} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dt \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \int_{Q_{-T,T,R}} f_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Полученное решение обозначим $u_{T,R}(x, t)$.

Напомним, что из (11) следует

$$\int_{Q_{-T,T,R}} \sum_{i=0}^n \left| \frac{\partial u_{T,R}}{\partial x_i} \right|^2 dx dt + \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{|x| < R} |k| |u_{T,R}(x)|^2 dx \leq c_1 \int_{Q_{-T,T,R}} \sum_{i=1}^n f_i^2 dx dt, \quad (16)$$

где c_1 не зависит от T, R . Лемма доказана.

Из (16) получаем, что $u_{T,R}$ равномерно ограничены в каждом компакте $|x| < A$, $t \leq 2T$ в L_2 -норме и, используя метод диагонализации, можно выбрать подпоследовательность, которая сильно сходится в L_2 на каждом компакте к некоторой функции u_T при $R \rightarrow \infty$ вдоль некоторой последовательности. Функции $u_{-T,T,R}$ можно считать определенными в $Q_{-T,T,\infty}$, полагая их нулями при $|x| > R$. Из (15) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{-T,T}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u_T}{\partial x_i} \right|^2 dx dt + \int_{\Omega} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{\Omega} |k| |u_{T,k}(x)|^2 \leq c_2 \int_{Q_{-T,T,\infty}} \sum_{i=1}^n f_i^2 dx dt, \\ & \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} - \int_{\Omega} \frac{2\pi i k}{T} u_k \psi_{-k} dx = - \sum_{i,j=1}^n \int_{Q_{-T,T,\infty}} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx dt - \sum_{i=1}^n \int_{Q_{-T,T,R}} f_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь будем устремлять $T \rightarrow \infty$. В качестве f_i рассмотрим функции $f_{iT} \equiv f_i$ при $|t| \leq 2T$ и f_{iT} продолжена на всю ось как $(2T)$ -периодическая функция. Заметим, что в силу (4)

$$\begin{aligned} c_1 \int_{\Omega} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \frac{|u_T(t+h, x) - u_T(t, x)|^2}{h^2} dx dh dt & \leq \int_{\Omega} \sum |k| |u_k(x)|^2 dx \\ & \leq c_2 \int_{-T}^T \int_{-T}^T \frac{|u(x, t+h) - u(x, t)|^2}{h^2} dx dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Следовательно, из последовательности u_T при $T \rightarrow \infty$ можно выбрать подпоследовательность, которая имеет предел u в $L_2(Q_{-\alpha, \alpha, A})$ при любых α, A . Кроме того, u есть слабый предел u_T в $W^{1,1/2}(Q_{-\alpha, \alpha, A})$ при $T \rightarrow \infty$ вдоль некоторой подпоследовательности $T' \rightarrow \infty$. Ввиду этого можно перейти к пределу при $T \rightarrow \infty$ в тождестве (17). Это очевидно для его правой части. Рассмотрим левую часть тождества (17). Преобразуем ее следующим образом:

$$- \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{2\pi i k}{T} u_k \psi_{-k} dx = \int_{Q_{-T,T}} u \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt.$$

Устремив T к ∞ , получим

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{Q_{-T,T}} u_T \frac{\partial \psi}{\partial t} dt = \int_Q u \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt.$$

В результате (17) можно переписать так:

$$\int_Q u \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dt + \sum_{i=1}^n \int_Q f_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0. \quad (19)$$

Применив к обеим частям (19) преобразования Фурье по t , получим (5). В силу слабой сходимости u_T к u в $W^{1,1/2}Q_{-\alpha,\alpha,A}$ и (18) имеем $D(u) < \infty$, $J(u) < \infty$. Таким образом, $u(x, t)$ является обобщенным решением задачи (1), (3).

Из неравенства Харди следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\substack{x \in \Omega \\ |x| < R}} \frac{|u_T^2|}{|x|^2} dx dt \leq c \int \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u_T}{\partial x_i} \right|^2 dx \leq c \int \sum_{i=1}^n |f_i|^2 dx, \quad n \neq 2.$$

Тем более,

$$\int_{Q_R} \frac{|u|^2}{|x|^2 + t} dx dt \leq c \sum_{i=1}^n |f_i|^2 dx. \quad (20)$$

Это неравенство справедливо и при $n = 2$ в силу [4]. В области $x \in \Omega$, $|x| < R$, $-\infty < t < \infty$ из того, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2, \quad u|_{|x|=R} = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

следует оценка $\iint u^2 dt dx < \infty$ при каждом x и, значит, финитные функции образуют плотное в $W^{1,1/2}$ множество и неравенство (20) следует из неравенства Харди [4].

Докажем теперь *единственность* обобщенного решения.

Пусть $\theta(\tau) \equiv 1$ при $|\tau| \leq 1$, $\theta(\tau) \equiv 0$ при $|\tau| > 2$, $|\theta'(\tau)| < 1$. Рассмотрим функцию

$$\theta_N(x, t) = \theta\left(\frac{x}{N}\right)\theta\left(\frac{t}{N^2}\right).$$

Пусть $u_N = u\theta_N$. Покажем, что $D(u - u_N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, $J(u - u_N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} D(u - u_N) &\leq \int_{\substack{|x| > N \\ |t| > N^2}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^{n+1}} u^2 \left| \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right|^2 dx dt \\ &\leq \int_{x^2 + t > N^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx dt + c \int_{x^2 + t > N^2} \frac{u^2}{|x|^2 + t} dx dt \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$.

Покажем теперь, что $J(u - u_N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Обозначим $\sigma_N = 1 - \theta_N$. Тогда

$$\begin{aligned} J(u - u_N) &= \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|u(x, t+h)\sigma(x, t+h) - u(x, t)\sigma_N(x, t)|^2}{h^2} dt dh \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|u(x, t+h) - u(x, t)|^2 \sigma_N^2(x, t+h)}{h^2} dt dh \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|u(x, t)|^2 |\sigma_N(x, t+h) - \sigma_N(x, t)|^2}{h^2} dt dh \\ &= 2J_1 + 2J_2. \end{aligned}$$

Так как $|\sigma_N| \leq 1$, то

$$J_1 \leq \int \int_{x^2+|t|>N} \frac{|u(x, t+h) - u(x, h)|^2}{h^2} dx dt dh \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow 0.$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} J(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\sigma_N(x, t+h) - \sigma_N(x, t)|^2}{h^2} dh \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^2\left(\frac{x}{N}\right) \frac{|\theta(t+h)/N^2 - \theta(t/N^2)|^2}{h^2} dh \\ &\leq \theta^2\left(\frac{x}{N}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\theta((t+h)/N^2) - \theta(t/N^2)|^2}{h^2} dh. \end{aligned}$$

Пусть

$$J_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\theta_N(t+h) - \theta_N(t)|^2}{h^2} dh \quad \text{при } \theta_N(t) = \theta\left(\frac{t}{N^2}\right).$$

Пусть $t > 3N^2$. Тогда

$$J_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\theta_N(t+h) - 1|^2}{h^2} dh \leq \int_{-\infty}^{2N^2-t} \frac{dh}{h^2} = \frac{1}{t-2N^2} \leq \frac{3}{t}.$$

Аналогично при $t < -3N^2$ выполнено $J_1(t) \leq 3/4$. Итак,

$$|J_1(t)| \leq \frac{3}{|t|} \quad \text{при } |t| > 3N^2. \quad (21)$$

Оценим $J_1(t)$ еще одним способом:

$$|J_1(t)| \leq \int_{|h|<\lambda} \frac{|\theta_N(t+h) - \theta_N(t)|^2}{h^2} dh + \int_{|h|>\lambda} \frac{|\theta_N(t+h) - \theta_N(t)|^2}{h^2} dh \leq \lambda \frac{1}{N^4} + \frac{4}{\lambda}.$$

Взяв $\lambda = N^2$, получим

$$|J_1(t)| \leq \frac{5}{N^2}. \quad (22)$$

Заметим, что из (21), (22) следует

$$|J_1(t)| \leq \frac{c}{|t|}, \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Таким образом

$$|J(x, t)| \leq \theta^2\left(\frac{x}{N}\right) \frac{c}{|t|}, \quad |J(x, t)| \leq \theta^2\left(\frac{x}{N}\right) \frac{c}{N^2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \int_{|x| \leq N} dx \int_{t \leq \varepsilon N^2} \frac{|u(x, t)|^2}{N^2} dt + \int_{|x| \leq N} dx \int_{|t| > N^2 a} \frac{u(x, t)^2}{|t|} dt \\ &\leq \int_{|x| \leq N} dx \int_{|t| \leq \varepsilon N^2} \frac{\varepsilon u^2}{t/2 + N^2/2} dt + \int_{|x| \leq N} dx \int_{|t| > N^2 a} \frac{u^2}{t} dt \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{t + |x|^2} dx + \int_{|x| \leq N} \int_{|t| > N^2 a} \frac{u^2}{t + \varepsilon |x|^2} dx dt \leq \varepsilon c + \int_{\substack{t > \varepsilon N^2 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{u^2}{t + \varepsilon |x|^2} dx dt. \end{aligned}$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и, устремляя N к ∞ , получим, что $J_2 \leq 2ca$ при N достаточно большом. Это означает, что $J_2 \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, следовательно, $J(u - u_N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Пусть $f_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, в (5), $\psi = u_N$.

Вторая сумма при $N \rightarrow \infty$ имеет своим пределом число

$$\sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Покажем, что первое слагаемое в (5) имеет предел 0 при $N \rightarrow \infty$. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\lambda \int_Q \tilde{u} \bar{u}_N dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\lambda \int_Q (\tilde{u} - \tilde{u}_N) \bar{u}_N dx + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\lambda \int_Q |\tilde{u}_N|^2 dx.$$

Второе слагаемое в этом равенстве равно нулю, так как $|\tilde{u}_N|$ при вещественном u_N — четная функция от λ . Первый же интеграл оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\lambda \int_Q |\tilde{u} - \tilde{u}_N| |\bar{u}_N| dx &\leq \left(\int_Q \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| |\tilde{u} - \bar{u}_N|^2 dx d\lambda \right)^{1/2} \\ &\times \left(\int_Q \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| |\bar{u}_N|^2 dx d\lambda \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ибо

$$J(u - u_N) = \int_Q \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| |\tilde{u} - \bar{u}_N|^2 dx d\lambda \rightarrow 0.$$

Это означает, что $\text{grad } u = 0$ и $u = 0$, так как $u|_{\partial\Omega} = 0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихонов А. Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Матем. сб. 1935. Т. 42. № 2. С. 199–216.
- [2] Шмудев И. И. Ограниченные решения краевых задач без начальных условий для параболических уравнений и обратные краевые задачи // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142. № 1. С. 46–49.
- [3] Бокало Н. М. О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. семинара И. Г. Петровского. 1989. № 14. С. 3–44.
- [4] Ладженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.