Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. В. Гусейнов, Перекрываемость функций, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 4, 623–626

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1540>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:05:00

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ПЕРЕКРЫВАЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ

Ф. В. Гусейнов

Перекрываемость функции означает, что график ее овыпукления (т.е. наибольшей полунепрерывной снизу выпуклой функции, не превосходящей эту функцию) содержится в выпуклой оболочке ее графика. По крайней мере, в контексте математической экономики (ядра и конкурентное равновесие), перекрываемость, повидимому, была впервые обсуждена Шепли и Шубиком [1]. Шепли и Шубик отмечали, что условие перекрываемости помогает восстанавливать некоторую регулярность, потерянную, когда вогнутость (вогнутость функций полезности или выпуклость отношений предпочтения) не предположена и потенциально полезна вне непосредственного контекста ядер и конкурентных равновесий. Регулярность потенциально полезна вне непосредственного контекста ядер и конкурентных равновесий, а также она кажется вполне фундаментальной для всякого исследования релаксаций условий выпуклости.

В [1, теорема 3] были указаны некоторые условия, гарантирующие перекрываемость функции. Другое достаточное условие было найдено в [2, с. 278] в связи с расширением вариационных задач. Автору неизвестны другие результаты о перекрываемости функций.

Настоящая заметка посвящена изучению перекрываемости функций. Для функции полунепрерывной снизу и с графиком, не содержащим прямых, найдено необходимое и достаточное условие перекрываемости (теорема 1). Оба упомянутых выше результата о перекрываемости являются следствиями теоремы 1. Изучен также случай функции с графиком, содержащим прямые (теорема 2).

Мы будем пользоваться обычными обозначениями: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ – расширенная действительная ось, $\mathbb{R}^n$ – действительное n -мерное координатное евклидово пространство, $\text{epi } f$ и $\text{gr } f$ соответственно надграфик (эпиграф) и график функции f , f^{**} – наибольшая полунепрерывная снизу выпуклая функция, не превосходящая f . Обозначение f^{**} является общим, его происхождение обязано хорошо известному факту о том, что функция f^{**} является второй сопряженной по Лежандру функции f . Для подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$ мы будем обозначать $\text{int } A$ и ∂A соответственно его внутренность и границу. Точка a выпуклого множества A называется его *экстремальной точкой*, если она не может быть представлена как выпуклая комбинация двух отличных от a точек из A . Аналогично определение экстремального луча множества A . *Выступающая точка* есть экстремальная точка, для которой существует опорная гиперплоскость, проходящая через эту точку и не содержащая точек из A , отличных от этой точки. Напомним,

что выпуклое подмножество $A' \subset A$ называется *гранью*, если из принадлежности A' какой-либо относительно внутренней точки произвольного сегмента из A следует принадлежность A' его концевых точек.

Для подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$ через $L^\perp$ и P_L соответственно будут обозначаться его ортогональное дополнение и оператор ортогонального проектирования на L . Для аффинного подпространства $M \subset \mathbb{R}^n$ его подмножество M_0 будем называть *охватывающим*, если его выпуклая оболочка совпадает с M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется *перекрываемой*, если для произвольной точки $x \in \mathbb{R}^n$ существуют точки $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ и положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ с $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ такие, что

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \quad \text{и} \quad f^{**}(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i), \quad (1)$$

т.е. график функции f^{**} содержится в выпуклой оболочке графика функции f .

Легко показать, что в определении целое число m может быть ограничено числом $n + 1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — полунепрерывная снизу и линейно ограниченная снизу функция такая, что $\text{epi } f^{**}$ не содержит прямых. Тогда функция f является перекрываемой, если и только если ее график содержит неограниченное подмножество каждого невертикального экстремального луча надграфика функции f^{**} .

Условие на функцию f , сформулированное в утверждении теоремы 1, будем называть *условием*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Предположим, что условие теоремы 1 не выполняется, т.е. существует невертикальный экстремальный луч $\bar{e}$ надграфика $\text{epi } f^{**}$ такой, что множество $\bar{e} \cap \text{gr } f$ ограничено. Обозначим через e единичный вектор с направлением луча $\bar{e}$. Пусть $\bar{z}$ — вершина луча $\bar{e}$ и точка $z_0 \in \bar{e}$ такая, что полупрямая $\{(z_0 - e) + \lambda e : \lambda \geq 0\}$ содержится в $\bar{e}$ и не пересекается с графиком функции f :

$$\{(z_0 - e) + \alpha e : \alpha \geq 0\} \cap \text{gr } f = \emptyset. \quad (2)$$

Мы утверждаем, что точка $z_0 = (x_0, f^{**}(x_0))$ не имеет представления (1). Действительно, если имеется такое представление, то так как числа λ_k ($k = 1, \dots, m$) строго положительны, точка z_0 является относительно внутренней точкой многогранника¹

$$P = \text{conv}\{(x_k, f(x_k)) : k = 1, \dots, m\}.$$

Так как $\bar{e}$ является гранью $\text{epi } f^{**}$, то по теореме 18.1 [3] многогранник P содержится в $\bar{e}$. Это вместе с соотношением (2) дает $z_k := (x_k, f(x_k)) \in [\bar{z}, z_0 - e]$, $k = 1, \dots, m$. Но в этом случае многогранник P также содержится в выпуклом множестве $[\bar{z}, z_0 - e]$, откуда $z_0 \notin P$. Это противоречит включению $z_0 \in \text{ri } P$.

Достаточность. Важную часть доказательства достаточности составляет следующее предложение.

¹Автор пользуется стандартными обозначениями выпуклого анализа (conv , ri и т.п., см. [3]). — Прим. ред.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда $\text{gr } f \supset \text{ex}(\text{epi } f)$, другими словами, f совпадает с f^{**} на проекции на $\mathbb{R}^n$ множества экстремальных точек надграфика функции f^{**} .

Доказательство предложения 1, в свою очередь, основано на следующем предложении, которое не лишено самостоятельного значения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – полунепрерывная снизу неотрицательная функция, удовлетворяющая условию. Тогда множество нулей функции f^{**} совпадает с выпуклой оболочкой множества нулей функции f .

Теперь, если условие выполнено, то, очевидно, что любой невертикальный экстремальный луч выпуклого множества $\text{epi } f^{**}$ содержится в $\text{co}(\text{gr } f)$. По предложению 1 $\text{gr } f$ содержит все экстремальные точки выпуклого множества $\text{epi } f^{**}$. В частности отсюда следует, что каждый вертикальный экстремальный луч множества $\text{epi } f^{**}$ содержится в $\text{epi } f$. Так как $\text{epi } f^{**}$ не содержит прямых, то по теореме 18.5 из [3] мы находим $\text{conv}(\text{gr } f \cup V) \supset \text{epi } f^{**}$, и тогда $\text{conv}(\text{epi } f \cup V) \supset \text{gr } f^{**}$. Здесь через V обозначено объединение всех вертикальных экстремальных лучей из $\text{epi } f^{**}$.

Итак, для каждой точки $x_0 \in \text{dom } f^{**}$ точка $(x_0, f^{**}(x_0)) \in \text{co}(\text{epi } f)$. Поэтому существуют точки $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ и числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$, что

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$$

и $\alpha_1, \dots, \alpha_m > 0$ такие, что

$$(x_0, f^{**}(x_0)) = \sum_{k=1}^m \lambda_k (x_k, f(x_k) + \alpha_k).$$

Теперь, если некоторые из чисел α_k ($k = 1, \dots, m$) положительны, то мы имели бы

$$x_0 = \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k \quad \text{и} \quad f^{**}(x_0) > \sum_{k=1}^m \lambda_k f(x_k),$$

что противоречит определению овыпукления f^{**} .

Далее, проведя опорную гиперплоскость в точке $(x_0, f^{**}(x_0))$ к выпуклому множеству и пользуясь теоремой Каратеодори (см. [3]), можно легко показать, что в представлении (1) число m может быть выбрано не больше $n + 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – полунепрерывная снизу функция, линейно ограниченная снизу и такая, что $\text{dom } f \subset \mathbb{R}^n$ не содержит прямых. Тогда функция f перекрываемая, если и только если ее график содержит неограниченное подмножество каждого невертикального экстремального луча надграфика f^{**} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что множество $\text{epi } f^{**}$ не содержит невертикальной прямой. Действительно, если оно содержало бы такую прямую, то проекцией на $\mathbb{R}^n$ этой прямой была бы прямая, содержащаяся в $\text{dom } f$. Очевидно, $\text{epi } f^{**}$ также не содержит вертикальных прямых. Применение теоремы 1 завершает доказательство.

Для формулировки следующего следствия приведем некоторые определения.

Функция $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется *сублинейной*, если для любой линейной функции l с неотрицательными коэффициентами разность $f - l$ имеет конечную нижнюю границу. Функция f называется *строго убывающей*, если для любых точек $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ таких, что $y - x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$, $f(x) < f(y)$.

СЛЕДСТВИЕ 2 (Шепли, Шубик [1, теорема 3]). Если $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ непрерывна, сублинейна и строго убывает, то f перекрывается.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — полунепрерывная снизу функция такая, что

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = \infty. \quad (3)$$

Тогда f перекрывается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, f ограничена снизу и нетрудно показать, что выпукление f^{**} также удовлетворяет условию (3). Поэтому $\text{epi } f^{**}$ не содержит невертикальных экстремальных лучей. По теореме 1 функция f перекрывается.

Следствие 3 содержит лемму Экланда–Темама [2, с. 278] упомянутую вначале, в которой вместо условия роста (3) принято более жесткое условие

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\|x\|^\alpha} = \infty \quad (\alpha > 1).$$

Как показывает следующий пример, условие роста является точным.

ПРИМЕР. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| & \text{при } |x| \leq 1, \\ |x| + 1 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Тогда $f^{**}(x) = |x|$ и, очевидно, f не перекрывается.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — линейно ограниченная снизу функция с нетривиальным пространством линейности надграфика $\text{epi } f^{**}$. Тогда f перекрывается, если и только если для произвольного экстремального луча $\text{epi } f^{**} \cap L$ проекция $P_{L^\perp}(\text{gr } f \cap \text{epi } f^{**})$ содержит неограниченное подмножество каждого экстремального луча $\text{epi } f^{**} \cap L^\perp$ и, более того, для экстремальной точки $\bar{z}$ множества $\text{epi } f^{**} \cap L^\perp$ график функции содержит охватывающее подмножество множества $\bar{z} + L$.

Доказательство этой теоремы использует теорему 1 и теорему 8.1 из [3].

Поступило
05.04.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shoples L. S., Shubik M. // *Econometrica*. 1966. V. 34. P. 805–827.
2. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
3. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.