Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Об одном новом способе вторичного квантования фермионов, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 4, 627–629

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1541>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:42:44

ОБ ОДНОМ НОВОМ СПОСОБЕ ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ ФЕРМИОНОВ

В. П. Маслов

Рассматривается задача об N фермионных частицах, описываемая уравнением Шрёдингера

$$E\psi(x_1, \dots, x_N) = \sum_{l=1}^N \left(-\frac{1}{2} \Delta_{x_l} + U(x_l) \right) \psi(x_1, \dots, x_N) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{1 \leq l \neq m \leq N} V(x_l, x_m) \psi(x_1, \dots, x_N),$$

где $x_i \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\psi(x_1, \dots, x_N)$ – антисимметричная функция. Пусть k – целое число такое, что $0 \leq k \leq N$ и $N - k = 2M$, M – целое. Любой антисимметричной функции $\psi(x)$ соответствует функция

$$\rho(x_1, i_1; \dots; x_k, i_k; z_1, w_1; \dots; z_M, w_M) = \psi(x_1, \dots, x_k, z_1, w_1, \dots, z_M, w_M) \cdot \epsilon_{i_1, \dots, i_k}, \quad (1)$$

где $\forall l = \overline{1, k}$, $i_l = \overline{1, k}$, а $\epsilon_{i_1, \dots, i_k}$ – абсолютный антисимметричный тензор ранга k , симметричная относительно своих аргументов x_l, i_l и x_m, i_m , а также z_p, w_p и z_q, w_q , удовлетворяющая уравнению

$$\begin{aligned} & \left(E - \sum_{j=1}^k \lambda_j \right) \rho \\ &= \sum_{l=1}^k \left(-\frac{1}{2} \Delta_{x_l} + U(x_l) - \lambda_{i_l} \right) \rho + \sum_{p=1}^M \left(-\frac{1}{2} \Delta_{z_p} + U(z_p) - \frac{1}{2} \Delta_{w_p} + U(w_p) \right) \rho \\ &+ \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \sum_{1 \leq l \neq l' \leq k} V(x_l, x_{l'}) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{1 \leq p \neq p' \leq M} (V(z_p, z_{p'}) + V(w_p, w_{p'})) \right. \\ &\left. + \varepsilon \sum_{p, p'=1}^M V(z_p, w_{p'}) + \sum_{l=1}^k \sum_{p=1}^M (V(x_l, z_p) + V(x_l, w_p)) \right\} \cdot \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, w_M} \cdot \text{Asymm}_{i_1, \dots, i_k} \rho, \end{aligned}$$

где $\lambda_j, j = \overline{1, k}$, – некоторые действительные числа, $\rho = \rho(x_1, i_1; \dots; x_k, i_k; z_1, w_1; \dots; z_M, w_M)$,

$$\begin{aligned} & \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, w_M} \psi(x_1, \dots, x_k, z_1, w_1, \dots, z_M, w_M) \\ &= \frac{1}{(k + 2M)!} \sum_{\sigma} (-1)^{\text{sign } \sigma} P_{\sigma} \psi(x_1, \dots, w_M), \end{aligned}$$

где P_{σ} – перестановка аргументов функции ψ , и

$$\text{Asymm}_{i_1, \dots, i_k} f(i_1, \dots, i_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\tilde{\sigma}} (-1)^{\text{sign } \tilde{\sigma}} U_{\tilde{\sigma}} f(i_1, \dots, i_k),$$

$U_{\bar{\sigma}}$ – перестановка аргументов f . Назовем $x_1, i_1, \dots, x_k, i_k$ *простым типом переменных*, а $z_1, w_1, \dots, z_M, w_M$ – *парным типом*. Функции ρ ставится в соответствие вектор пространства Фока [1] вида

$$\tilde{\rho} = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^k \int \cdots \int dx_1 \cdots dx_k dz_1 dw_1 \cdots dz_M dw_M \rho(x_1, i_1, \dots; z_1, w_1, \dots) \\ \times \hat{b}^+(x_1, i_1) \cdots \hat{b}^+(x_k, i_k) \hat{A}^+(z_1, w_1) \cdots \hat{A}^+(z_M, w_M) \Psi_0$$

где $\hat{b}^{\pm}(x, i)$, $\hat{A}^{\pm}(z, w)$ – операторы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\hat{b}^{\pm}(x, i), \hat{b}^{\pm}(y, j)] = [\hat{A}^{\pm}(z, w), \hat{A}^{\pm}(z', w')] = [\hat{b}^{\pm}(x, i), \hat{A}^{\pm}(z, w)] \\ = [\hat{b}^{\pm}(x, i), \hat{A}^{\mp}(z, w)] = 0, \\ [\hat{b}^{-}(x, i), \hat{b}^{+}(y, j)] = \delta_{ij} \delta(x - y), \quad [\hat{A}^{-}(z, w), \hat{A}^{+}(z', w')] = \delta(z - z') \cdot \delta(w - w'),$$

а вектор Ψ_0 – вакуумный вектор пространства Фока. Вектор $\tilde{\rho}$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{E} \tilde{\rho} = \widehat{\mathcal{H}} \tilde{\rho}, \quad \text{где} \quad \tilde{E} = E - \sum_{j=1}^k \lambda_j, \quad (2)$$

оператор $\widehat{\mathcal{H}}$ имеет следующий вид:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^k \int dx \hat{b}^+(x, i) \left(-\frac{1}{2} \Delta_x + U(x) - \lambda_i \right) \hat{b}^-(x, i) \\ + \iint dz dw \hat{A}^+(z, w) \left(-\frac{1}{2} \Delta_z + U(z) - \frac{1}{2} \Delta_w + U(w) \right) \hat{A}^-(z, w) \\ + \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1}^k \iint dx dy V(x, y) \hat{b}^+(x, i) \hat{b}^+(y, j) \hat{b}^-(y, j) \hat{b}^-(x, i) \right. \\ + \frac{\varepsilon}{2} \iiint dz dw dz' dw' (V(z, z') + V(w, w')) \\ \times \hat{A}^+(z, w) \hat{A}^+(z', w') \hat{A}^-(z', w') \hat{A}^-(z, w) \\ + \varepsilon \iint dz dw V(z, w) \hat{A}^+(z, w) \hat{A}^-(z, w) \\ + \varepsilon \iiint dz dw dz' dw' V(z, w') \hat{A}^+(z, w) \hat{A}^+(z', w') \hat{A}^-(z', w') \hat{A}^-(z, w) \\ + \varepsilon \sum_{i=1}^k \iiint dx dz dw (V(x, z) + V(x, w)) \\ \left. \times \hat{b}^+(x, i) \hat{b}^-(x, i) \hat{A}^+(z, w) \hat{A}^-(z, w) \right\} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\sigma}_m \hat{P}_m, \quad (3)$$

где операторы $\hat{\sigma}_m$ и $\hat{P}_m$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\hat{P}_m &= \frac{1}{m!k!} \left(\sum_{i=1}^k \int dx \hat{b}^+(x, i) \hat{b}^-(x, i) \right)^k \\ &\times \exp \left(- \sum_{j=1}^k \int dy \hat{b}^+(y, j) \hat{b}^-(y, j) \right) \left(\iint dz dw \hat{A}^+(z, w) \hat{A}^-(z, w) \right)^m \\ &\times \exp \left(- \iint dz' dw' \hat{A}^+(z', w') \hat{A}^-(z', w') \right), \\ \hat{\sigma}_m &= \frac{1}{k!m!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^k \int \cdots \int dx_1 \cdots dx_k dz_1 dw_1 \cdots dz_m dw_m \\ &\times \hat{b}^+(x_1, i_1) \cdots \hat{b}^+(x_k, i_k) \hat{A}^+(z_1, w_1) \cdots \hat{A}^+(z_m, w_m) \\ &\times \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_k, z_1, w_1, \dots, z_m, w_m} \text{Asymm}_{i_1, \dots, i_k} \hat{A}^-(z_m, w_m) \cdots \hat{A}^-(z_1, w_1) \hat{b}^-(x_k, i_k) \cdots \hat{b}^-(x_1, i_1).\end{aligned}$$

К оператору (3) для нахождения его собственных значений и собственных функций (2) применима теория комплексного роста [2]–[4].

Аналогично можно провести рассмотрение квантовой электродинамики. В этой теории состояние описывается вектором $\psi_{N_+, N_-}(\vec{p}_1 i_1, \dots, \vec{p}_{N_+} i_{N_+}; \vec{k}_1 j_1, \dots, \vec{k}_{N_-} j_{N_-})$, где N_+ – число позитронов, N_- – число электронов, $\vec{p}_l i_l$ и $\vec{k}_m j_m$ – импульсная и спиновая переменные соответственно позитронов и электронов. Функция $\psi_{N_+, N_-}(\vec{p}_l, \vec{k}_j)$ антисимметрична относительно перестановок $\vec{p}_m i_m$ и $\vec{p}_l i_l$, а также $\vec{k}_m j_m$ и $\vec{k}_l j_l$. Гамильтониан теории таков, что сохраняется полный заряд $Z = N_+ - N_-$. Поэтому задача “симметризуется” аналогично (1) относительно двух типов переменных: простого по электронным переменным от $\vec{p}_1 i_1$ до $\vec{p}_{|Z|} i_{|Z|}$ (если $Z \leq 0$; если $Z > 0$, то аналогично, но по позитронным переменным) и парного по парам электрон-позитрон от $\vec{p}_{|Z|+1} i_{|Z|+1}, \vec{k}_1 j_1$ до $\vec{p}_{N_-} i_{N_-}, \vec{k}_{N_+} j_{N_+}$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
05.03.97

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
2. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
3. Маслов В. П., Шведов О. Ю. // ТМФ. 1994. Т. 98. № 2. С. 266–288.
4. Maslov V. P. // Russian J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 3. P. 401–406.