Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Миротин, Действие функций класса Шенберга $\mathcal{S}$ на конусе диссипативных элементов банаховой алгебры, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 4, 630–633

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1542>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:21:31

ДЕЙСТВИЕ ФУНКЦИЙ КЛАССА ШЕНБЕРГА $\mathcal{T}$ НА КОНУСЕ ДИССИПАТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЫ

А. Р. Миротин

Полезность функциональных исчислений в теории банаховых алгебр (операторов) обусловлена как тем, что с их помощью строятся новые операторы, так и тем, что эти исчисления позволяют использовать при изучении банаховых алгебр теоретико-функциональные методы. Цель заметки – заложить основы n -мерного функционального исчисления от диссипативных элементов банаховой алгебры, использующего класс функций Шенберга $\mathcal{T}_n$. Более развернутая форма исчисления, включающая теоремы о сложной функции, непрерывности и устойчивости исчисления и ряд других, появится в последующей работе автора.

1. Будем говорить, что функция $\psi \in C^\infty(-\infty; 0)^n$ принадлежит классу $\mathcal{T}_n$, если $\psi(x) < 0$ и все ее частные производные первого порядка абсолютно монотонны на $(-\infty; 0)^n$ (функция из $C^\infty(-\infty; 0)^n$ называется *абсолютно монотонной*, если она неотрицательна вместе со своими частными производными всех порядков).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для функции $\psi: (-\infty; 0)^n \rightarrow (-\infty; 0)$ следующие утверждения равносильны:

- 1) $\psi \in \mathcal{T}_n$;
- 2) для любой абсолютно монотонной на $(-\infty; 0)$ функции f композиция $f \circ \psi$ абсолютно монотонна на $(-\infty; 0)^n$;
- 3) при $x \in (-\infty; 0)^n$

$$\psi(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{t \cdot x} - 1) d\mu(t), \quad c_0 = \lim_{x \rightarrow -0} \psi(x) \leq 0, \quad c_1 \in \mathbb{R}_+^n, \quad (1)$$

μ – положительная мера, причем c_1 и μ определяются однозначно (точка обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$).

При $n = 1$ этот результат принадлежит Шенбергу (см., например, [1, с. 256–258]), в общем случае утверждение 1) $\implies$ 3) следует, например, из [2, гл. 8, теорема 2.4].

2. Всюду ниже A обозначает комплексную банахову алгебру с единицей 1 и нормой $\|\cdot\|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [3, с. 55]). Элемент $a \in A$ называется *диссипативным*, если $\|\exp(ta)\| \leq 1$ при всех $t \geq 0$.

При этом спектр $\text{Sp}(a) \subset \{\text{Re } z \leq 0\}$. Кроме того, диссипативные элементы образуют замкнутый конус в A [3, § 10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ – упорядоченная система коммутирующих диссипативных элементов алгебры A . Определим значение функции ψ из $\mathcal{T}_n$ с интегральным представлением (1) на системе a формулой

$$\psi(a) = c_0 1 + c_1 \cdot a + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (\exp(t \cdot a) - 1) d\mu(t) \quad (2)$$

(при $t \in \mathbb{R}^n$, здесь и ниже, $t \cdot a = \sum_{i=1}^n t_i a_i$).

Покажем, что интеграл в (2) существует в смысле Бохнера. Возьмем такие ε и $\delta > 0$, что $\|\exp(t_i a_i) - 1\| \leq \varepsilon$ при $t \in [0; \delta]^n$, $i = 1, \dots, n$. Пусть $b_i = \exp(t_i a_i) - 1$. Тогда тождество

$$\exp(t \cdot a) - 1 = \sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i,j=1}^n b_i b_j + \dots + b_1 \dots b_n$$

показывает, что функция $\varphi(t) = \|\exp(t \cdot a) - 1\|$ мажорируется полиномом от $t_1, \dots, t_n$. Фиксируем x из $(-\infty; 0)^n$. Так как $e^{t \cdot x} - 1 \sim t \cdot x$ при $t \rightarrow 0$ и интеграл в (1) существует, то, уменьшая, если нужно, δ , получаем, что функция $t \mapsto t \cdot x$ μ -интегрируема на $[0; \delta]^n \setminus \{0\}$. Отсюда следует, что для достаточно малого $\delta > 0$ μ -интегрируемы на $[0; \delta]^n \setminus \{0\}$ функции $t \mapsto t_j$, $j = 1, \dots, n$, а с ними полином, мажорирующий φ . Дифференцируя под знаком интеграла, получаем из (1), что функция $t \mapsto t_i e^{t \cdot x}$ ($x \in (-\infty; 0)^n$, $i = 1, \dots, n$) μ -интегрируема на $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$. Положим $B_i = \{t \in \mathbb{R}_+^n : t_i \geq \delta\}$. Из неравенства

$$\int_{B_i} e^{t \cdot x} d\mu(t) \leq \delta^{-1} \int_{B_i} t_i e^{t \cdot x} d\mu(t) \quad (i = 1, \dots, n)$$

следует μ -интегрируемость на B_i функции $t \mapsto e^{t \cdot x}$ при $x \in (-\infty; 0)^n$, $i = 1, \dots, n$. С учетом существования интеграла (1) последнее означает, что $\mu(\bigcup_{i=1}^n B_i) < \infty$. Существование интеграла (2) теперь вытекает из равенства $\mathbb{R}_+^n = [0; \delta]^n \cup (\bigcup_{i=1}^n B_i)$, поскольку $\|\exp(t \cdot a) - 1\| \leq 2$.

Полагая $a = z \in \mathbb{C}^n$, где $\operatorname{Re} z_i < 0$, $i = 1, \dots, n$, получаем в качестве следствия, что каждая функция из $\mathcal{T}_n$ продолжается по формуле (2) (при $a = z$) до функции, голоморфной в области $\{\operatorname{Re} z_i < 0, i = 1, \dots, n\}$ из $\mathbb{C}^n$.

Отметим, что справедлива теорема об отображении спектров. А именно, если $\psi \in \mathcal{T}_n$, причем представление (1) имеет место при $x \in (-\infty; 0]^n$, то $\operatorname{Sp}(\psi(a)) = \psi(\operatorname{Sp}(a))$, где $\operatorname{Sp}(a)$ есть совместный спектр (Шилова) набора a . Это нетрудно доказать методом, использованным в [4, гл. XVI].

3. ТЕОРЕМА. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ есть набор коммутирующих диссипативных элементов алгебры A . Если $\psi \in \mathcal{T}_n$, то элемент $\psi(a)$ диссипативен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon \in (0; +\infty)^n$ и $\psi_\varepsilon(z) = \psi(z - \varepsilon)$. Для $t \geq 0$ положим $g = e^{t\psi}$, $g_\varepsilon = e^{t\psi_\varepsilon}$. Предложение из п. 1 показывает, что g абсолютно монотонна на $(-\infty; 0)^n$. Кроме того, $g(x) \leq 1$. Следовательно (см., например, [1, с. 281] или [3, гл. 8, теорема 2.3]), найдется такая ограниченная положительная мера ω на $\mathbb{R}_+^n$, что при $x \in (-\infty; 0)^n$

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{s \cdot x} d\omega(s),$$

а потому g_ε аналитически продолжается в область $\{\operatorname{Re} z_i < \varepsilon_i, i = 1, \dots, n\}$ по формуле

$$g_\varepsilon(z) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{s \cdot z} e^{-s \cdot \varepsilon} d\omega(s).$$

Таким образом, ψ_ε и g_ε голоморфны в поликруговой окрестности совместного спектра системы a . Если ограниченная поликруговая окрестность $\operatorname{Sp}(a)$, содержащаяся в

$\{\operatorname{Re} z_i < \varepsilon_i/2, i = 1, \dots, n\}$, имеет остов Γ , то, используя голоморфное функциональное исчисление и теорему Фубини, имеем

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(a) &= (2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma} g_\varepsilon(\zeta)(\zeta - a)^{-1} d\zeta = \int_{\mathbb{R}_+^n} (2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma} e^{s \cdot \zeta} (\zeta - a)^{-1} d\zeta e^{-s \cdot \varepsilon} d\omega(s) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \exp(s \cdot a) e^{-s \cdot \varepsilon} d\omega(s), \end{aligned}$$

где положено $(\zeta - a)^{-1} = (\zeta_1 \mathbf{1} - a_1)^{-1} \cdots (\zeta_n \mathbf{1} - a_n)^{-1}$, $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$. Применимость теоремы Фубини следует из того, что при $\zeta \in \Gamma$

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |e^{s \cdot \zeta} e^{-s \cdot \varepsilon}| d\omega(s) \leq \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-s \cdot \varepsilon/2} d\omega(s).$$

Поскольку для голоморфного функционального исчисления в поликруговой области справедлива теорема о сложной функции, то $g_\varepsilon(a) = \exp(t\psi_\varepsilon(a))$ ($\psi_\varepsilon(a)$ также понимается в смысле голоморфного функционального исчисления). Поэтому при $t \geq 0$

$$\|\exp(t\psi_\varepsilon(a))\| \leq \int_{\mathbb{R}_+^n} \|\exp(s \cdot a)\| e^{-s \cdot \varepsilon} d\omega(s) \leq g(-\varepsilon) \leq 1,$$

т.е. элемент $\psi_\varepsilon(a)$ диссипативен.

С другой стороны, снова используя теорему Фубини, имеем

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(a) &= (2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma} \psi_\varepsilon(\zeta)(\zeta - a)^{-1} d\zeta \\ &= (2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma} \left(c_0 + c_1 \cdot (\zeta - \varepsilon) + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{t \cdot (\zeta - \varepsilon)} - 1) d\mu(t) \right) (\zeta - a)^{-1} d\zeta \\ &= c_0 \mathbf{1} + c_1 \cdot (a - \varepsilon \mathbf{1}) + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} \left((2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma} (e^{t \cdot (\zeta - \varepsilon)} - 1) (\zeta - a)^{-1} d\zeta \right) d\mu(t) \\ &= c_0 \mathbf{1} + c_1 \cdot (a - \varepsilon \mathbf{1}) + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (\exp(t \cdot (a - \varepsilon \mathbf{1})) - 1) d\mu(t). \end{aligned}$$

Законность применения теоремы Фубини вытекает из оценок, использовавшихся при доказательстве корректности определения 2. Следовательно,

$$\|\psi_\varepsilon(a) - \psi(a)\| \leq |c_1 \cdot \varepsilon| + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (1 - e^{-t \cdot \varepsilon}) d\mu(t),$$

причем правая часть стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу (1). Таким образом, элемент $\psi(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(a)$ диссипативен.

СЛЕДСТВИЕ. Элементы $-(-a)^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$), $-\log(1-a)$ и $-\operatorname{arch}(1-a)$ диссипативны вместе с $a \in A$.

Отметим, что справедливы следующие интегральные представления, легко проверяемые дифференцированием ($x < 0$):

$$-(-x)^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty (e^{tx} - 1)t^{-(1+\alpha)} dt \quad (0 < \alpha < 1), \quad (3)$$

$$-\log(1-x) = \int_0^\infty (e^{tx} - 1)t^{-1}e^{-t} dt, \quad (4)$$

$$-\operatorname{arch}(1-x) = \int_0^\infty (e^{tx} - 1)I_0(t)t^{-1}e^{-t} dt \quad (5)$$

(I_0 — функция Бесселя чисто мнимого аргумента).

4. Примеры. Пусть $\sigma > 0$ и $B_\sigma^{1/2}$ есть пространство целых функций порядка $< 1/2$ либо порядка $1/2$ типа $\leq \sigma$, ограниченных на $\mathbb{R}_+$ с $\sup$ -нормой на $\mathbb{R}_+$. Из неравенства в [5, с. 485, сноска] следует, что $B_\sigma^{1/2}$ банахово. Неравенство С.Н. Бернштейна [5, с. 486] влечет ограниченность в $B_\sigma^{1/2}$ оператора дифференцирования d/dx . Поскольку $\exp(t d/dx)$ есть сдвиг на t , d/dx диссипативен. Из (3) при $0 < \alpha < 1$ получаем $-(-d/dx)^\alpha = -D_-^\alpha$, где D_-^α — дробная производная Маршо (см., например, [6, формула (5.58)]). Таким образом, оператор $-D_-^\alpha$ диссипативен в $B_\sigma^{1/2}$. В силу упомянутого неравенства Бернштейна

$$\left\| \left(\frac{d}{dx} \right)^n \right\| = \frac{\sigma^{2n} n!}{(2n)!},$$

а потому спектральный радиус $r(d/dx) = 0$, т.е. $\operatorname{Sp}(d/dx) = \{0\}$. Теорема об отображении операторов дает теперь, что $\operatorname{Sp}(D_-^\alpha) = \{0\}$.

Аналогично, равенства (4) и (5) позволяют утверждать, что операторы ($\varphi \in B_\sigma^{1/2}$)

$$\begin{aligned} -\log\left(1 - \frac{d}{dx}\right)\varphi(x) &= \int_0^\infty \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t} e^{-t} dt, \\ -\operatorname{arch}\left(1 - \frac{d}{dx}\right)\varphi(x) &= \int_0^\infty \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t} I_0(t) e^{-t} dt \end{aligned}$$

диссипативны в $B_\sigma^{1/2}$ и имеют нулевой спектр.

Гомельский государственный университет
им. Ф. Скорины

Поступило
20.04.95
Исправленный вариант
23.04.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М.: Физматгиз, 1961.
2. Berg C. et al. Harmonic Analysis on Semigroups. N. Y.: Springer Verlag, 1984.
3. Bonsall F. F., Duncan J. Complete Normed Algebras. Berlin-Heidelberg-N. Y.: Springer Verlag, 1973.
4. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
5. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
6. Самко С. Г. и др. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.