Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Г. Парфенов, Оценки спектра некоторых дифференциальных операторов, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 4, 634–636

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1543>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:59:14

ОЦЕНКИ СПЕКТРА НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

О. Г. Парфёнов

Рассмотрим задачу о спектре дифференциального уравнения вида

$$-((1-x^2)^\alpha u^{(l)})^{(l)} + p(x)u = \lambda u. \quad (1)$$

При условиях, которые мы укажем ниже, спектр (1) является дискретным. Возникает задача дальнейшего исследования свойств спектра (1). Например, можно исследовать необходимые и достаточные условия, при которых сходятся ряды

$$\sum_n |\lambda_n|^{-\rho}, \quad \rho > 0, \quad \sum_n |\lambda_n|^{-\rho_n \tau / \rho - 1}, \quad \rho > 0, \quad \tau > 0.$$

Вариационная постановка этой задачи (более удобная для применения методов функционального анализа) такова: исследовать поведение сингулярных чисел (s -чисел) оператора вложения $J: \mathring{W}_{2,\alpha}^l(-1,1) \rightarrow L_2(\mu)$, $d\mu = p(x) dx$. Класс $\mathring{W}_{2,\alpha}^l(-1,1)$ есть замыкание множества $C_0^\infty(-1,1)$ по норме

$$\|u\|_{W_{2,\alpha}^l} = \left(\int_{-1}^1 (|u^{(l)}|^2 (1-x^2)^{-\alpha} + |u|^2 (1-x^2)^{-2l-\alpha}) dx \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим сразу многомерный вариант этой задачи (ему также отвечает некоторый дифференциальный оператор в частных производных).

Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Обозначим d_x – расстояние от точки x до границы области Ω

$$d_x = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|,$$

если $\Omega = \mathbb{R}^m$, положим $d_x = 1 + |x|$. Определим класс $\mathring{W}_{p,\lambda}^l(\Omega)$, следуя работе В. Л. Олейника и Б. С. Павлова [1], как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|f\|_{\mathring{W}_{p,\lambda}^l(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{|\beta|=l} |D^\beta f|^p d_x^{-\lambda} + |f|^p d_x^{-p l - \lambda} \right) dx \right)^{1/p}, \quad (2)$$

здесь $l = 1, 2, 1 \leq p < \infty, \lambda \in (-\infty, \infty)$. При $p = \infty$ обычная модификация. Определим также классы $\mathring{L}_{p,\lambda}^l(\Omega)$ как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|f\|_{\mathring{L}_{p,\lambda}^l(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{|\beta|=l} |D^\beta f|^p d_x^{-\lambda} \right) dx \right)^{1/p}. \quad (3)$$

При $\lambda \geq 0$ нормы (2), (3) эквивалентны (см., [1]). При $\lambda = 0$, таким образом, мы рассматриваем обычный класс Соболева $\mathring{W}_p^l(\Omega)$.

Для классов $\mathring{W}_{p,\lambda}^l(\Omega)$ в работе [1] получена теорема вложения в пространство $L_q(\Omega, \mu)$ при условии $pl > t$. Подчеркнем, что μ – произвольная борелевская мера в Ω . Для формулировки теоремы вложения рассмотрим конечнократное покрытие области Ω шарами

$$\Omega = \bigcup_n B_n : \quad B_n = \{y \mid |x_n - y| < r_n\},$$

причем $r_n = (1/4)d_{x_n}$. Такое покрытие называется *покрытием типа Уитни*. (Вместо $1/4$ можно взять любое число $\gamma, 0 < \gamma < 1$.) Далее, определим последовательность

$$\beta_n = r_n^{(pl+\lambda-t)/p} (\mu(B_n))^{1/q}.$$

ТЕОРЕМА 1 [1]. Пусть $pl > t$. Тогда

- а) если $1 \leq q \leq p$, то оператор вложения J класса $\mathring{W}_{p,\lambda}^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega, \mu)$ ограничен в том и только том случае, если

$$\sup_n \beta_n < \infty;$$

- а') если $1 \leq q \leq p$, то оператор вложения J компактен тогда и только тогда, когда $\beta_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$;
б) если $1 \leq p < q \leq \infty$, то оператор вложения J ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sum_n \beta_n^r < \infty, \quad r^{-1} = p^{-1} - q^{-1}; \quad (4)$$

- б') если $1 \leq p < q \leq \infty$, то оператор вложения J компактен тогда и только тогда, когда выполнено условие (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. По теореме вложения Соболева условие $pl > t$ есть критерий ограниченности вложения пространства $\mathring{W}_{p,\lambda}^l(\Omega)$ в $C(\Omega)$, и, как нетрудно заметить, то же верно для классов $\mathring{W}_{p,\lambda}^l(\Omega)$. Таким образом, в теореме 1 содержателен лишь вопрос о поведении меры μ вблизи границы Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При условии $pl \leq t$ критерий ограниченности вложения $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega, \mu)$ (для любой борелевской меры μ) был получен В. Г. Мазьей (см. [2, § 1.1, § 1.2]) в терминах емкости и усовершенствован в работе Э. Сойера [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Напомним, что критерий компактности гарантирует дискретность спектра.

В данной работе мы рассматриваем вопрос принадлежности оператора вложения $J: W_{2,\lambda}^l(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega, \mu)$ классу $\sigma_\rho, \rho > 0$.

Напомним определение операторного идеала σ_ρ : пусть H_1, H_2 – гильбертовы пространства, $T: H_1 \rightarrow H_2$ – компактный оператор,

$$T = \sum_n s_n(T)(\cdot, e_n)g_n$$

– его разложение Шмидта $(\{e_n\}_1^\infty, \{g_n\}_1^\infty)$ – ортонормированные системы в H_1, H_2 соответственно, $\{s_n(T)\}_1^\infty$ – убывающая последовательность положительных чисел, число $s_n(T)$ называется n -м *сингулярным числом* оператора T , см. подробнее об этом в [5, с. 161]). Говорим, что $T \in \sigma_\rho$, $\rho > 0$, если $\sum_n s_n^\rho(T) < \infty$. Соответственно идеал $\sigma_{\rho, \tau}$, $\rho > 0, \tau > 0$, определяется как класс операторов T , для которых

$$\sum_n (s_n(T))^\tau n^{\tau/\rho-1} < \infty.$$

Наконец, идеал $\sigma_{\rho, \infty}$, $\rho > 0$, определяется как класс операторов T , для которых

$$\sup_n s_n(T) n^{-\rho} < \infty.$$

Приведем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $2l > m$, $\rho_* = (l - m/2)^{-1}$. Тогда оператор вложения $J \in \sigma_\rho$, $\rho > \rho_*$, тогда и только тогда, когда

$$\sum_n \beta_n^{\rho/2} < \infty. \quad (5)$$

Далее, $J \in \sigma_{\rho, \tau}$, $\rho > \rho_*$, $\tau > 0$, если

$$\sum_n (\beta_n)^{\tau/2} n^{\tau/\rho-1} < \infty,$$

и $T \in \sigma_{\rho_*, \infty}$, если

$$\sup_n \beta_n n^{-2\rho_*} < \infty.$$

Доказательство теоремы 2 основано на методах работы автора [5]. Отметим лишь роль предельного показателя ρ_* . При $\rho < \rho_*$ уже оператор вложения, отвечающий мере Дирака в любой точке области Ω , не принадлежит σ_ρ , так как нет вложения в $C(\Omega)$, хотя условие (5), очевидно, выполнено.

Псковский педагогический институт

Поступило

12.09.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Олейник В. Л., Павлов В. С. О критериях ограниченности и полной непрерывности некоторых операторов вложения // Проблемы математической физики. № 4. Л.: Изд-во ЛГУ, 1970. С. 112–118.
2. Мазья В. Г., Шапошникова Т. О. Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986.
3. Sawyer E. // Ind. Univ. Math. J. 1984. V. 33. № 3. P. 353–366.
4. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
5. Парфёнов О. Г. // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 2. С. 199–227.